车载航位推算系统误差补偿技术研究

严恭敏, 秦永元, 杨 波

(西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710072)

摘 要: 车载航位推算系统算法简单并且容易实现误差补偿。当惯组(MU)安装到载车上存在安装误差时, 推导了航位推算(DR)算法和航位推算误差, 并对航位推算误差进行了详细分析, 得出航位推算轨迹和真实轨迹相似的原理。基于相似性原理阐述了利用设定路标和零速修正(ZUPT)等方法对各种误差进行补偿的算法。跑车试验验证了航位推算算法和误差补偿的正确性和有效性。

关 键 词: 航位推算, 误差补偿, 路标, 零速修正

中图分类号: V 249. 3 **文献标识码**: A **文章编号**: 1000-2758(2006)01-0026-05

捷联惯导系统(SINS)以其提供导航信息的全面性和完全的自主性, 得到了广泛的应用, 但惯导误差会随着时间不断积累。全球卫星定位系统GPS 定位范围广、精度高, 其缺点是容易发生信号遮挡。虽然利用SINS/GPS 组合导航系统能够充分发挥这2个系统的优点, 克服它们的缺点, 但是在敏感地区里依赖于GPS 导航是不可靠的[1, 2]。对于军用车辆, 特别是导弹发射车辆(通常在固定的路线上行驶), 航位推算系统和惯导系统相比有一定的优势: 首先航位推算系统和惯导系统一样具有自主性, 但是航位推算系统误差随着时间增长变化较小; 其次惯导系统误差补偿技术复杂[3, 4], 而航位推算系统误差控制和补偿方法简单易行。如果载车上已经装有捷联惯导系统, 利用SINS/DR 组合导航系统将具有高的精度和容错性能。本文针对航位推算系统的一些相关问题进行了讨论, 在推导航位推算算法和航位推算误差的基础上详细分析了航位推算误差, 阐述了利用设定路标和零速修正等方法对各种误差进行补偿的算法。

1 航位推算算法

选取东-北-天(ENU)地理坐标系为导航参考坐标系, 记为 n 系; 当惯组按一定的方位安装到载车上时, 认为载车坐标系与惯组标定坐标系重合, 记为 b 系。里程计坐标系记为 m 系, 里程计在一小段时间 $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ 内测量的里程增量 ΔS_j 在 m 系的投影写成矢量形式为

$$\Delta S_j^m = [0 \quad \Delta S_j \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

假设 m 系和 b 系之间有安装偏差角, 分别为航向安装偏差角 α_ψ、俯仰安装偏差角 α_θ 和横滚安装偏差角 α_γ, 类似于求姿态矩阵 C_b^n 的方法, 可得从 b 系到 m 系的变换余弦阵为

$$C_b^m = \begin{bmatrix} \cos\alpha_\gamma\cos\alpha_\psi + \sin\alpha_\gamma\sin\alpha_\psi\sin\alpha_\theta & -\cos\alpha_\gamma\sin\alpha_\psi + \sin\alpha_\gamma\cos\alpha_\psi\sin\alpha_\theta & -\sin\alpha_\gamma\cos\alpha_\theta \\ \sin\alpha_\psi\cos\alpha_\theta & \cos\alpha_\psi\cos\alpha_\theta & \sin\alpha_\theta \\ \sin\alpha_\gamma\cos\alpha_\psi - \cos\alpha_\gamma\sin\alpha_\psi\sin\alpha_\theta & -\sin\alpha_\gamma\sin\alpha_\psi - \cos\alpha_\gamma\cos\alpha_\psi\sin\alpha_\theta & \cos\alpha_\gamma\cos\alpha_\theta \end{bmatrix} \tag{2}$$

因而里程增量(1) 式在 b 系上投影表示为

$$\Delta S_j^b = (C_b^m)^{\mathrm{T}}\Delta S_j^m = \begin{bmatrix} \sin\alpha_\psi\cos\alpha_\theta \\ \cos\alpha_\psi\cos\alpha_\theta \\ \sin\alpha_\theta \end{bmatrix} \cdot \Delta S_j \tag{3}$$

由上式可见 b 系上表示的里程增量和 α_γ 无关, 进一步可得里程增量在导航坐标系上的投影

$$\Delta S_j^n = C_b^n(j) \cdot \Delta S_j^b \tag{4}$$

式中, $C_b^n(j)$ 是 t_j 时刻的姿态矩阵。

收稿日期: 2005-04-15

作者简介: 严恭敏(1977-), 西北工业大学博士生, 主要从事捷联惯性导航算法和组合导航系统理论的研究。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

和捷联惯导位置更新算法一样, 可求得航位推算的纬度、经度和高度递推算法

$$L_j = L_{j-1} + \frac{\Delta S_{jN}^n}{R_M + h_{j-1}} \tag{5}$$

$$\lambda_j = \lambda_{j-1} + \frac{\Delta S_{jE}^n \sec L_{j-1}}{R_N + h_{j-1}} \tag{6}$$

$$h_j = h_{j-1} + \Delta S_{jU}^n \tag{7}$$

式中, L_j、λ_j 和 h_j 分别为载车所在点处的地球子午圈和卯酉圈主曲率半径。

2　航位推算误差分析

航位推算误差主要源于姿态误差角 φ 惯组相对于里程计的安装偏差角 α_ψ 和 α_θ 中未能精确补偿的剩余航向安装误差角 $\delta\alpha_\psi$ 和俯仰安装误差角 $\delta\alpha_\theta$、以及里程计刻度系数误差 δK_D。

由(3) 式和(4) 式得里程计增量的实际计算公式

$$\begin{aligned}\hat{\Delta S}_j^n &= \hat{C}_b^n(j)\begin{bmatrix}\sin\hat{\alpha}_\psi\cos\hat{\alpha}_\theta\\ \cos\hat{\alpha}_\psi\cos\hat{\alpha}_\theta\\ \sin\hat{\alpha}_\theta\end{bmatrix}\hat{\Delta S}_j\\ &= [I_{3\times3} - (\varphi\times)]C_b^n(j)\cdot\\ &\begin{bmatrix}\sin(\alpha_\psi+\delta\alpha_\psi)\cos(\alpha_\theta+\delta\alpha_\theta)\\ \cos(\alpha_\psi+\delta\alpha_\psi)\cos(\alpha_\theta+\delta\alpha_\theta)\\ \sin(\alpha_\theta+\delta\alpha_\theta)\end{bmatrix}\cdot(1+\delta K_D)\Delta S_j\end{aligned} \tag{8}$$

式中, $I_{3\times3}$ 表示三阶单位阵, $(\cdot\times)$ 表示向量的反对称阵, 展开上式并忽略关于 φ、$\delta\alpha_\psi$、$\delta\alpha_\theta$ 和 δK_D 的高阶小量得

$$\hat{\Delta S}_j^n \approx \Delta S_j^n - \varphi\times\Delta S_j^n + \Delta S_j\cdot C_b^n M_{D1}\delta\alpha + \Delta S_j^n\delta K_D \tag{9}$$

式中

$$M_{D1} = \begin{bmatrix}-\sin\alpha_\psi\sin\alpha_\theta & \cos\alpha_\psi\cos\alpha_\theta\\ -\cos\alpha_\psi\sin\alpha_\theta & -\sin\alpha_\psi\cos\alpha_\theta\\ \cos\alpha_\theta & 0\end{bmatrix}\quad \delta\alpha = \begin{bmatrix}\delta\alpha_\theta\\ \delta\alpha_\psi\end{bmatrix}$$

比较(4) 式和(9) 式可得 t_{j-1} 时刻到 t_j 时刻航位推算误差方程

$$\delta\Delta S_j^n = \hat{\Delta S}_j^n - \Delta S_j^n = \Delta S_j^n\times\varphi + \Delta S_j\cdot C_b^n M_{d1}\delta\alpha + \Delta S_j^n\delta K_D \tag{10}$$

一般 α_ψ 和 α_θ 都是小角度, 并且在载车运动过程中俯仰角和横滚角都在零附近变化, 因而有

$$\Delta S_j\cdot C_b^n M_{D1}\delta a \approx \Delta S_j\cdot\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta\alpha_\theta\\ \delta\alpha_\psi\end{bmatrix} = \Delta S_j\cdot\begin{bmatrix}\delta\alpha_\psi\cos\psi\\ -\delta\alpha_\psi\sin\psi\\ \delta\alpha_\theta\end{bmatrix} \tag{11}$$

又因为

$$\begin{aligned}\Delta S_j^n\times\begin{bmatrix}0\\0\\\delta\alpha_\psi\end{bmatrix} &\approx \left(\begin{bmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\Delta S_j\right)\times\begin{bmatrix}0\\0\\\delta\alpha_\psi\end{bmatrix}\\ &= \Delta S_j\cdot\begin{bmatrix}\delta\alpha_\psi\cos\psi\\ -\delta\alpha_\psi\sin\psi\\ 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{12}$$

比较(11) 式和(12) 式, 并记 $[\cdot]_{3\times1} = [0\quad 0\quad \cdot]^{\mathrm{T}}$, 则(10) 式可写成

$$\delta\Delta S_j^n = \Delta S_j^n\times\varphi + \Delta S_j^n\times[\delta\alpha_\psi]_3 + \Delta S_j\cdot[\delta\alpha_\theta]_{3\times1} + \Delta S_j^n\delta K_D \tag{13}$$

这就是航位推算的位置误差方程式, 为了把位置误差表示成地理坐标的形式将(5) 式～(7) 式微分并整理得

$$\delta p_j = (I_{3\times3} + M_{D3})\delta p_{j-1} + M_{D2}(\Delta S_j^n\times\varphi + \Delta S_j^n\times[\delta\alpha_\psi]_{3\times1} + \Delta S_j\cdot[\delta\alpha_\theta]_{3\times1} + \Delta S_j^n\delta K_D) \tag{14}$$

式中

$$\delta p_j = [\delta L_j\quad \delta\lambda_j\quad \delta h_j]^{\mathrm{T}}$$

$$M_{D2} = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{R_M + h_{j-1}} & 0\\ \frac{\sec L_{j-1}}{R_N + h_{j-1}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$M_{D3} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -\frac{\Delta S_{jN}^n}{(R_M + h_{j-1})^2}\\ \Delta S_{jE}^n\sec L_{j-1}\frac{\tan L_{j-1}}{R_N + h_{j-1}} & 0 & -\Delta S_{jE}^n\frac{\sec L_{j-1}}{(R_N + h_{j-1})^2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

3　姿态角误差

在捷联惯导算法的姿态误差方程中

$$\dot{\varphi} = -\omega_{in}^n\times\varphi + \delta\omega_{in}^n - \delta\omega_{ib}^n \tag{15}$$

以航位推算算法的更新周期内平均速度 $\bar{v}_j^n$ 和位置 p_j 分别代替捷联惯导算法的惯导速度和位置, 可求得航位推算的姿态误差方程

$$\dot{\varphi} = -\omega_{in}^n\times\varphi + M_1\delta\bar{v}_j^n + M_2\delta p_j - C_b^n\epsilon^b \tag{16}$$

式中

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$M_1=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1}{R_M+h_j} & 0\\ \dfrac{1}{R_N+h_j} & 0 & 0\\ \dfrac{\tan L_j}{R_M+h_j} & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$M_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dfrac{v_{jN}^n}{(R_M+h_j)^2}\\ -\omega_e\sin L_j & 0 & \dfrac{-v_{jE}^n}{(R_N+h_j)^2}\\ v_{jE}^n\dfrac{\sec^2 L_j}{R_N+h_j}+\omega_e\cos L_j & 0 & -v_{jE}^n\dfrac{\tan L_j}{(R_M+h_j)^2}\end{bmatrix}$$

4 航位推算的补偿和校正

4.1 方程简化

通常载车的行驶范围不大,所以在航位推算的位置误差方程(14)式中近似有

$$\bar{M}_{D2}=\begin{bmatrix}0 & 1/\bar{R}_{Mh} & 0\\ \sec\bar{L}/\bar{R}_{Nh} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{17}$$

式中,$\bar{L}$、$\bar{R}_{Mh}$、$\bar{R}_{Nh}$是载车行驶范围内的平均纬度、平均子午圈半径和平均卯酉圈半径。又由于$\|M_{D3}\|\ll\|I_{3\times3}\|$,则(14)式简化为

$$\delta p_j=\delta p_{j-1}+\bar{M}_{D2}(\Delta S_j^n\times\varphi+\Delta S_j^n\times[\delta\alpha_\psi]_{3\times1}+\Delta S_j\cdot[\delta\alpha_\theta]_{3\times1}+\Delta S_j^n\delta K_D) \tag{18}$$

和纯惯性导航算法相比,在车载航位推算系统中速度和位置计算误差都比较小,如果在姿态误差方程中忽略速度误差和位置误差,则(16)式简化为

$$\dot{\varphi}=-\omega_{in}^n\times\varphi-C_b^n\epsilon^b \tag{19}$$

4.2 航位推算轨迹和真实轨迹相似性原理

如果陀螺漂移很小或者载车行驶时间较短,在(18)式中可认为姿态误差角在载车行驶过程中为常值,并假设$\delta\alpha_\psi$、$\delta\alpha_\theta$和δK_D也为常值,则由(18)式得

$$\delta p_j=\bar{M}_{D2}(\Delta S^n\times\varphi+\Delta S^n\times[\delta\alpha_\psi]_{3\times1}+\Delta S\cdot[\delta\alpha_\theta]_{3\times1}+\Delta S^n\delta K_D) \tag{20}$$

式中,$\Delta S^n=\sum_{i=1}^{j}\Delta S_i^n$为总位移,$\Delta S=\sum_{i=1}^{j}\Delta S_i$为总里程。若暂且不记$\delta\alpha_\theta$的影响,则可得

$$\delta p_j=\bar{M}_{D2}(\Delta S^n\times\varphi+\Delta S^n\times[\delta\alpha_\psi]_{3\times1}+\Delta S^n\delta K_D) \tag{21}$$

由此可知当载车绕行一圈回到原地时有$\Delta S^n=0$,因而位置误差也为零。通常水平姿态误差角都比较小,如果进一步忽略水平姿态误差角的影响得

$$\delta p_j\approx\bar{M}_{D2}(\Delta S^n\times[\varphi_U+\delta\alpha_\psi]_{3\times1}+\Delta S^n\delta K_D) \tag{22}$$

从上式易知$\delta\alpha_\psi$和航向误差角φ_U处于式中相同位置上,它们对位置误差影响是等效的。

为了方便说明提出两折线相似:oxy平面上2条折线r和r'分别由线段d_id_{i+1}和$d_i'd_{i+1}'$首尾相连组成(其中$(i=0,1,2,\cdots)$,下同),并且r和r'具有共同的起始点,即d_0和d_0'重合,连接起始点到端点d_i和d_i'的矢量分别记为r_i和r_i',如果长度之比$|r_i'|/|r_i|=k$为常值,并且r_i到r_i'的转角β也是常值,则称这两条折线相似,如图1所示。换言之,如果折线r'和r相似,则可以由r构造出r',即由r_i绕d_0转动β角再乘以比例系数k则得r_i'。假设d_0为原点,r_i和r_i'的坐标分别为$(x_i,y_i,0)$和$(x_i',y_i',0)$,如果β角是小角,则两矢量r_i和r_i'的差为

$$\begin{aligned}\delta r_i&=r_i'-r_i=\begin{bmatrix}x_i'\\y_i'\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\0\end{bmatrix}\\&\approx\begin{bmatrix}1&\beta&0\\-\beta&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\0\end{bmatrix}\cdot k-\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0\\0\\\beta k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_i\\y_i\\0\end{bmatrix}\cdot(k-1)\\&=r_i\times[\beta k]_{3\times1}+r_i\cdot(k-1)\end{aligned} \tag{23}$$

因此如果不记高度上的变化,认为载车是在平面上行驶,比较(22)式和(23)式可知航位推算轨迹和载车行驶过的真实轨迹是相似的,这就是航位推算轨迹和真实轨迹相似性原理。

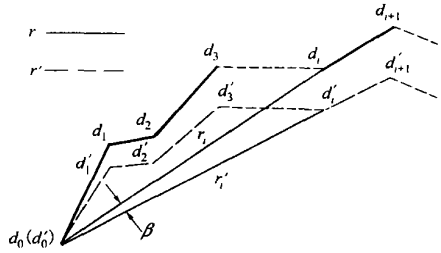


图1 折线相似示意图

4.3 $\delta\alpha_\psi$、$\delta\alpha_\theta$和δK_D的补偿

利用航位推算轨迹和真实轨迹相似性原理,通过跑车试验可进行$\delta\alpha_\psi$和δK_D的补偿。首先由于δK_D是个小量,若忽略它的影响,由(22)式近似有

$$\delta p_j=\bar{M}_{D2}(\Delta S^n\times[\varphi_U+\delta\alpha_\psi]_{3\times1}) \tag{24}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

移项整理得

$$[\varphi_U + \delta\alpha_\psi]_{3\times1} = [\overline{M}_{D2}(\Delta S^n \times)]^{-1}\delta p_j \quad (25)$$

由此可见利用设定路标方法能估计出 φ_U 和 $\delta\alpha_\psi$, 然而 φ_U 和 $\delta\alpha_\psi$ 是不可区分的, 只有在降低 φ_U 影响时才能实现 $\delta\alpha_\psi$ 的补偿。其次若忽略误差角 φ_U 和 $\delta\alpha_\psi$ 的影响, 由(22)式近似得

$$\delta p_j = \overline{M}_{D2}\Delta S^n \delta K_D \quad (26)$$

令 $\Delta p_j = \overline{M}_{D2}\Delta S^n$ 代入上式得 $\delta p_j = \Delta p_j \delta K_D$, 即 $\hat{\Delta p_j} = \Delta p_j + \delta p_j = \Delta p_j(1 + \delta K_D)$, 从而得里程计刻度系数误差的补偿公式

$$\delta K_D = |\hat{\Delta p_j}|/|\Delta p_j| - 1 \quad (27)$$

对于俯仰安装误差角 $\delta\alpha_\theta$ 的补偿, 若忽略 φ, $\delta\alpha_\psi$ 和 δK_D 影响, 则方程(20)简化为

$$\delta p_j = \overline{M}_{D2}[\delta\alpha_\theta]_{3\times1}\Delta S \quad (28)$$

可见航位推算的高度误差和载车的行程是成比例的, 载车绕行一圈回到原地时高度误差并不会自行抵消掉, 将(28)式移项得俯仰安装误差角的补偿(或俯仰安装偏差角 α_θ 的计算)公式

$$[\delta\alpha_\theta]_{3\times1} = \frac{1}{\Delta S}(\overline{M}_{D2})^{-1}\delta p_j \quad (29)$$

4.4　姿态角校正和陀螺漂移的补偿

若初始姿态误差角和航向误差角很小即 $\varphi_0 \approx 0$, 则(19)式近似为

$$\dot{\varphi} = -C_b^n \varepsilon^b \quad (30)$$

如果在一段路程中载车航向大致相同, 平均航向角为 Ψ, 不记俯仰角和横滚角的影响, 并假设陀螺漂移为常值漂移 $\vec{\varepsilon} = [\vec{\varepsilon}_x \quad \vec{\varepsilon}_y \quad \vec{\varepsilon}_z]^T$, 行驶时间 t 后进行零速修正, 设零速修正时测得水平姿态误差角为 φ_E 和 φ_N, 再假设在零速修正点还有路标修正, 则当 $\delta\alpha_\psi$ 很小时由(25)式可得航向偏差角 φ_U, 所以近似有

$$[\varphi_E \quad \varphi_N \quad \varphi_U]^T \approx -\overline{C_b^n}[\vec{\varepsilon}_x \quad \vec{\varepsilon}_y \quad \vec{\varepsilon}_z]^T \quad (31)$$

式中, $\overline{C_b^n}$ 为平均姿态阵, 因此得陀螺漂移补偿公式

$$[\vec{\varepsilon}_x \quad \vec{\varepsilon}_y \quad \vec{\varepsilon}_z]^T \approx -(\overline{C_b^n})^{-1}[\varphi_E \quad \varphi_N \quad \varphi_U]^T \quad (32)$$

5　跑车试验和结论

跑车系统的主要组成部分有: 惯组、里程计、导航计算机以及相关电源等。其中惯组包括3个激光陀螺和3个石英挠性加速度计, 激光陀螺随机漂移小于0.03°/h(1σ), 加速度计零偏稳定性为$\pm 3\times10^{-4}g$; 里程计刻度系数误差小于0.2%。跑车时利用高精度GPS设定路标和作为航位推算的定位考核基准, GPS定位误差小于6 m(1σ)。跑车路线为图2所示环形路线, 并用"Δ"标出了4个路标点, 路况为高等级公路, 总里程约75 km, 行车80 min, 行

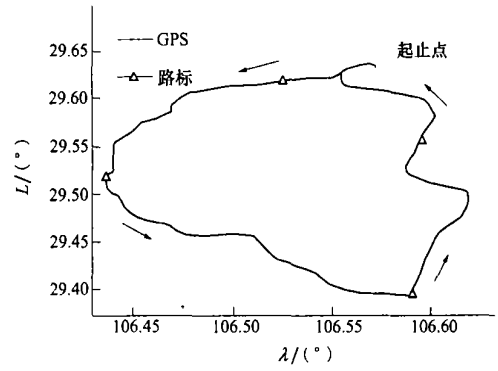


图2　跑车路线图

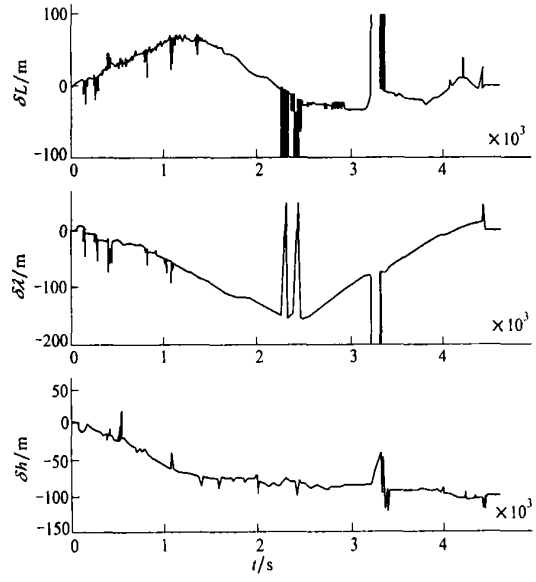


图3　无路标校正跑车定位误差

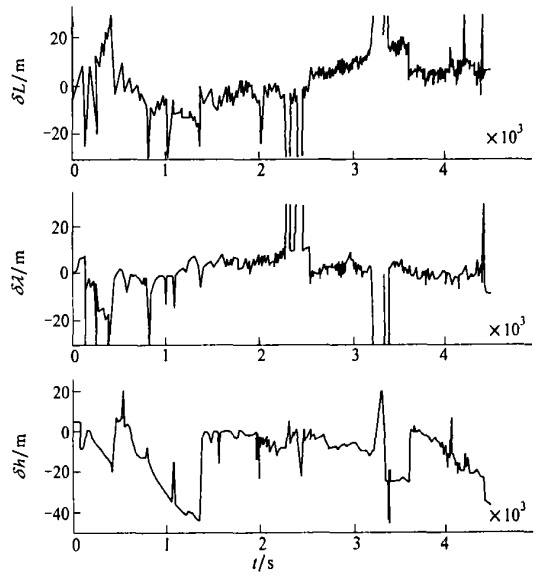


图4　有路标校正跑车定位误差

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

驶最大时速达80 km。跑车原始数据经事后处理,分为无路标修正方式和有路标修正方式,结果见图3和图4,其中误差出现大的跳变是由于GPS丢星造成的。

从图3可以看出跑车回到出发点时经纬度误差都很小,而在行驶过程中基本上是经度距离大时纬度误差增大、纬度距离大时经度误差增大,高度误差一直在增长;而从图4中可以看出,大约在500 s处经过第一次路标修正后经纬度误差增长速度明显减缓,整个跑车过程中经纬度误差不超过20 m。

参考文献:

[1] 刘基于,李征航,王跃虎等. 全球定位系统原理及应用. 北京:测绘出版社,1993

[2] 李 涛,吴美平,江 明,庹洲慧. 激光陀螺SINS/GPS组合导航车载试验系统. 国防科技大学学报,2003,25(3):104~108

[3] 高钟毓,王 进,董景新,赵常德. 惯性测量系统零速修正的几种估计方法. 中国惯性技术学报,1995,3(2):24~29

[4] Wang Jin, Gao Zhongyu, Dong Jinxing, Zhang Rong. Real Time Estimations of Position and Gravity Vector for an Inertial Survey System. Proc of Symposium of Gyro Technology, Stuttgart, Germany: 1995

[5] 严恭敏. 捷联惯导算法及车载组和导航系统研究:[硕士论文]. 西安:西北工业大学,2004

On Error Compensation Technology for Vehicular Dead Reckoning(DR) System

Yan Gongmin, Qin Yongyuan, Yang Bo

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: To our best knowledge, there is no paper in the open literature giving detailed technical information on error compensation technology for vehicular DR system. We present in this paper the results of our effort to develop such information. In the full paper, we describe the detailed technical information in much detail; here we give only a briefing. Taking into account that IMU (Inertial Measurement Unit) cannot be installed on vehicle precisely, we deduce DR algorithms. We propose a similarity theory that takes due notice that the DR trajectory and the true trajectory are similar with azimuth error regarded as a constant and that the vehicle runs on a plane. On the basis of the similarity theory we conclude that position errors are zero when the vehicle runs in a ring route and back to the starting point. We propose system error calibration algorithms, which can compensate for source errors, including IMU installation errors, odometer scale factor error, azimuth error of initial alignment and gyro constant drift error. Finally, we give a ring route field-test for the vehicular DR algorithms. Latitude and longitude errors are always kept below 20 m after the first landmark calibration at about 500 s.

Key words: DR (dead reckoning), error compensation, landmark

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

车载激光捷联惯导系统双位置对准研究*

严恭敏，秦永元

（西北工业大学自动化学院，西安 710072）

[摘要] 提出了适用于车载激光陀螺捷联惯导系统的双位置对准方法，该方法选取水平陀螺中性能较好的一个陀螺用于初始对准，使得航向角对准精度不受性能差的陀螺影响。双位置对准方法能够实现加速度计常值偏置和陀螺常值漂移的补偿，为导航精度提高创造有利条件。文中还对双位置对准方法的误差进行了分析。

[关键词] 激光陀螺；捷联惯导；双位置对准

[中图分类号] TJ765.2 [文献标识码] A

The Study of Two-position Initial Alignment In RLG Strapdown Inertial Navigation System for Vehicle-borne

YAN Gong-min, QIN Yong-yuan

(Department of Automation Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The practical method of two-position initial alignment in RLG strapdown inertial navigation system for vehicle-borne was presented. In this method, the gyro which had higher performance of the two horizontal gyros was selected to apply in the initial alignment, and the azimuth alignment precision won't be influenced by the other horizontal gyro. The accelerometer constant bias and gyro constant drift were compensated by two-position initial alignment method, therefore the navigation precision could be improved. Moreover two-position initial alignment errors were studies in this paper.

Keywords: ring laser gyro(RLG); strapdown inertial navigation system(SINS); two-position initial alignment

1 引言

初始对准是惯性导航系统进入导航工作状态的必要前提条件，初始对准好坏直接影响到导航解算精度。在快速初始对准方法中，经常使用的是双位置、四位置等所谓的多位置对准方法。除了对准时间短外，多位置对准的最明显优点是利用转位关系实现加速度计常值偏置和陀螺常值漂移的补偿。文中提出了适用于车载激光陀螺捷联惯导系统的双位置对准方法，该方法选取水平陀螺中性能较好的一个陀螺用于初始对准，使得航向角的对准精度不受性能差的水平陀螺影响。

2 初始对准的基本原理

初始对准的目的就是在载车静止的情况下确定载车的初始姿态角（俯仰角 θ 和横滚角 γ）和航向角 ψ，进而得出初始的姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_n^b$。选取东－北－天（ENU）地理坐标系为导航参考坐标系，右－前－上坐标系为载车坐标系。导航坐标系 $ox_n y_n z_n$ 绕 z_n 轴负向转角 ψ 得 $ox'y'z'$，$ox'y'z'$ 绕 x' 轴转角 θ 得 $ox''y''z''$，$ox''y''z''$ 再绕 y'' 轴转角 γ 则得到载车坐标系 $ox_b y_b z_b$，由此得出载车坐标系与导航坐标系之间的关系，用方向余弦阵表示为：

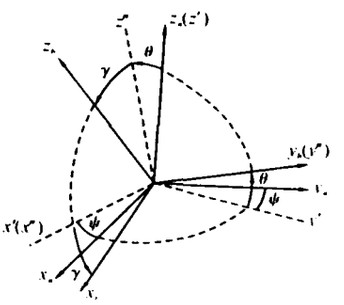


图 1 载车坐标系与导航坐标系之间的关系

* 收稿日期：2005－04－04

作者简介：严恭敏（1977－ ），男，博士研究生，研究方向：捷联惯性导航算法和信号处理研究。

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$C_n^b = \begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\psi + \sin\gamma\sin\psi\sin\theta & -\cos\gamma\sin\psi + \sin\gamma\cos\psi\sin\theta & -\sin\gamma\cos\theta \\ \sin\psi\cos\theta & \cos\psi\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\gamma\cos\psi - \cos\gamma\sin\psi\sin\theta & -\sin\gamma\sin\psi - \cos\gamma\cos\psi\sin\theta & \cos\gamma\cos\theta \end{bmatrix} \tag{1}$$

加速度计测量输出的坐标转换关系为：

$$\boldsymbol{a}^b = \boldsymbol{C}_n^b \boldsymbol{g}^n \tag{2}$$

式中 $\boldsymbol{a}^b = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T$ 为加速度计 x、y 和 z 轴的平均比力测量输出；

$\boldsymbol{g}^n = [0 \quad 0 \quad -g]^T$，其中 g 为重力加速度。

由(2)式展开取第一和第二分量得：

$$a_x = g\sin\gamma\cos\theta \tag{3}$$

$$a_y = -g\sin\theta \tag{4}$$

所以得俯仰角和横滚角主值计算公式：

$$\theta = -\arcsin(\frac{a_y}{g}) \tag{5}$$

$$\gamma = \arcsin(\frac{a_x}{g\cos\theta}) \tag{6}$$

陀螺测量输出的坐标转换关系为：

$$\omega_{ie}^b = \boldsymbol{C}_n^b \omega_{ie}^n \tag{7}$$

式中 $\omega_{ie}^b = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$ 为陀螺 x、y 和 z 轴的平均角速率测量输出；

$\omega_{ie}^n = [0 \quad \omega_{ie}\cos L \quad \omega_{ie}\sin L]^T$，其中 ω_{ie} 为地球自转角速率大小，L 为当地地理纬度，记 $\omega_N = \omega_{ie}\cos L$ 为地球自转角速率北向分量和 $\omega_U = \omega_{ie}\sin L$ 为天向分量。

由(7)式展开取第二分量得：

$$\omega_y = \omega_N\cos\psi\cos\theta + \omega_U\sin\theta \tag{8}$$

所以得航向角主值计算公式：

$$\cos\psi = \frac{1}{\omega_N\cos\theta}(\omega_y - \omega_U\sin\theta) = \frac{\omega_y}{\omega_N}\sec\theta - \tan L\tan\theta \tag{9}$$

$$\psi = \arccos(\frac{\omega_y}{\omega_N}\sec\theta - \tan L\tan\theta) \tag{10}$$

(5)、(6)和(10)式即为姿态角主值和航向角主值的计算公式，经判断相限后便可由(1)式求出姿态矩阵。

在双位置对准中，利用转位装置将捷联惯组绕 oz_b 轴转动 180°，称之为 180° 位置，记加速度计和陀螺的输出分别为 a_{i180} 和 $\omega_{i180}(i = x, y, z)$。相应的，称捷联惯组未转动时的位置为 0° 位置，这时加速度计和陀螺的输出分别为 a_{i0} 和 $\omega_{i0}(i = x, y, z)$。由于 ox_b 轴加速度计在 0° 位置和 180° 位置的比力输出理论上应该是大小相等而方向相反，如果测量值 a_{x0} 和 a_{x180} 不相等，认为该误差是由加速度计常值偏置引起的，由此可求得 ox_b 轴加速度计的常值偏置：

$$\nabla_x = (a_{x0} + a_{x180})/2 \tag{11}$$

同理可求得 oy_b 轴加速度计的常值偏置和 ox_b、oy_b 轴陀螺的常值漂移：

$$\nabla_y = (a_{y0} + a_{y180})/2 \tag{12}$$

$$\varepsilon_x = (\omega_{x0} + \omega_{x180})/2 \tag{13}$$

$$\varepsilon_y = (\omega_{y0} + \omega_{y180})/2 \tag{14}$$

扣除加速度计的常值偏置和陀螺的常值漂移的影响，姿态角和航向角的计算式(5)、(6)、(10)应改写成：

$$\theta = -\arcsin(\frac{a_{y0} - a_{y180}}{2g}) \tag{15}$$

$$\gamma = \arcsin(\frac{a_{x0} - a_{x180}}{2g\cos\theta}) \tag{16}$$

$$\psi = \arccos(\frac{\omega_{x0} - \omega_{y180}}{2\omega_N}\sec\theta - \tan L\tan\theta) \tag{17}$$

得到姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_n^b$ 后，还可计算出 oz_b 轴加速度计的常值偏置和 oz_b 轴陀螺的常值漂移：

$$\nabla_z = (a_{z0} + a_{z180})/2 - [\boldsymbol{C}_n^b \boldsymbol{g}^n]_3 \tag{18}$$

$$\varepsilon_z = (\omega_{z0} + \omega_{z180})/2 - [\boldsymbol{C}_n^b \omega_{ie}^n]_3 \tag{19}$$

式中 $[\cdot]_3$ 表示矢量 $\cdot$ 的第三个分量。但是由于实际上存在各种计算误差，上述 oz_b 轴加速度计的常值偏置和 oz_b 轴陀螺的常值漂移的计算结果往往误差较大，一般都不予采用。

3　误差分析

(1) 重力加速度误差和当地纬度误差

从(5)式和(6)式可以看出重力加速度 g 的误差引起俯仰角或横滚角的计算误差将小于 0.3′。

从(10)式可以看出当地纬度误差引起的航向角误差是很小的，可以不予考虑。

以下误差分析中均不考虑重力加速度误差和当地纬度误差。

(2) 航向角计算误差的产生

由(9)式左右两边求微分得：

$$\sin\psi \cdot \delta\psi = \frac{1}{\omega_N}(\omega_y\sec\theta\tan\theta \cdot \delta\theta + \sec\theta \cdot \delta\omega_y) - \tan L\sec^2\theta \cdot \delta\theta \tag{20}$$

将(8)式代入上式，经整理得：

$$\delta\psi = \frac{1}{\sin\psi}(\cos\psi\tan\theta - \tan L) \cdot \delta\theta + \frac{1}{\omega_N\sin\psi\cos\theta}\delta\omega_y$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(21)

由此可见航向角误差主要与航向角 ψ、俯仰角 θ、俯仰角误差 $\delta\theta$ 和 oy_b 轴陀螺输出误差 $\delta\omega_y$(或漂移)有关。值得指出的是航向角误差和横滚角及横滚角误差无关。当航向角在 0° 或 180° 度附近时将产生较大的航向角误差,在 90° 或 270° 时误差最小。若不计陀螺漂移,当纬度为 30° 时,航向角及俯仰角对航向角误差的影响见图 2。

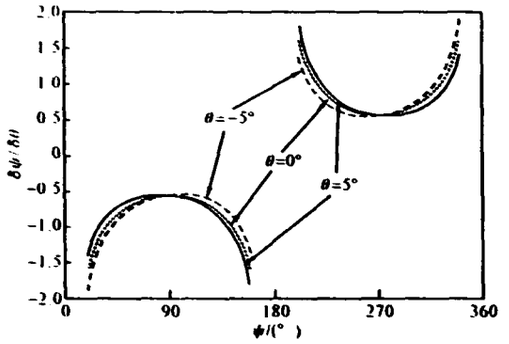


图 2 航向角、俯仰角与航向角误差关系

通常载车初始对准时姿态角不大(在 ±5° 范围之内),如果忽略俯仰角的影响,式(21)简化为:

$$\delta\psi = \frac{1}{\sin\psi}(-\tan L \cdot \delta\theta + \frac{1}{\omega_N}\delta\omega_y) \tag{22}$$

因此纬度越高时俯仰角误差对航向角误差影响越大。如再进一步不考虑俯仰角误差的影响,当航向角等于 90° 时,式(22)可简化为:

$$\delta\psi = \frac{\delta\omega_x}{\omega_N} \tag{23}$$

这就是航向角对准精度的极限公式,即航向角精度受限于东向陀螺的漂移。例如在纬度 30° 地区,对于随机漂移为 0.03°/h 的激光陀螺,它的航向角对准极限精度约为 8′。通常当加速度计的标度因数误差小于 100PPM 时,水平姿态角对准误差将小于 1′。因此在车载激光捷联惯导系统初始对准时,航向角对准误差主要是取决于 oy_b 轴陀螺漂移。

同理,对于双位置对准可以从式(17)推出其航向角误差公式:

$$\delta\psi = \frac{1}{\sin\psi}(\cos\psi\tan\theta - \tan L)\cdot\delta\theta + \frac{1}{2\omega_N\sin\psi\cos\theta}(\delta\omega_{y0} - \delta\omega_{y180}) \tag{24}$$

(3) 转角误差和转轴误差

转角误差指的是转位装置将捷联惯组绕 oz_b 轴转动到 180° 位置时 ox_b 和 oy_b 轴与 0° 位置时对应轴不共线误差;转轴误差指的是转位装置实际转动轴与捷联惯组 oz_b 轴不重合误差。转角误差和转轴误差示意图见图(3)和(4),为了分析方便,这里假定转位装置转动轴在 oy_bz_b 平面内,图中 α 表示转角误差角,β 表示转轴误差角,ω_{y180} 表示理论上的 180° 位置 oy_b 轴陀螺输出,ω'_{y180} 表示存在转角误差和转轴误差时实际的 180° 位置 oy_b 轴陀螺输出。假设 0° 位置时载车航向角为 ψ、俯仰角为 θ,由(8)式可得:

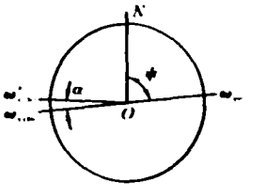


图 3 转角误差

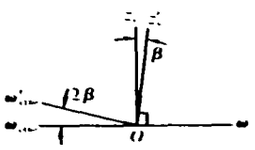


图 4 转轴误差

$$\omega_{y0} = \omega_N\cos\psi\cos\theta + \omega_U\sin\theta \tag{25}$$

$$\omega_{y180} = \omega_N\cos(\psi+180°)\cos(-\theta) + \omega_U\sin(-\theta) = -(\omega_N\cos\psi\cos\theta + \omega_U\sin\theta) \tag{26}$$

由于 α 和 β 都是小角度,近似有下式成立:

$$\omega'_{y180} \approx \omega_N\cos(\psi+180°+\alpha)\cos(-\theta+2\beta) + \omega_U\sin(-\theta+2\beta) = -\omega_N\cos(\psi+\alpha)\cos(\theta-2\beta) - \omega_U\sin(\theta-2\beta) \approx -\omega_N(\cos\psi-\sin\psi\cdot\alpha)(\cos\theta+\sin\theta\cdot 2\beta) - \omega_U(\sin\theta-\cos\theta\cdot 2\beta) \approx -\omega_N(\cos\psi\cos\theta+2\cos\psi\sin\theta\cdot\beta-\sin\psi\cos\theta\cdot\alpha) - \omega_U(\sin\theta-2\cos\theta\cdot\beta) = -\omega_N(\cos\psi\cos\theta+\omega_U\sin\theta) + [\omega_N\sin\psi\cos\theta\cdot\alpha + 2(\omega_U\cos\theta-\omega_N\cos\psi\sin\theta)\beta] \tag{27}$$

比较(26)式和(27)式得 180° 位置轴 oy_b 陀螺输出误差:

$$\delta\omega_{y180} = \omega'_{y180} - \omega_{y180} = \omega_N\sin\psi\cos\theta\cdot\alpha + 2(\omega_U\cos\theta - \omega_N\cos\psi\sin\theta)\beta \tag{28}$$

在俯仰角 θ 不大时可以忽略俯仰角影响,近似得:

$$\delta\omega_{y180} = \omega_N\sin\psi\cdot\alpha + 2\omega_U\cdot\beta \tag{29}$$

从式(29)可以看出,地球自转角速率天向分量通过转轴误差角耦合到 180° 位置轴 oy_b 陀螺输出中,北向分量通过转角误差角耦合到陀螺输出中,航向角越接近 90° 或 270° 北向分量耦合越为严重。事实上转角误差和转轴误差对双位置对准的影响,相当于在 180° 位置时 oy_b 轴陀螺输出中加入了一常值漂移,这对 oy_b 轴陀螺测漂和航向角对准都是不利的。相反,如果在转位机构测

(下转第 494 页)

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

度、速度等飞行模态的控制，使解耦环节可直接

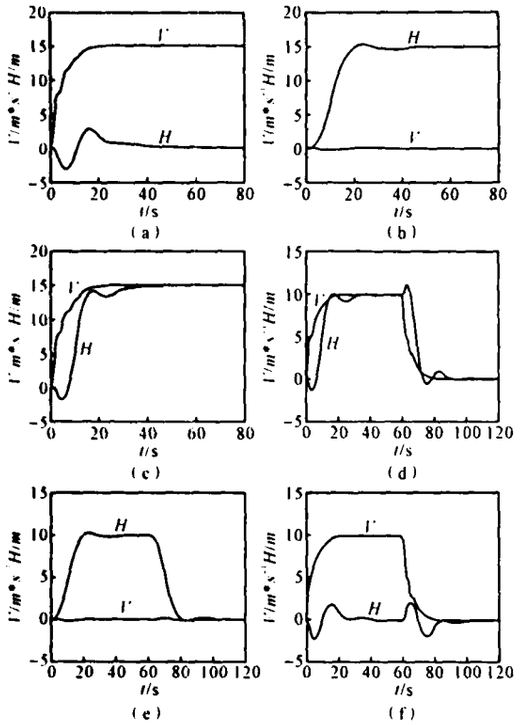


图 2 仿真结果曲线

构造，且结构简单，便于系统的分析与设计。数学仿真结果表明，文中设计的控制系统可以很好地解决纵向飞行轨迹控制与速度控制之间的耦合问题。

[参 考 文 献]

[1] Lester Faleiro. Total Energy Control System (TECS) feasibility exploration for the Aerospace Technology Demonstrator (ATD)[R]. DLR TR－R25－1998.

[2] L. F. Faleiro etc. Analysis and tuning of a 'Total Energy Control System' control low using eigenstructure assignment[J]. Aerospace Science and Technology, 1999, (3) 127－140.

[3] A. P. Kurdjukov etc. Energy Approach to Flight Control[R]. AIAA－98－4211.

[4] Iven Mareels, Rini Akmeliawati. Passivity－Based Control for Flight Control Systems[J]. IEEE.

(上接第 480 页)

试中能充分补偿掉常值性转角误差和转轴误差（剩余随机性转角误差和转轴误差无法补偿），则能降低转位装置对初始对准误差的影响。

以上分析的是转角误差和转轴误差对航向角对准的影响，它们对姿态角的影响也可得出类似的结论。

(4)其它误差

造成初始对准误差的还有惯组的标定误差和环境误差等误差。惯组标定误差中对航向角对准产生主要影响的是陀螺的标度因数误差。在四位置对准中，利用"正切法"求姿态角时，陀螺的标度因数误差不会影响到航向角的计算。而在双位置对准中，利用的是"余弦法"，这就得考虑到陀螺标度因数误差的影响。但是一般激光陀螺的标度因数误差小于 100PPM 并且标度因数稳定性也好，则由标度因数产生的航向角误差不会超过 0.3′。因此激光陀螺的标度因数影响是很小的。环境误差主要指的是对准时载车晃动引起的干扰误差。对于干扰误差，可以利用一定的数据处理算法，如奇异点去除和平滑滤波等算法，对惯组数据输出进行处理，从而降低干扰误差的影响。

4 结论

从以上分析结果可见，在陀螺安装时把漂移小的陀螺安装在轴 oy_b 上，使得航向角对准精度不受性能较差的水平陀螺影响，由于横滚角对准误差不会影响到航向角的对准精度，因而也应该尽量把性能好的加速度计安装在 oy_b 轴上。初始对准前尽量使 oy_b 轴靠近东西方向并且减小俯仰角对航向角对准都是有利的。

[参 考 文 献]

[1] 缪玲娟，田海. 车载激光捷联惯导系统的快速初始对准及误差分析[J]. 北京理工大学学报，2002.

[2] 吴文启，刘恒春，马永祥，贺建民. 捷联寻北系统中的矢量分析方法[J]. 中国惯性技术学报，1999.

[3] 任思聪. 实用惯导系统原理[M]. 北京：宇航出版社，1988.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

* 车载激光陀螺SINS/DR组合导航系统研究*

严恭敏, 秦永元
(西北工业大学 自动化学院, 西安 710072)

[摘要] 推导了捷联惯导系统(SINS)误差方程和航位推算(DR)误差方程。建立了SINS/DR组合导航离散卡尔曼滤波(KF)状态方程和量测方程。最后对SINS/DR组合导航算法进行了仿真, 仿真结果表明: 组合系统中部分误差源能够被估计出来并且得到补偿, 因而组合导航效果优于单独的SINS或DR导航效果。

[关键词] 激光陀螺; 捷联惯导系统; 航位推算; SINS/DR组合导航; 卡尔曼滤波
[中图分类号] V 241.62+2 [文献标识码] A

The Study of Vehicular RLG GPS/DR Integrated Navigation System

YAN Gong-min, QIN Yong-yuan
(Department of Automation Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The wide applications of RLG in vehicle-borne navigation system are indicated. Discrete KF (Kalman Filter) algorithms for SINS/DR integrated navigation system, including state equations and measurement equations, are introduced where SINS error equations are Continuous and DR error equations are discrete. Finally the simulation result shows that the position errors of SINS/DR integrated navigation system are prior to that of SINS and DR system respectively, when some error source can be estimated and be compensated in the integrated navigation system.

Key words: RLG (Ring Laser Gyro); SINS (Strapdown Inertial Navigation System); DR (Dead Reckoning); SINS/DR Integrated Navigation; KF (Kalman Filter)

1 引 言

捷联惯导系统(SINS)以其提供导航信息的全面性和完全的自主性, 得到了广泛的应用, 但惯导误差会随着时间增长不断积累。全球卫星定位系统GPS是先进的无线电导航系统, 定位范围广、精度高, 其缺点是容易发生信号遮挡。利用SINS/GPS组合导航系统能够充分发挥这两个系统的优点, 克服它们的缺点[1]。航位推算(DR)系统和惯导系统一样具有完全的自主性, 而DR系统误差随着时间增长变化较SINS小, GPS/DR组合导航系统[2,3]也是控制导航误差的有效办法, 并且和SINS相比DR系统对惯性器件精度的要求更低。文中在SINS算法误差方程和DR误差方程的基础上, 推导了SINS/DR组合导航卡尔曼滤器的波状态方程和量测方程, 最后对SINS/DR组合导航算法进行了仿真, 得出一些有意义的结论。

2 捷联惯导系统误差

选取东-北-天(ENU)地理坐标系为导航参考坐标系, 记为 n 系, 当惯组按一定的方位安装到载车上时, 认为载车坐标系与惯组标定坐标系重合, 记为 b 系。捷联惯导系统姿态、速度和位置误差方程经过推导并整理可得[5], 姿态误差方程:

$$\dot{f} = -\omega_{in}^{n} \times f + M_2 \delta v^n + M_{13} \delta p - C_b^n \varepsilon^b \tag{1}$$

速度误差方程:

$$\delta \dot{v}^n = f^n \times f + M_4 \delta v^n + M_5 \delta p + C_b^n \nabla^b \tag{2}$$

位置误差方程:

$$\delta \dot{p} = M_6 \delta v^n + M_7 \delta p \tag{3}$$

其中:

$$\delta p = [\delta L \quad \delta \lambda \quad \delta h]^{\mathrm{T}}$$

* 收稿日期: 2005-05-24
作者简介: 严恭敏(1977—), 男, 福建建瓯人, 博士研究生, 主要研究方向: 捷联惯性导航算法、组合导航系统和信号处理。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\omega_e \sin L & 0 & 0 \\ \omega_e \cos L & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1/(R_M + h) & 0 \\ 1/(R_N + h) & 0 & 0 \\ \tan L/(R_N + h) & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v_N^n/(R_M + h)^2 \\ 0 & 0 & -v_E^n/(R_N + h)^2 \\ v_E^n \sec^2 L/(R_N + h) & 0 & -v_E^n \tan L/(R_N + h)^2 \end{bmatrix},$$

$$M_{13} = M_1 + M_3$$

$$M_4 = v^n \times M_2 - ((2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times),$$

$$M_5 = v^n \times (M_1 + M_3),$$

$$M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1/(R_M + h) & 0 \\ \sec L/(R_N + h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & v_N^n/(R_M + h)^2 \\ v_E^n \sec L/R_N + h & 0 & v_E^n \sec L/(R_N + h)^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在 M_4 中 $(\cdot \times)$ 表示向量 $\cdot$ 的反对称阵。

3　航位推算误差分析

3.1　航位推算算法

里程计坐标系记为 m 系，它的 oy 轴在和载车车轮相接触的地平面内，并且指向载车行驶正前方，oz 轴垂直于地平面向上为正，ox 轴指向右方。里程计在一小段时间 $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ 内测量的里程增量 ΔS_j 在 m 系的投影写成矢量形式为：

$$\Delta S_j^m = [0 \quad \Delta S_j \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

假设载车坐标系轴和里程计坐标系对应轴相平行，可得里程增量在导航坐标系上的投影：

$$\Delta S_j^n = C_{bj-1}^n \cdot \Delta S_j^m \tag{5}$$

其中 C_{bj-1}^n 是 t_{j-1} 时刻的姿态矩阵。

和捷联惯导位置更新算法类似，可求得航位推算的纬度、经度和高度递推算法：

$$L_{Dj} = L_{Dj-1} + \frac{\Delta S_{jN}^n}{R_M + h_{Dj-1}} \tag{6a}$$

$$\lambda_{Dj} = \lambda_{Dj-1} + \frac{\Delta S_{jE}^n \sec L_{Dj-1}}{R_N + h_{Dj-1}} \tag{6b}$$

$$h_{Dj} = h_{Dj-1} + \Delta S_{jU}^n \tag{6c}$$

3.2　航位推算误差分析

航位推算误差主要源于姿态角误差 f 和里程计刻度系数误差 δK_D，其中里程计刻度系数误差与车轮气压和路面状况等因素有关。

由里程计增量(5)式得里程计增量的实际计算公式：

$$\hat{\Delta S}_j^n = \hat{C}_{bj-1}^n \hat{\Delta S}_j^m = [I_{3\times 3} - (f_{j-1} \times)] \times C_{bj-1}^n \cdot (1 + \delta K_D) \Delta S_j^m \tag{7}$$

其中 $I_{3\times 3}$ 表示三阶单位阵，展开上式并忽略关于 f 和 δK_D 的高阶小量得：

$$\hat{\Delta S}_j^n \approx \Delta S_j^n - f_{j-1} \times \Delta S_j^n + \Delta S_j^n \delta K_D \tag{8}$$

比较(5)和(8)式可得 t_{j-1} 时刻到 t_j 时刻航位推算误差方程：

$$\delta \Delta S_j^n = \hat{\Delta S}_j^n - \Delta S_j^n = \Delta S_j^n \times f_{j-1} + \Delta S_j^n \delta K_D \tag{9}$$

此式即是航位推算的位置误差方程式，为了把位置误差表示成地理坐标的形式将(6)式微分并整理得：

$$\delta p_{Dj} = M_{D1} \delta p_{Dj-1} + M_{D2} (\Delta S_j^n \times f_{j-1} + \Delta S_j^n \delta K_D) \tag{10}$$

其中：

$$\delta p_{Dj} = [\delta L_{Dj} \quad \delta \lambda_{Dj} \quad \delta h_{Dj}]^{\mathrm{T}}, \qquad \delta p_{Dj-1} = [\delta L_{Dj-1} \quad \delta \lambda_{Dj-1} \quad \delta h_{Dj-1}]^{\mathrm{T}},$$

$$M_{D1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta S_{jN}^n/(R_M + h_{Dj-1})^2 \\ \Delta S_{jE}^n \sec L_{Dj-1} \tan L_{Dj-1}/(R_N + h_{Dj-1}) & 1 & -\Delta S_{jE}^n \sec L_{Dj-1}/(R_N + h_{Dj-1})^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{D2} = \begin{bmatrix} 0 & 1/(R_M + h_{Dj-1}) & 0 \\ \sec L_{Dj-1}/(R_N + h_{Dj-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4　建立组合导航滤波方程

4.1　状态方程的建立

(1)、(2)、(3)和(10)式就是 SINS/DR 组合导航系统的状态方程，其中捷联惯导误差方程是连续方程，而航位推算误差方程是离散方程。为了应用离散卡尔曼滤波方程，需对捷联惯导系统误差方程进行离散化，选取捷联惯导状态变量：

$$x_{NS} = [f^{\mathrm{T}} \quad \delta v^{n\mathrm{T}} \quad \delta p^{\mathrm{T}} \quad e^{b\mathrm{T}} \quad \nabla^{b\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

则捷联惯导系统误差方程如下：

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\dot{x}_{NS} = F_{NS}x_{NS} + w_{NS} \tag{11}$$

式中,

$$F_{NS} = \begin{bmatrix} -(\omega_{in}^{n}\times) & M_2 & M_{13} & -C_b^n & 0_{3\times3} \\ (f^n\times) & M_4 & M_5 & 0_{3\times3} & C_b^n \\ 0_{3\times3} & M_6 & M_7 & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \\ 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} & 0_{3\times3} \end{bmatrix}$$

$$w_{NS} = [0_{1\times9} \quad w_G^T \quad 0_{1\times3}]^T$$

$$E[w_{NS}(t)] = 0_{15\times1},$$

$$E[w_{NS}(t)w_{NS}^T(\tau)] = q_{NS}(t)\delta(t-\tau) = \mathrm{diag}[0_{9\times9} \quad q_G(t)\delta(t-\tau) \quad 0_{3\times3}]$$

其中陀螺漂移看作是马尔可夫过程, $a_G = -\mathrm{diag}[1/\tau_{Gx} \quad 1/\tau_{Gy} \quad 1/\tau_{Gz}]$, $\tau_{Gi}(i=x,y,z)$为激光陀螺的相关时间常数, $w_G = [w_{Gx} \quad w_{Gy} \quad w_{Gz}]^T$, w_{Gi}为马尔可夫过程的成型白噪声, 白噪声方差强度为 $E[w_G(t)w_G^T(\tau)] = q_G(t)\delta(t-\tau) = \mathrm{diag}[q_{Gx}^2 \quad q_{Gy}^2 \quad q_{Gz}^2]\cdot\delta(t-\tau)$, 而加速度计零偏误差当作是随机常值误差。通过典型的离散化处理得到捷联惯导离散系统误差方程:

$$x_{NS}(k) = F_{NS}(k,k-1)x_{NS}(k-1) + w_{NS}(k) \tag{12}$$

$$E[w_{NS}(k)] = 0_{15\times1}$$

$$E[w_{NS}(k)w_{NS}^T(j)] = Q_{NS}(k)\delta(k,j)$$

假设航位推算更新周期是捷联惯导更新周期的一样, 并且卡尔曼滤波周期和航位推算更新周期一致, 选取航位推算状态变量:

$$x_{DR}(k) = [\delta p_{Dk}^T \quad \delta K_D]^T$$

这里假定里程计刻度系数误差 δK_D 是随机常值误差, 所以 $E[w_{DR}(k)] = 0_{4\times1}$ $E[w_{DR}(k)w_{DR}^T(j)] = Q_{DR}(k)\delta(k,j) = 0_{4\times4}$。综合(10)式和(12)式可得SINS/DR组合导航系统的误差方程:

$$x(k) = F(k,k-1)x(k-1) + w(k) \tag{13}$$

其中:

$$F(k,k-1) = \begin{bmatrix} F_{NS}(k,k-1) & 0_{12\times4} \\ F_{NS/DR}(k,k-1) & F_{DR}(k,k-1) \end{bmatrix}$$

$$F_{NS/DR}(k,k-1) = \begin{bmatrix} M_{D2}(\Delta S_k^n\times) & 0_{3\times12} \\ 0_{1\times3} & 0_{1\times12} \end{bmatrix}$$

$$F_{DR}(k,k-1) = \begin{bmatrix} M_{D1} & M_{D2}\Delta S_k^n \\ 0_{1\times3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$x(k) = [x_{NS}^T(k) \quad x_{DR}^T(k)]^T$$

$$w(k) = [w_{NS}^T(k) \quad w_{DR}^T(k)]^T$$

$$E[w(k)] = 0_{19\times1}$$

$$E[w(k)w^T(j)] = Q(k)\delta(k,j) = \begin{bmatrix} Q_{NS}(k) & 0_{15\times4} \\ 0_{4\times15} & Q_{DR}(k) \end{bmatrix}\cdot\delta(k,j)$$

4.2 量测方程的建立

以捷联惯导位置和航位推算位置之差值作为卡尔曼滤波器的量测, 即有:

$$z(k) = p_{NS} - p_{DR} = \delta p_k - \delta p_{Dk} = H(k)x(k) + v(k) \tag{14}$$

其中:

$$H(k) = [0_{3\times6} \quad I_{3\times3} \quad 0_{3\times6} \quad -I_{3\times3} \quad 0_{3\times1}]$$

$$E[v(k)] = 0_{3\times1}$$

$$E[vw_{(}k)v^T(j)] = R(k)\delta(k,j)$$

(13)式和(14)式就是SINS/DR组合导航系统的卡尔曼滤波方程。

4.3 卡尔曼滤波算法

根据上述建立的状态方程和量测方程, 可以得到标准的卡尔曼滤波过程, 即时间传播方程:

$$\hat{x}(k|k-1) = F(k,k-1)\hat{x}(k-1) \tag{15a}$$

$$F(k|k-1) = F(k,k-1)P(k-1)\times F^T(k,k-1) + Q(k-1) \tag{15b}$$

和量测更新方程:

$$K(k) = P(k|k-1)H^T(k)[H(k)\times P(k|k-1)H^T(k) + R(k)]^{-1} \tag{15c}$$

$$\hat{x}(k) = \hat{x}(k|k-1) + K(k)[z(k) - H(k)\hat{x}(k|k-1)] \tag{15d}$$

$$P(k) = [I - K(k)H(k)]P(k|k-1) \tag{15e}$$

5 仿真和结论

通过编写轨迹发生器、捷联惯导算法、航位推算算法和卡尔曼滤波组合导航算法, 对捷联惯导、航位推算和SINS/DR组合导航进行了仿真, 主要是对航位推算定位误差和SINS/DR组合导航定位误差作了比较。有关误差源设定如下: 激光陀螺漂移为0.03°/h; 加速度计零偏为1.5×10^{-4}g; 里程计刻度系数误差为0.5%; 初始经纬度误差均为20m、高度误差为10m; 惯导初始对准水平姿态角误差0.7′, 航向角误差10′。仿真时间2h, 总行程约80km, 行驶最大时速达70km, 仿真结果见图(1)和图(2), 其中图(1)为航位推算位置误差, 图(2) SINS/DR组合导航位置误差(实线为纬度误差, 虚线为经度误差, 点画线为高度误差)。

从仿真中可以得出以下结论:

(1) 位置误差随着载车行驶距离增长, 但组合导航位置误差小于航位推算位置误差。若不考

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

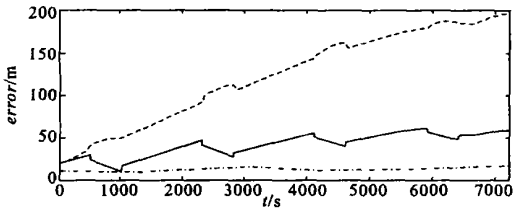


图 1　航位推算位置误差

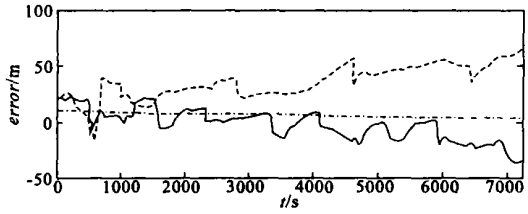


图 2　SINS/DR 组合导航位置误差

虑里程计刻度系数误差的影响, 航位推算位置误差主要取决于初始航向角的对准精度, 而在组合导航系统中航向角误差能被部分估计出来并得到补偿, 所以组合导航位置误差较小。

(2) 航位推算和组合导航两种算法中高度误差都较小。通常水平姿态角误差都很小(一般总小于航向角误差), 所以高度误差总小于经纬度误差。

(3) 和 SINS/GPS 组合导航系统相比 SINS/DR 组合导航系统定位误差是有偏的。

(4) 惯导系统定位误差随着时间不断增长, 而航位推算系统定位误差主要随着载车行程增长, 所以 SINS/DR 组合系统定位精度在一定程度上取决于航位推算的精度。

[参　考　文　献]

[1] 李涛, 吴美平, 江明, 庹洲慧. 激光陀螺 SINS/GPS 组合导航车载试验系统[J]. 国防科技大学学报, 2003, 25(3): 104- 108.

[2] 吴秋平, 万德钧, 徐晓苏, 房建成. 车载 GPS/DR 组合导航系统的研究及其滤波算法[J]. 东南大学学报, 1997, 27(2): 55- 59.

[3] Kao W W. Integration of GPS and dead-reckoning navigation systems[A]. Proceedings of IEEE/IEE Vehicle Navigation Systems Conference[C]. Society of Automotive Engineering, 1991: 635- 643.

[4] 朱庄生, 万德钧, 王庆. 航位推算累计误差实时修正算法研究[J]. 中国惯性技术学报, 2003, 11(3): 7- 11.

[5] 严恭敏. 捷联惯导算法及车载组和导航系统研究[D]. 西安: 西北工业大学自动化学院, 2004.

[6] Mar J, Leu J H. Simulation of the positioning accuracy of integrated vehicular navigation systems[D]. IEE Proc: Radar, Sonar Navig, 1996, 143(2): 121- 128.

(上接第 12 页)

$$K = \begin{bmatrix} -1.61 & 5 & 0.31 & -1.57 \\ -1.07 & 6.56 & 1.56 & -1.16 \end{bmatrix}$$

具体的仿真结果如图 2 所示, 其中: 细实线表示反馈后的飞行器噪声响应曲线, 粗虚线表示没有反馈的飞行器噪声响应曲线。由图可知: 反馈后的系统对系统噪声和外界干扰都能较好的抑制, 同时还有较好的鲁棒性能。

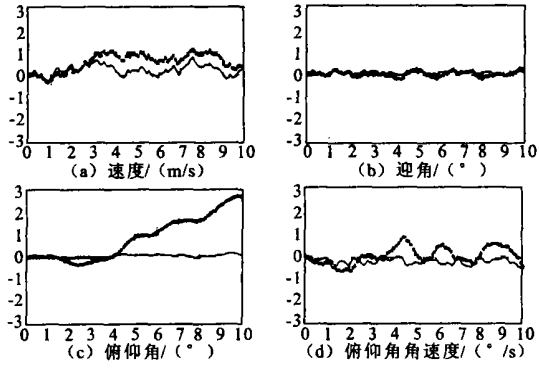


图 2　纵向控制系统干扰响应曲线

5　结论

把 H_2/H_∞ 控制方法, 应用于飞行器控制系统的设计, 使飞行器运动系统在具有较大的鲁棒稳定性的同时又有较好的噪声抑制性能。文中利用 LMI 方法求解, 避开了求解耦合的两个 Riccati 方程, 虽然在计算中引进了约束条件(4), 引入了一定的保守性, 但换来了计算的方便和有效。在某飞行器纵向运动控制系统中的应用表明: 混合控制方法是实用的、有效的, 对提高飞行器控制性能有一定的作用。

[参　考　文　献]

[1] M. B. Subrahmanyam, Design of F/A-18A Automatic Carrier Landing System Control, Journal of Guidance Control, and Dynamics[J]. 1994, 17(1) 187- 191.

[2] Shy-Pyng Shue, Ramesh K. Agrwal Design of Automatic Landing Systems Using Mixed Control, Journal of Guidance Control, and Dynamics[J]. 1999, 22 (1) 103- 114.

[3] 俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.

[4] 吕学富, 等. 飞行器飞行力学[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1995.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

捷联惯组中陀螺组合标定方法研究*

严恭敏，秦永元

（西北工业大学自动化学院，西安 710072）

[摘要] 捷联惯组(SIMU)标定是惯性导航的前提，标定结果的好坏将对惯性导航精度产生直接的影响。利用方向余弦法推导了陀螺组合的标定模型，在使用位置转台和没有精确的北向参考基准情况下，阐述了提高陀螺组合标定精度的方法，这些方法的核心是尽量减小或估计出地球自转运动的影响。最后对各标定方法实用性进行了简要分析和比较。

[关键词] 捷联惯组；标定；姿态更新；误差补偿

[中图分类号] V241.5 [文献标识码] A

A Study Of Gyro Calibration In Strapdown Inertial Measurement Unit

YAN Gong-min, QIN Yong-yuan

(Department of Automation Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Inertial Navigation with Strapdown Inertial Measurement Unit(SIMU) is based on the calibration of SIMU. The calibration results have a strong impact on inertial navigation accuracy. In this paper, gyro calibration model was proposed using direction cosine matrix method. Approaches of improving the precision of gyro calibration were discussed with position turntable and without precise north reference datum. The most important part of improving the calibration precision was to reduce or estimate the influence of earth rotation. Finally the applicability of each calibration method was analyzed in brief.

Keywords: SIMU; calibration; attitude updating; error compensation

1 引言

捷联惯组(SIMU)标定是惯性导航的前提，标定结果的好坏将对惯性导航精度产生直接的影响。在惯性技术应用中，重力加速度和地球自转角速率有时可以作为精确的自然参考量，有时可能是有害的干扰量。作为线运动和角运动的传感器，通常 SIMU 设计时加速度计的灵敏度(加速度计零偏和重力加速度之比)要比陀螺的灵敏度(陀螺漂移和地球自转角速率之比)高一个数量级以上，前者往往具有更高的标定精度。在加速度计组合标定中，通常以重力加速作为参考量，利用静态位置法，容易得到较高精度的标定结果[1]；而在陀螺组合标定中，由于地球自转角速率太小不能作为陀螺标定的参考量，通常利用转台转动的办法进行标定，这时地球自转角速率看作是陀螺标定的干扰项，要提高陀螺标定精度就必须尽量减小或消除地球自转的影响。高精度的速率转台和精确的北向参考基准有利于提高陀螺标定精度，并且借助于速率转台能够对 SIMU 作多方位的测试[2]，但是一般实验室不具备这些条件。文中首先利用方向余弦法推导了陀螺组合的标定模型。其次在使用位置转台和没有精确的北向参考基准情况下，阐述了提高陀螺组合标定精度的方法，这些方法的核心是尽量减小或估计出地球自转运动的影响。最后对各标定方法实用性进行了简要分析和比较。

2 陀螺标定基本原理

选取东北天(ENU)地理坐标系为 $ox_ny_nz_n$，

* 收稿日期：2005－07－18

作者简介：严恭敏(1977－)，男，福建建瓯人，博士研究生，研究方向：捷联惯性导航算法、组合导航系统和信号处理。

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

记为 n 系；SIMU 坐标系为 $ox_by_bz_b$，记为 b 系，文中假定 b 系坐标轴和试验转台台面坐标系对应坐标轴重合安装，即 b 系也就是台面坐标系；假设在 SIMU 中陀螺为无冗余安装，陀螺组合的敏感轴坐标系为 $ox_gy_gz_g$，记为 g 系，由于三个陀螺敏感轴难以实现完全相互垂直安装，所以 g 系不是正交坐标系。g 系和 b 系同名坐标轴之间的夹角为陀螺安装误差角，通常安装误差角均为小角度。SIMU 标定的目标就是利用安装在 g 系中的陀螺实现 b 系转动角度的测量。设单个陀螺输入输出关系(这里不考虑陀螺横侧向效应的影响)：

$$\Omega_i^g = K_{gi} \cdot N_{gi} + T\varepsilon_i^g \qquad (i = x,y,z) \tag{1}$$

式中 Ω_i^g 为沿 oi_g 轴的角度输入，N_{gi} 为陀螺的脉冲输出，K_{gi} 为陀螺的脉冲当量，ε_i^g 为陀螺漂移，T 为陀螺采样间隔，则陀螺组合的输入输出关系写成矢量形式：

$$\boldsymbol{\Omega}^g = [\boldsymbol{K}_g \cdot \boldsymbol{N}_g] + T\boldsymbol{\varepsilon}^g \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}^g = \begin{bmatrix}\Omega_x^g \\ \Omega_y^g \\ \Omega_z^g\end{bmatrix}$；$[\boldsymbol{K}_g \cdot \boldsymbol{N}_g] = \begin{bmatrix}K_{gx} \cdot N_{gx} \\ K_{gy} \cdot N_{gy} \\ K_{gz} \cdot N_{gz}\end{bmatrix}$；

$\boldsymbol{\varepsilon}^g = \begin{bmatrix}\varepsilon_x^g \\ \varepsilon_y^g \\ \varepsilon_z^g\end{bmatrix}$

用 $\boldsymbol{i}_g$、$\boldsymbol{j}_g$、$\boldsymbol{k}_g$ 表示沿 g 系轴向的单位矢量，用 $\boldsymbol{i}_b$、$\boldsymbol{j}_b$、$\boldsymbol{k}_b$ 表示沿 b 系轴向的单位矢量，则 $\boldsymbol{i}_g$ 在 b 系内的方位可以由 $\boldsymbol{i}_g$ 的三个方向余弦来确定，即：

$$\boldsymbol{i}_g = (\boldsymbol{i}_g \cdot \boldsymbol{i}_b)\boldsymbol{i}_b + (\boldsymbol{i}_g \cdot \boldsymbol{j}_b)\boldsymbol{j}_b + (\boldsymbol{i}_g \cdot \boldsymbol{k}_b)\boldsymbol{k}_b$$

同理有：

$$\boldsymbol{j}_g = (\boldsymbol{j}_g \cdot \boldsymbol{i}_b)\boldsymbol{i}_b + (\boldsymbol{j}_g \cdot \boldsymbol{j}_b)\boldsymbol{j}_b + (\boldsymbol{j}_g \cdot \boldsymbol{k}_b)\boldsymbol{k}_b$$

$$\boldsymbol{k}_g = (\boldsymbol{k}_g \cdot \boldsymbol{i}_b)\boldsymbol{i}_b + (\boldsymbol{k}_g \cdot \boldsymbol{j}_b)\boldsymbol{j}_b + (\boldsymbol{k}_g \cdot \boldsymbol{k}_b)\boldsymbol{k}_b$$

以上三式写成矩阵形式，可得从 b 系到 g 系的转换关系，用方向余弦阵表示为：

$$\boldsymbol{C}_b^g = \begin{bmatrix}\boldsymbol{i}_g \cdot \boldsymbol{i}_b & \boldsymbol{i}_g \cdot \boldsymbol{j}_b & \boldsymbol{i}_g \cdot \boldsymbol{k}_b \\ \boldsymbol{j}_g \cdot \boldsymbol{i}_b & \boldsymbol{j}_g \cdot \boldsymbol{j}_b & \boldsymbol{j}_g \cdot \boldsymbol{k}_b \\ \boldsymbol{k}_g \cdot \boldsymbol{i}_b & \boldsymbol{k}_g \cdot \boldsymbol{j}_b & \boldsymbol{k}_g \cdot \boldsymbol{k}_b\end{bmatrix} \tag{3}$$

由于 g 系不是正交坐标系，因而 $\boldsymbol{C}_b^g$ 不是正交矩阵，但是因为 b 系是正交坐标系，所以 $\boldsymbol{C}_b^g$ 中的每一个行向量都是单位向量。记 $\boldsymbol{C}_g^b = (\boldsymbol{C}_b^g)^{-1}$，如果陀螺安装误差角很小则 $\boldsymbol{C}_g^b$ 接近于单位矩阵。将(2)式两边乘以 $\boldsymbol{C}_g^b$ 得：

$$\boldsymbol{C}_g^b\boldsymbol{\Omega}^g = \boldsymbol{C}_g^b[\boldsymbol{K}_g \cdot \boldsymbol{N}_g] + T\boldsymbol{C}_g^b\boldsymbol{\varepsilon}^g$$

简记为：

$$\boldsymbol{\Omega}^b = \boldsymbol{K}_g \cdot \boldsymbol{N}_g + T\boldsymbol{\varepsilon}^b \tag{4}$$

其中：

$\boldsymbol{K}_g = \begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_g^b(1,1)K_{gx} & \boldsymbol{C}_g^b(1,2)K_{gy} & \boldsymbol{C}_g^b(1,3)K_{gz} \\ \boldsymbol{C}_g^b(2,1)K_{gx} & \boldsymbol{C}_g^b(2,2)K_{gy} & \boldsymbol{C}_g^b(2,3)K_{gz} \\ \boldsymbol{C}_g^b(3,1)K_{gx} & \boldsymbol{C}_g^b(3,2)K_{gy} & \boldsymbol{C}_g^b(3,3)K_{gz}\end{bmatrix}$ 为陀螺刻度矩阵；

$\boldsymbol{\Omega}^b = \boldsymbol{C}_g^b\boldsymbol{O}^g$；$\boldsymbol{N}_g = [N_{gx} \quad N_{gy} \quad N_{gz}]^T$；$\boldsymbol{\varepsilon}^b = \boldsymbol{C}_g^b\boldsymbol{\varepsilon}^g$ 为陀螺等效漂移，上式就是陀螺组合的标定数学模型。利用转台转动角位置进行标定，$\boldsymbol{\Omega}^b$ 和 $\boldsymbol{N}_g$ 是已知的，只要三个陀螺敏感轴不是共面安装，在(4)式 $\boldsymbol{K}_g$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}^b$ 中共有 12 个独立未知参数，因此最少用四组不相关的角位置试验就能标出这些未知参数，多于四组试验时可用最小二乘法求得这些参数。

3　陀螺标定试验方法

通常陀螺漂移很小(远小于地球自转角速率)，并且标定中转台转动时间短，因此陀螺刻度矩阵和陀螺等效漂移可以分开标定，即首先不考虑陀螺漂移的影响在转台转动试验中对陀螺刻度矩阵进行标定，其次得到刻度矩阵之后利用双位置对准原理标定陀螺等效漂移[3](文中主要叙述对刻度矩阵的标定)。在(4)式中 $\boldsymbol{\Omega}^b$ 表示的是试验转台相对于惯性空间转过的角度，而转台读数是试验转台相对于地理坐标系的转动角度，要得到高精度的标定结果，就必须考虑到地球自转运动的影响。

3.1　有地球自转轴参考基准

为了消除地球自转的影响，原理上最简单的办法是获得地球自转轴参考基准，使转台某一转动轴和地球自转轴平行，当绕该转动轴转动一个角度时，试验转台相对于惯性空间转过的角度可由转台读数和相应时间内地球自转角度求出，而转台其它两个坐标轴的转动角度均为零。例如，使 ox_b 轴和地球自转轴平行绕其转动 360° 用时 t_x、使 oy_b 轴和地球自转轴平行绕其转动 360° 用时 t_y、使 oz_b 轴和地球自转轴平行绕其转动 360° 用时 t_z，则列出如下方程即可求得陀螺刻度矩阵：

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\begin{cases}[2\pi + t_x\omega_e \quad 0 \quad 0]^T = \boldsymbol{K}_g \cdot \boldsymbol{N}_g(x360+) \\ [0 \quad 2\pi + t_y\omega_e \quad 0]^T = \boldsymbol{K}_g \cdot \boldsymbol{N}_g(y360+) \\ [0 \quad 0 \quad 2\pi + t_z\omega_e]^T = \boldsymbol{K}_g \cdot \boldsymbol{N}_g(z360+)\end{cases} \quad (5)$$

式中 ω_e 是地球自转角速率。假设转台转动一周时间约为 $t = 60$s，如果没有考虑到地球自转的影响，则由此造成刻度误差最大约为 $t\omega_e/2\pi \approx 700PPM$，由此可见该误差在中等精度 SIMU 标定中是不容忽视的。

3.2 无北向基准，做正反转试验

当不能使转台转动轴和地球自转轴平行（甚至没有北向参考基准可用），并且转台转动角速率不均匀时，就难以实现试验转台转动角速度和地球自转角速度的合成（因为当转台转动轴和地球自转轴不平行，转台不是均匀转动时，转台相对惯性空间转动就不是定轴转动），因此无法得到陀螺组合标定的精确转动角度。但是通常地球自转角速率和转台转动角速率相比很小（例如当转台转动角速率为 15°/s 而地球自转角速率为 15°/h 时，前者和后者相差 3600 倍），因而可以忽略转动非定轴性的影响，通过正反转试验能尽量减小地球自转带来的误差，即取正反试验陀螺脉冲输出的平均值作为输出，当转台绕某一轴转动的正转起点和反转终点、正转终点和反转起点一致，并且转动过程中转动速率基本均匀、正反转转动时间大致相同时，大部分地球自转的影响可以被消除。例如有如下试验：绕 oz_b 正反转 360°、绕 ox_b 轴正反转 360°、绕 oy_b 轴正反转 360°，即可写出如下方程组求得陀螺刻度矩阵：

$$\begin{cases}[2\pi \quad 0 \quad 0]^T = \boldsymbol{K}_g \cdot [\boldsymbol{N}_g(x360+) - \boldsymbol{N}_g(x360-)]/2 \\ [0 \quad 2\pi \quad 0]^T = \boldsymbol{K}_g \cdot [\boldsymbol{N}_g(y360+) - \boldsymbol{N}_g(y360-)]/2 \\ [0 \quad 0 \quad 2\pi]^T = \boldsymbol{K}_g \cdot [\boldsymbol{N}_g(z360+) - \boldsymbol{N}_g(z360-)]/2\end{cases} \quad (6)$$

3.3 估计地球自转补偿量

在方法 3.2 中要求转台正转起点和反转终点、正转终点和反转起点一致，并且转动过程中转动速率基本均匀、正反转转动时间大致相同。另外利用惯组自身量测也可估计出地球自转补偿量，达到单次转动试验减弱地球自转影响的目的。例如初始时转台 ox_b 和 oy_b 轴水平且 oz_b 轴竖直向上，当陀螺安装误差角很小时，绕三轴分别转动 360° 忽略地球转动影响由(5)式可粗略求得三个陀螺的脉冲当量，并且可利用惯导初始粗对准原理求得转台初始时北向偏差角（即航向角）。其中绕 oz_b 轴转动的地球自转补偿量可以这样求得：假设初始航向角为 ψ_0，转动过程中 oz_g 轴陀螺累计输出脉冲为 $N_y(t_k)$，则实时航向角 $\psi(t) = \psi_0 + K_{gz}N_y(t_k)$，由实时航向角得到姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_b^n(t_k)$，进而得到实时地球自转角速度补偿：

$$\boldsymbol{\omega}_z(t_k) = \boldsymbol{C}_n^b(t_k)\boldsymbol{\omega}_e^n \quad (7)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_e^n = [0 \quad \omega_e\cos L \quad \omega_e\sin L]^T$、$L$ 为当地地球纬度，在转台转动时间 0－T 内对(7)式求和得地球自转补偿量：

$$\delta\Omega_z = \sum_{t_k=0}^{T}\boldsymbol{C}_n^b(t_k)\boldsymbol{\omega}_e^n T_s \quad (8)$$

其中 T_s 为陀螺采样周期，至此得到绕 oz_b 轴转动的一组标定方程：

$$[0 \quad 0 \quad 2\pi]^T + \delta\Omega_z = \boldsymbol{K}_g \cdot \boldsymbol{N}_g(z360+) \quad (9)$$

同理当绕 ox_b 和 oy_b 轴转动时可得到其它两组标定方程：

$$[2\pi \quad 0 \quad 0]^T + \delta\Omega_x = \boldsymbol{K}_g \cdot \boldsymbol{N}_g(x360+) \quad (10)$$

$$[0 \quad 2\pi \quad 0]^T + \delta\Omega_y = \boldsymbol{K}_g \cdot \boldsymbol{N}_g(y360+) \quad (11)$$

3.4 利用捷联惯导姿态更新算法

利用捷联惯导姿态更新算法实现陀螺组合标定，只要绕三轴各转一次，各转动起止角度准确已知，而无严格转动过程要求，该方法将地球自转运动的补偿蕴含在姿态更新算法中。标定过程可分两个步骤：首先是不考虑地球自转影响对刻度矩阵 $\boldsymbol{K}_g$ 进行初步标定（刻度粗标）并进行粗略寻北计算；其次是利用捷联惯导姿态更新算法（速度和位置不更新），对刻度矩阵进行细调（刻度细调），使得转台转动后姿态角误差变化很小。以下分析如何进行刻度细调。

捷联惯导姿态误差方程[4]：

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} = -\boldsymbol{\omega}_{in}^n \times \boldsymbol{\varphi} + \delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n - \delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^n \quad (12)$$

其中 $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^n = \boldsymbol{C}_b^n\delta\boldsymbol{K}_g(\boldsymbol{\omega}_{in}^b + \boldsymbol{\omega}_{ib}^b) + \boldsymbol{\varepsilon}^n$，当陀螺漂移较小时忽略其影响，并且在转台转动时地球自转角速率和转台转动角速率相比很小，近似有 $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^n =$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\boldsymbol{C}_b^n\delta\boldsymbol{K}_g\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$；在姿态更新标定算法中地理位置准确已知并且惯导速度为零，因而 $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n=0$；若水平姿态误差角很小并且航向误差角也不大，刻度粗标后 $\boldsymbol{\omega}_{in}^n\times\varphi$ 和 $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^n$ 相比，后者远大于前者，所以近似有：

$$\dot{\varphi}\approx-\boldsymbol{C}_b^n\delta\boldsymbol{K}_g\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \tag{13}$$

如果转台 ox_b 和 oy_b 轴水平绕 oz_b 轴转动，则有：

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b=[0\quad 0\quad \omega_z]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{C}_b^n=\begin{bmatrix}\cos\psi & -\sin\psi & 0\\ \sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix};$$

$$\delta\boldsymbol{K}_g=\begin{bmatrix}\delta K_{gxx} & \delta K_{gxy} & \delta K_{gxz}\\ \delta K_{gyx} & \delta K_{gyy} & \delta K_{gyz}\\ \delta K_{gzx} & \delta K_{gzy} & \delta K_{gzz}\end{bmatrix}$$

代入(13)式得：

$$\dot{\varphi}\approx-\omega_z\cdot\begin{bmatrix}\delta K_{gxz}\cos\psi-\delta K_{gyz}\sin\psi\\ \delta K_{gxz}\sin\psi+\delta K_{gyz}\cos\psi\\ \delta K_{gzz}\end{bmatrix} \tag{14}$$

不妨设绕 oz_b 轴转动是匀速的，转动起止航向角为 ψ_0 和 ψ_1，计算如下转动的积分：

$$\int_{t_0}^{t_1}\omega_z\cos\psi\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\cos(\psi_0+\omega_z t)\mathrm{d}\omega_z t=\sin\psi_1-\sin\psi_0 \tag{15}$$

积分(15)式说明转动积分只和转动起止角度有关，而与转动快慢无关。所以由(14)式可得：

$$\begin{bmatrix}\Delta\varphi_E\\ \Delta\varphi_N\\ \Delta\varphi_U\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\delta K_{gxz}(\sin\psi_1-\sin\psi_0)+\delta K_{gyz}(\cos\psi_1-\cos\psi_0)\\ -\delta K_{gxz}(\cos\psi_1-\cos\psi_0)+\delta K_{gyz}(\sin\psi_1-\sin\psi_0)\\ \delta K_{gzz}(\psi_1-\psi_0)\end{bmatrix} \tag{16}$$

以下就(16)式讨论，得出一些重要结论：

① 当 $\psi_1=\psi_0\pm2\pi$ 时(16)式可简写为：

$$[\Delta\varphi_E\quad\Delta\varphi_N\quad\Delta\varphi_U]^{\mathrm{T}}=-[0\quad 0\quad 2\pi\delta K_{gzz}]^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

即当绕 oz_b 轴转动一圈时东向和北向姿态误差角不变，而航向角误差正比于 δK_{gzz}；

② 当 $\psi_1=\psi_0\pm\pi$ 时(16)式可化简为：

$$\begin{bmatrix}\Delta\varphi_E\\ \Delta\varphi_M\\ \Delta\varphi_U\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\delta K_{gxz}\sin\psi_0+2\delta K_{gyz}\cos\psi_0\\ -2\delta K_{gxz}\cos\psi_0+2\delta K_{gyz}\sin\psi_0\\ \pi\delta K_{gzz}\end{bmatrix} \tag{12}$$

进一步若起始航向角 $\psi_0=0$，可解得刻度误差：

$$[\delta K_{gxz}\quad\delta K_{gyz}\quad\delta K_{gzz}]^{\mathrm{T}}=[-\Delta\varphi_N/2\quad\Delta\varphi_E/2\quad\Delta\varphi/\pi]^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

③ 当航向起止角不是特殊角度时可由(16)式解得刻度误差：

$$\begin{cases}\delta K_{gxz}=-\dfrac{\Delta\varphi_E(\sin\psi_1-\sin\psi_0)-\Delta\varphi_N(\cos\psi_1-\cos\psi_0)}{2-2\cos(\psi_1-\psi_0)}\\ \delta K_{gyz}=-\dfrac{\Delta\varphi_E(\cos\psi_1-\cos\psi_0)+\Delta\varphi_N(\sin\psi_1-\sin\psi_0)}{2-2\cos(\psi_1-\psi_0)}\\ \delta K_{gzz}=\dfrac{\Delta\varphi_U}{\psi_1-\psi_0}\end{cases} \tag{20}$$

同理当转台绕 ox_b 或 oy_b 轴转动时可求得刻度误差其它元素的修正值。以上分析的就是姿态更新算法中刻度细调的依据。

4　结论

从陀螺标定试验方法 3.1 中可看出地球自转对陀螺组合标定的影响；方法 3.2 原理简单，无需寻北计算，但是手动转动位置转台时难以实现匀速转动(尤其是转动终止时要进行转台微调)，陀螺组合标定效果主要取决于试验操作精度；方法 3.3 通过简单的计算方法估计出地球自转的补偿量，提高寻北精度能得到较好的陀螺组合标定结果；利用方法 3.4 标定比较繁琐，在该方法推导中得到了一些有关姿态误差角变化的规律。

[参　考　文　献]

[1] 顾冬晴，秦永元，严恭敏. 基于多元回归模型的捷联惯性测量组件标定技术[J]. 测控技术，2005，3：59－61.

[2] 梅硕基. 惯性仪器测试与数据分析[M]. 西安：西北工业大学出版社，1991.

[3] 缪玲娟，田海. 车载激光捷联惯导系统的快速初始对准及误差分析[J]. 北京理工大学学报，2002，2：205－209.

[4] 袁信，郑谔编. 捷联式惯性导航原理[M]. 北京：航空专业教材编审组，1985.

[5] Paul G. Savage. Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 1：Attitude Algorithms[J]. Journal of Guidance，Control，and Dynamics，1998，21(2)：19－28.

[6] 林玉荣，邓正荣. 激光陀螺捷联惯导系统中惯性器件误差的系统级标定[J]. 哈尔滨工业大学学报. 2001，2：112－115.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Novel Approach to In-Flight Alignment of Micro-Mechanical SINS/ GPS with Heading Uncertainty

*YAN Gong-min** , *QIN Yong-yuan*

(Department of Automatic Control , Northwestern Polytechnical University , Xi'an 710072 , China)

Abstract : The paper presents a novel approach to in-flight alignment algorithm for a Strapdown Inertial Navigation System (SINS) with heading uncertainty. To handle large heading error during the short-time alignment course , the estimate of large heading error is converted into the estimate of two trigonometric variables. In this algorithm a linear Kalman filter is introduced. The simulation results show that the vehicle heading uncertainty is solved to about 3 °(1σ) within 20 s.

Key words : SINS ; SINS/ GPS integrated navigation system ; initial alignment ; Kalman filtering

EEACC : 7630

低精度的 SINS/ GPS 组合导航系统中初始航向对准技术

严恭敏* ,秦永元

(西北工业大学自动化学院 ,西安 710072)

摘 要 :低精度的捷联惯导系统(SINS)无法实现航向自对准 ,用于初始航向对准的 SINS/ GPS 组合系统是强非线性系统. 通过变换估计量的方法 ,将航向角的估计转换为两个三角函数变量的估计 ,在大航向角误差的条件下忽略了大部分次要因素的影响 ,推导了用于初始航向角估计的 SINS/ GPS 组合系统方程. 最后进行了航向角对准仿真 ,结果表明 :在初始航向角完全未知的情况下 ,载体经过短时间(20s)的机动 ,航向角的估计精度能达到 3 °左右.

关键词 :捷联惯导系统 ; SINS/ GPS 组合导航系统 ;初始对准 ;卡尔曼滤波

中图分类号 : V249. 3 **文献标识码 :** A **文章编号 :** 1004-1699(2007) 01-0237-05

In the applications of median or high-accuracy strapdown inertial navigation system (SINS) , autonomous initial alignment is accomplished by the sensor measurements of local gravity and the earth rate[1] . However , in low-accuracy SINS case , such as micro-mechanical inertial measurement unit (MMIMU) , as the performance of gyro is not sensitive to the earth rate , initial alignment can't be achieved despite of the leveling angle obtained by accelerometers. Generally , a magnetic compass is used to determine the bearing of the vehicle in the application of MMIMU[2] .

The SINS/ GPS integrated navigation system has capability to obtain initial yaw angle when the vehicle is in-motion[3] . As the linearization condition must be met in extended Kalman filter (EKF)[4] , small attitude error is required in the classic SINS/ GPS integrated algorithm. Unfortunately , the SINS error model for large heading error is strongly nonlinear. The nonlinear theory , such as unscented Kalman filter (UKF)[5] , is an effective choice to solve nonlinear problems. Usually , the deducing of nonlinear model tends to be quite complex and the algorithm calculation burden is huge in contrary to that of EKF. Up to date , how to solve strongly nonlinear problems remains to be interesting to many researchers.

In low-accuracy SINS initial alignment , the leveling angle errors will diminish to small values , but the yaw angle is completely uncertainty. In this paper , a

收稿日期 :2006-01-17 **修改日期** :2006-02-24

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

novel method is proposed to solve the heading uncertainty. The estimate of heading error is transformed to the estimate of two trigonometric variables. When neglecting mostly of the subordinate affects, a linear SINS/ GPS integrated Kalman filter initial alignment model is deduced. Simulations are carried out to validate the performance of the proposed alignment algorithm. The simulation results show that when vehicle maneuvers in a very short time of about 20 s the heading error decreases from heading uncertainty to about 3 °(1σ). The method presented in this paper is more effective and the vehicular maneuver is easier to realize in contrary to that of document[6]. After the proposed coarse heading alignment, the requirement of heading misalignment angle being small is satisfied, and a classic lineal SINS/ GPS Kalman filter will be applied to the navigation system.

This paper is arranged as follows. In section 2 the SINS dynamic error model for heading uncertainty is presented. Section 3 addresses the design of Kalman filter, including state-space dynamic model, measurement model and error compensation algorithms. Section 4 contains the simulation results. Then, in section 5 some conclusions are drawn.

1 SINS error model for large heading uncertainty

1.1 SINS navigator model

The coordinate systems used in this paper are as follows.

The inertial frame is denoted as *i* frame, with the center of the earth as the origin.

The earth-fixed frame (*e* frame) coincides with the *i* frame at the origin but it rotates with the earth rate.

North-East-Up frame is selected as navigation frame (*n* frame).

The local frame (*h* frame) is a local level frame that rotates with heading angle ψ from the n frame. Figure 1 is the relation between *n* frame and *h* frame.

The vehicular frame is denoted as *b* frame.

The dynamic equations of the attitude, velocity and position of SINS are summarized as

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \Omega_{nb}^b \tag{1}$$

$$\dot{V}^n = C_b^n f^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \times V^n + g^n \tag{2}$$

$$\dot{L} = V_N^n / (R_e + h), \dot{\lambda} = V_E^n / [(R_e + h)\cos L], \dot{h} = V_U^n \tag{3}$$

where

C_b^n is the body-to-navigation direction cosine matrix (DCM), referred to as attitude matrix.

V^n is the velocity of the vehicle in the *n* frame.

L, λ and h are latitude, longitude and height of the vehicle respectively.

Ω_{xy} is skew-symmetric matrix for the rate ω_{xy}. The skew-symmetric matrix can be also denoted as $\Omega_{xy} = (\omega_{xy}^p \times)$.

f^b is the specific force measured at the accelerometer.

$\omega_{ie}^n = [0 \quad \omega_e \cos L \quad \omega_e \sin L]^T$ is the earth rate in the *n* frame and ω_e is the magnitude of the earth rate.

$\omega_{en}^n = [-\dot{L} \quad \dot{\lambda}\cos L \quad \dot{\lambda}\sin L]^T$ is the rate of the *n* frame relative to the *e* frame.

$g^n = [0 \quad 0 \quad -g]^T$ is gravity vector resolved in the *n* frame and *g* is the magnitude of local gravity.

R_e is the radius of the earth. In this paper, the earth is approximated as a round body.

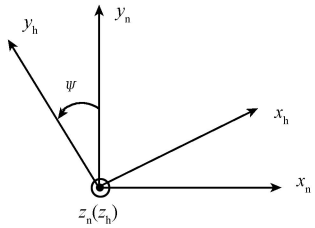


Fig 1 The relation between n frame and h frame

1.2 Large heading error dynamic model

Define C_h^n as the DCM from the *h* frame to the *n* frame and C_b^h as the DCM from the *b* frame to the *h* frame, then the attitude matrix C_b^n can be divided into two parts as

$$C_b^n = C_h^n C_b^h, \quad C_h^n = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

The calculation errors of the DCM are defined as

$$\delta C_b^n = \tilde{C}_b^n - C_b^n \tag{5}$$

$$E = \delta C_h^n = \tilde{C}_h^n - C_h^n \tag{6}$$

$$\delta C_b^h = \tilde{C}_b^h - C_b^h \tag{7}$$

Suppose the heading error to be $\delta\psi$, and define the following equations

$$\sin(\psi + \delta\psi) - \sin\psi = \delta\psi, \cos(\psi + \delta\psi) - \cos\psi = \delta\psi \tag{8}$$

By (8), the estimation of real yaw angle ψ is transformed to the estimates of $\delta\psi$ and $\delta\psi$. Inserting (4) and (8) into (6), the error matrix E is written as

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$E = C_h^n - C_h^n = \begin{bmatrix} \cos(\psi+\delta\psi) & \sin(\psi+\delta\psi) & 0 \\ -\sin(\psi+\delta\psi) & \cos(\psi+\delta\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\psi_c & \delta\psi_s & 0 \\ -\delta\psi_s & \delta\psi_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

The error matrix δC_b^h is determined by pitch error angle $\delta\theta$ and roll error angle $\delta\gamma$. When the two leveling error angles are small, δC_b^h can be approximated as

$$\delta C_b^h = -(\vartheta\times) C_b^h \quad or \quad C_b^h = (I-(\vartheta\times)) C_b^h \tag{10}$$

where $\vartheta = [\delta\theta \quad \delta\gamma \quad 0]^T$.

Expanding the attitude error matrix equation (5) by inserted (9) and (10), yields

$$\begin{aligned} \delta C_b^n &= C_b^n - C_b^n = C_h^n C_b^h - C_b^n \\ &= (C_h^n + E)(I-(\vartheta\times)) C_b^h - C_b^n \\ &= [E-(C_h^n+E)(\vartheta\times)] C_b^h \end{aligned} \tag{11}$$

As the leveling error angles are assumed to be all small, neglect the term $(\vartheta\times)$ in the above equation and induce (12)

$$\delta C_b^n \approx E C_b^h \tag{12}$$

By differentiating (12), the differential equation of the attitude errors is obtained as

$$\delta\dot{C}_b^n = \dot{E}C_b^h + E\dot{C}_b^h = \dot{E}C_b^h + EC_b^h\Omega_{hb}^b = (\dot{E}+E\Omega_{hb}^h) C_b^h \tag{13}$$

On the other hand, we can derive another differential equation (12) by differentiating (5).

$$\begin{aligned} \delta\dot{C}_b^n &= \dot{C}_b^n - \dot{C}_b^n = C_b^n\Omega_{nb}^b - C_b^n\Omega_{nb}^b \\ &= (C_b^n + EC_b^h)(\Omega_{nb}^b + \delta\Omega_{nb}^b) - C_b^n\Omega_{nb}^b \\ &= EC_b^h\Omega_{nb}^b + (C_b^n + EC_b^h)\delta\Omega_{nb}^b \end{aligned} \tag{14}$$

If the measurement error $\delta\Omega_{nb}^b$ from the b frame to the n frame is small enough, ignoring the term $\delta\Omega_{nb}^b$ in the above equation comes up

$$\delta\dot{C}_b^n \approx EC_b^h\Omega_{nb}^b = E\Omega_{nb}^h C_b^h \tag{15}$$

From (13) and (15), the differential equation of error matrix E is expressed as

$$\dot{E} + E\Omega_{hb}^h = E\Omega_{nb}^h \quad or \quad \dot{E} = E\Omega_{nh}^h \tag{16}$$

where $\Omega_{nh}^h = ([0 \quad 0 \quad -\psi]^T\times)$. ψ is the yaw angle rate and it can be obtained from the following Euler angle differential equation

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\cos\theta}(\omega_{ibx}^b \sin\gamma - \omega_{ibz}^b \cos\gamma) \tag{17}$$

To this point, from (9) and (16) the linear differential equations represented for the heading error are described as

$$\delta\dot{\psi}_s = \psi\delta\psi_c \tag{18}$$

$$\delta\dot{\psi}_c = -\psi\delta\psi_s \tag{19}$$

Obviously, equation (18) and (19) can also be derived easily by directly differentiating (8).

1.2 Velocity and position error dynamic model

The velocity error vector δV^n is defined as

$$\delta V^n = \hat{V}^n - V^n \tag{20}$$

From (2) we can induce the differential equation of velocity errors

$$\begin{aligned} \delta\dot{V}^n = &[C_b^n\hat{f}^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n)\times\hat{V}^n + \hat{g}^n] - \\ &[C_b^n f^b - (2\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n)\times V^n + g^n] \end{aligned} \tag{21}$$

Under the assumption of large heading uncertainty and the process of heading identification to be a very short time, ignoring the affect of secondary factor, such as earth rate, rate of the n frame and gravity error, the above equation (21) is simplified as

$$\delta\dot{V}^n \approx C_b^n\hat{f}^b - C_b^n f^b \approx EC_b^h f^b \tag{22}$$

Define $f^h = C_b^h f^b$ and expand (22). As the coupling of the vertical channel with the horizontal channels is very weak, by ignoring the vertical channel the velocity error differential equations are as follows

$$\delta\dot{V}_E^n = f_y^h\delta\psi_s + f_x^h\delta\psi_c \tag{23}$$

$$\delta\dot{V}_N^n = -f_x^h\delta\psi_s + f_y^h\delta\psi_c \tag{24}$$

Letting h to be zero, the latitude and longitude error models are derived form (3)

$$\delta\dot{L} \approx \delta V_N^n / R_e \tag{25}$$

$$\delta\dot{\lambda} = \delta V_E^n / R_{eL} \tag{26}$$

where $R_{eL} = R_e\cos\bar{L}$ and $\bar{L}$ is the approximate latitude where the vehicle lies.

2 SINS/ GPS integrated initial alignment Kalman filter model

2.1 State-space dynamic model

The state-space dynamic model can be obtained from the differential equations of the navigation errors. Since the aim of initial alignment with large heading uncertainty is to diminish the heading error and the process is very short, the sensor bias errors are not taken into account. The state variable $x(t)$ consists of heading errors, velocity errors and position errors. $w(t)$ is the process noise consisting of white noises of the inertial sensors. It is assumed normal distributed with the variance $Q(t)$. The SINS/ GPS Kalman filter state-space dynamic model is given by

$$\dot{x}(t) = F(t)\,x(t) + w(t) \tag{27}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

where

$$x(t) = [\delta\psi_s \quad \delta\psi_c \quad \delta V_E^n \quad \delta V_N^n \quad \delta L \quad \delta\lambda]^T$$

$$F(t) = \begin{bmatrix} 0 & \psi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_y^h & f_x^h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f_x^h & f_y^h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_{eL} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w(t) = [w_{\psi s} \quad w_{\psi c} \quad w_{VE} \quad w_{VN} \quad 0 \quad 0]^T \sim N(0, Q(t))$$

$w_{\psi s}$ and $w_{\psi c}$ are gyroscope white noise. w_{VE} and w_{VN} are accelerometer white noise.

As is well known, the state-space dynamic model (27) is the same as that of the three-degree rigid body kinematics and dynamics equations in two-dimension space, but with moment equations excluded.

2.2 Measurement model

Subtracting the position measurement of the GPS from the SINS position estimate induces the measurement model. The errors of GPS are assumed white noise with normal distributed variance $R(t)$. Then, we have

$$z(t) = [L_{INS} - L_{GPS} \quad \lambda_{INS} - \lambda_{GPS}]^T = [\delta L_{INS} + v_{GPSL} \quad \delta\lambda_{INS} + v_{GPS\lambda}]^T \tag{28}$$

Equation (28) is denoted as compact form

$$z(t) = H(t)x(t) + v(t) \tag{29}$$

where

$$H(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$v(t) = [v_{GPSL} \quad v_{GPS\lambda}]^T \sim N(0, R(t))$$

2.3 SINS navigation error compensation

Supposing the attitude matrix and local level DCM in SINS algorithm to be C_{bINS}^n and C_{bINS}^h respectively, and the state estimates of $\delta\psi_s$ and $\delta\psi_c$ in SINS/GPS integrated Kalman filter to be $\delta\psi_s$ and $\delta\psi_c$ respectively, the estimation of initial attitude matrix C_b^n is accomplished using the following equation.

$$C_b^n = C_{bINS}^n - \delta C_b^n = C_{bINS}^n - EC_{bINS}^h \tag{30}$$

where E is composed with the estimates of $\delta\psi_s$ and $\delta\psi_c$. E is given by

$$E = \begin{bmatrix} \delta\psi_c & \delta\psi_s & 0 \\ -\delta\psi_s & \delta\psi_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Supposing the yaw angle in SINS algorithm to be ψ_{INS} and the state estimate of yaw angle to be ψ, substituting ψ_{INS}, ψ, $\delta\psi_s$ and $\delta\psi_c$ for $\psi + \delta\psi, \psi, \delta\psi_s$ and $\delta\psi_c$ respectively in equation (8), yields

$$\sin\psi_{INS} - \sin\psi = \delta\psi_s, \cos\psi_{INS} - \cos\psi = \delta\psi_c \tag{31}$$

or equivalently

$$\sin\psi = \sin\psi_{INS} - \delta\psi_s, \cos\psi = \cos\psi_{INS} - \delta\psi_c \tag{32}$$

Now the evaluation of initial yaw angle and attitude matrix are expressed as follows

$$\psi_{fm} = \arctan\frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \arctan\frac{\sin\psi_{INS} - \delta\psi_s}{\cos\psi_{INS} - \delta\psi_c} \tag{33}$$

$$C_b^n = C_h^n C_{bINS}^h, C_h^n = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{34}$$

where ψ_{fm} is the domain valve of the yaw angle.

Supposing the velocity, latitude and longitude in SINS algorithm to be V_{INS}^n, L_{INS} and λ_{INS} respectively, and the state estimates in SINS/GPS integrated Kalman filter to be $\delta V_E^n, \delta V_N^n, \delta L$ and $\delta\lambda$ respectively, the compensation of these estimates are accomplished by using the following equations

$$V_E^n = V_{EINS}^n - \delta V_E^n, V_N^n = V_{NINS}^n - \delta V_N^n \tag{35}$$

$$L = L_{INS} - \delta L, \lambda = \lambda_{INS} - \delta\lambda \tag{36}$$

3 Simulation

Apparently, by observability analysis of state-space dynamic model (27) and measurement model (29), if the horizontal components of specific force f_x^h and f_y^h are not all zero, both of the state variables $\delta\psi_s$ and $\delta\psi_c$ are observable. That is to say, in order to accomplish the yaw angle identification, vehicle horizontal maneuver is necessary. In this section, two typical vehicle maneuver trajectories are studied: case 1 is uniformly accelerated motion and case 2 is uniformly circular motion.

The target system is a vehicle needed to align the yaw angle on moving. The simulation conditions are set as follows:

Vehicular initial pitch angle and roll angle are both zero.

Vehicular acceleration is 1 m/s^2.

Running time for each trial is 20 s.

Gyro constant drift rate is 10°/h and gyro white noise level is 1°/h(1σ).

Accelerometer constant bias is 3 mg and accelerometer white noise level is 1 mg(1σ).

GPS horizontal position error is 10 m(1σ).

The initial pitch error angle and roll error an-

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

gle are $\delta\theta = \delta\gamma = 10$ arc-min, which are determined by the performance of the horizontal accelerometers. However, as the yaw angle is completely uncertain, we might as well set it to zero, i.e. $\psi_{INS0} = 0°$, in the SINS algorithm.

Simulations are carried out in two steps: First, in both cases 36 trajectories are simulated to generate gyro and accelerometer information with trajectory initial yaw angles uniformly distributed on $[0, \pi]$. In case 1, the vehicle acceleration is 1 m/ s^2 with initial velocity to be zero. In case 2, the vehicle turning radius is 100 m with initial velocity to be 10 m/ s. Second, an initial alignment simulation is carried out for each trajectory, and the SINS algorithm outputs are compensated by the estimates of the Kalman filter. Figure 2 shows the yaw estimate errors vs the initial trajectory yaw angles in case 1, and shows that the covariance of yaw estimate error is 3.09°. Figure 3 describes the covariance of yaw estimate error is 3.26°in case 2.

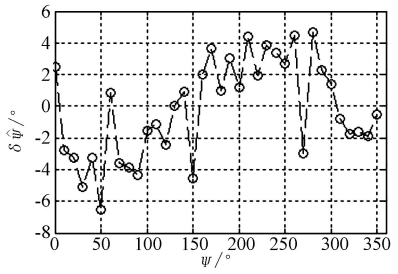


Fig 2　Heading error in uniformly accelerated motion

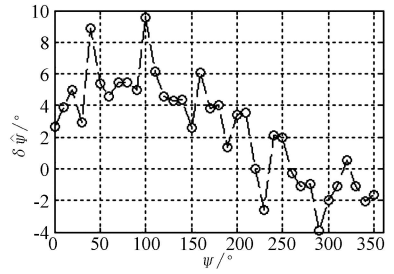


Fig 3　Heading error in uniformly circular motion

4　Conclusion

In the process of initial alignment with the yaw angle completely unknown, this paper presents a novel method to estimate the yaw angle coarsely via SINS/ GPS integrated Kalman filter in the moving base. Notable feature of this method is the separation of small leveling errors from the large heading error by ignoring the affect of leveling errors in the short-time alignment course. By the transformation of heading error to two trigonometric variables, linear dynamic equations are derived for applying Kalman filtering. Simulation results show that the presented method is an effective way for estimating heading angle coarsely to as small as 3°.

References:

[1] Chen Z. Strapdown Inertial Navigation System Theory[M]. Beijing: Aerospace Press. 1986 (in Chinese).

[2] Zhang J, Jin Z H and Tian W F. A Suboptimal Kalman Filter with Fading Factors for DGPS/ MEMS-IMU/ Magnetic Compass Integrated Navigation[J]. IEEE Intelligent Transportation Systems, 2003:1229-1234.

[3] Miao L J, Shen J, Liu W, and Yang Y. Initial Alignment Technique for SINS of Vehicles in the Moving State[J]. Journal of Beijing Institute of Technology. 2002, 11(3):234-239.

[4] Qin Y Y, Zhang H Y, and Wang S H. Kalman Filter and the Theory of Integrated Navigation[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press. 1998(In Chinese).

[5] Julier S J, Uhlmann J K, and Durrant-Whyte H F. A New Approach for Filtering Nonlinear Systems[C]. In: Proc. Am. Contr. Conf., Seattle, WA. 1995:1628 – 1632.

[6] Hong H S, Lee J G and Park C G. In-Flight Alignment of SDINS under Large Initial Heading Error. AIAA-2001-4183.

[7] Scherzinger B M. Inertial Navigator Error Models For Large Heading Uncertainty[J]. Proc. Of IEEE. 1996:477-484.



严恭敏(1977-),男,福建建区瓦市人,导航,制导与控制专业博士研究生,主要从事捷联惯性导航算法、组合导航系统理论研究,yangongmin @163.com.



秦永元(1946-),男,江苏常熟市人,教授,博士生导师,主要从事惯性导航与客错组合导航系统、最优估计理论、GPS 信号处理研究.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

文章编号:1001-506X(2006)09-1404-04

车载导航系统动态高精度初始对准技术

严恭敏[1],秦永元[1],马建萍[2]
(1. 西北工业大学自动化学院,陕西 西安 710072; 2. 中国航空计算技术研究所,陕西 西安 710068)

摘 要:针对载车在运动状态下的初始对准问题,提出了利用航位推算算法进行精对准的新方法,阐述了航位推算轨迹和真实轨迹相似的原理。在载车初始粗对准之后,行驶一段路程到达一位置已知点,由航位推算结果并运用相似性原理求出初始粗对准的航向误差角,从而修正航向角达到精对准的目的。最后通过跑车试验验证了对准方法的有效性,当载车起始点和位置已知点间距离为 6 km 左右时,初始对准航向角可达到角分级精度。

关键词:惯性导航;初始对准;航位推算;相似性原理
中图分类号:V249.3 **文献标识码**:A

High precision dynamic initial alignment technique for vehicular navigation system

YAN Gong-min[1], QIN Yong-yuan[1], MA Jian-ping[2]
(1. *Dept. of Automation Control, Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an* 710072, *China*;
2. *China Aeronautics Computing Technique Research Inst., Xi'an* 710068, *China*)

Abstract: Using dead reckoning(DR) algorithm, a novel method is presented to implement the dynamic initial fine alignment for vehicular navigation system. The similarity theory between the DR trajectory and the true trajectory is deduced. After initial coarse alignment and reaching a position-known point, azimuth error is compensated based on the DR algorithm and the similarity theory. Finally the field-test verifies the alignment algorithms. When the distance between the startup point and the position-known point is about 6km, the accuracy of azimuth in initial fine alignment can reach minute level.

Key words: inertial navigation; initial alignment; dead reckoning; similarity theory

0 引 言

初始对准是进行捷联惯性导航的前提,通常初始对准可分为两个步骤:初始粗对准和初始精对准。粗对准中通过测量重力加速度和地球自转角速率估计出载体坐标系到导航坐标系的变换矩阵,精对准中常常利用卡尔曼滤波器对姿态误差角和航向误差角进行估计,其中主要是航向误差角的估计。在静基座时,由于卡尔曼滤波器中航向误差角的可观测性较差,因而航向误差角的收敛速度和估计精度都受到很大的影响。文献[1]利用多位置方法提高捷联惯导系统的可观测性,从而大大减小对准误差,并缩短了对准时间。

如何实现惯导系统在运动基座条件下快速精确初始对准也是一个值得研究的问题,在运动状态下进行初始对准有利于提高导航系统的快速反应能力。文献[2]认为水平姿态误差角收敛时航向误差角也必然收敛,通过姿态误差角的快速收敛特性去估计航向误差角,从而加速卡尔曼滤波器的收敛速度。文献[3]研究了载车在运动状态下惯导初始对准问题,以里程计作为外部观测量,在短时间静止状态下的粗对准之后,载车向预定的地点行驶,10 min 可完成精对准,且对准精度比静基座下高。

高精度的载波相位定位技术使得利用 GPS 确定姿态成为可能,借助于 GPS 定位技术运用简单的几何关系就可计算出载体的姿态[4-5],姿态测量精度取决于载波相位定位精度和载体上多天线间的基线距离。本文阐述了利用航位推算算法进行初始精对准的原理,首先载车在起始点进行粗对准,通常粗对准中水平姿态角能达到较高的精度要求,接着载车行驶一段路程到达一位置已知点,由航位推算结果和该已知点之间的位置误差求出粗对准航向误差角,从而修正航向角达到精对准的目的。起始点和位置已知点间的距离等效于 GPS 天线基线长度,该等效基线长度可以很长,因而该方法能够极大提高精对准精度。最后通过跑

收稿日期:2005-08-01; **修回日期**:2005-11-02。
作者简介:严恭敏(1977-),男,博士研究生,主要研究方向为捷联惯性导航算法,组合导航系统理论。E-mail:yangongmin@163.com

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

车试验验证了对准方法的有效性。

1　几何对准基本原理

用 GPS 测量姿态的方法是:在载体上安装上几个 GPS 接收天线,天线之间相距几米甚至几十米长,利用载波相位定位技术精确测定各天线的位置,由天线位置通过简单的几何关系即可求出载体的姿态,姿态测量精度取决于载波相位定位精度和载体上天线间的基线距离。和 GPS 测量姿态相似,在地面上可以用两个位置点进行航向角测量。当两个位置点相距几公里并且两点间高度变化不大时,可以把它们看作是在同一水平面上,例如图 1 所示平面上有点 $P_0(x_0, y_0)$ 和 $P_1(x_1, y_1)$,则由它们确定的基线与北向之间的夹角(主值)为

$$\psi = \arctan\left(\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0}\right) \tag{1}$$

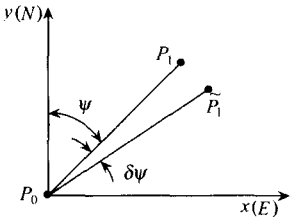


图 1　几何对准基本原理

在利用航位推算进行精对准中,不是由已知两点的位置直接求出精确的航向角,而是利用航位推算位置 $\tilde{P}_1(x_1, \tilde{y}_1)$ 和已知位置 $P_1(x_1, y_1)$ 之间的误差求得航向误差角,再对航向角进行修正。如果忽略其它误差,如陀螺漂移和里程计刻度系数等误差,仅考虑初始航向误差角,由于它的影响载车行驶一段距离后将产生位置误差。再假设载车是直线行驶,由于航向误差角是小角,可计算得初始航向误差角

$$\delta\psi = \pm\frac{|\tilde{P}_1 - P_1|}{|P_1 - P_0|} \tag{2}$$

上式中正负号视具体情况而定。利用该误差角在 P_1 点即时修正航向角,而不是初始粗对准时的航向角,就完成了航向角的精对准过程。

2　航位推算及其误差分析

2.1　航位推算算法

选取东 - 北 - 天(ENU)地理坐标系为导航参考坐标系,记为 n 系;当惯组按一定的方位安装到载车上时,认为载车坐标系与惯组标定坐标系重合,记为 b 系;里程计坐标系记为 m 系,它的 oy 轴在和载车车轮相接触的地平面内,并且指向载车行驶正前方,oz 轴垂直于地平面向上为正,ox 轴指向右方。里程计在一小段时间 $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ 内测量的里程增量 ΔS_j 在 m 系的投影写成矢量形式为

$$\Delta S_j^m = [0 \quad \Delta S_j \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

假设 b 系轴和 m 系对应轴相平行,可得里程增量在 n 系上的投影

$$\Delta S_j^n = C_{bj-1}^n \cdot \Delta S_j^m \tag{4}$$

式中:C_{bj-1}^n ——t_{j-1} 时刻的捷联姿态矩阵。

和捷联惯导位置更新算法一样,可求得航位推算的纬度 L、经度 λ 和高度 h 的递推算法

$$L_{Dj} = L_{Dj-1} + \frac{\Delta S_{jN}^n}{R_M + h_{Dj-1}} \tag{5a}$$

$$\lambda_{Dj} = \lambda_{Dj-1} + \frac{\Delta S_{jE}^n \sec L_{Dj-1}}{R_N + h_{Dj-1}} \tag{5b}$$

$$h_{Dj} = h_{Dj-1} + \Delta S_{jU}^n \tag{5c}$$

式中:R_M 和 R_N ——载车所在点处的地球子午圈和卯酉圈主曲率半径。

2.2　航位推算误差分析

航位推算误差主要源于姿态角误差 ϕ 和里程计刻度系数误差 δK_D,其中里程计刻度系数误差与车轮气压和路面状况等因素有关。

由里程计增量式(4)得里程计增量的实际计算公式

$$\Delta\tilde{S}_j^n = \tilde{C}_{bj-1}^n \Delta\tilde{S}_j^m = (I - \phi_{j-1}\times) C_{bj-1}^n \cdot (1 + \delta K_{Dj-1}) \Delta S_j^m \tag{6}$$

式中:$\phi\times$ ——由 ϕ 组成的反对称矩阵。由于 ϕ_{j-1} 和 δK_{Dj-1} 均是小量,展开上式并忽略高阶小量得

$$\Delta\tilde{S}_j^n \approx \Delta S_j^n - \phi_{j-1}\times \Delta S_j^n + \Delta S_j^n \delta K_{Dj-1} \tag{7}$$

比较式(4)和式(7)可得 t_{j-1} 时刻到 t_j 时刻航位推算误差方程

$$\delta\Delta S_j^n = \Delta\tilde{S}_j^n - \Delta S_j^n = \Delta S_j^n \times\phi_{j-1} + \Delta S_j^n \delta K_{Dj-1} \tag{8}$$

此式即是航位推算的位置误差方程式,为了把位置误差表示成地理坐标的形式将式(5)微分并整理得

$$\delta p_{Dj} = M_{D1}\delta p_{Dj-1} + M_{D2}(\Delta S_j^n \times\phi_{j-1} + \Delta S_j^n \delta K_{Dj-1}) \tag{9}$$

式中

$$\delta p_{Dj} = [\delta L_{Dj} \quad \delta\lambda_{Dj} \quad \delta h_{Dj}]^{\mathrm{T}}$$

$$\delta p_{Dj-1} = [\delta L_{Dj-1} \quad \delta\lambda_{Dj-1} \quad \delta h_{Dj-1}]^{\mathrm{T}}$$

$$M_{D1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta S_{jN}^n/(R_M + h_{Dj-1})^2 \\ \Delta S_{jE}^n \sec L_{Dj-1} \tan L_{Dj-1}/(R_N + h_{Dj-1}) & 1 & -\Delta S_{jE}^n \sec L_{Dj-1}/(R_N + h_{Dj-1})^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{D2} = \begin{bmatrix} 0 & 1/(R_M + h_{Dj-1}) & 0 \\ \sec L_{Dj-1}/(R_N + h_{Dj-1}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

3 航向误差角的计算

3.1 航位推算轨迹和真实轨迹相似

和纯惯性导航算法相比,在车载航位推算系统中速度和位置计算误差都比较小,如果陀螺漂移很小或者载车行驶时间较短,在式(8)中可认为姿态误差角和里程计刻度系数误差在载车行驶过程中为常值 ϕ 和 δK_D,则由式(8)可得

$$\delta\Delta S^n = \Delta S^n \times \phi + \Delta S^n \delta K_D \tag{10}$$

其中 $\delta\Delta S^n = \sum_{i=1}^{j} \delta\Delta S_i^n$ 为航位推算累积位置误差,$\Delta S^n = \sum_{i=1}^{j} \Delta S_i^n$ 为位移,由此可知当载车绕行一圈回到原地时有 $\Delta S^n = 0$,因而位置误差 $\delta\Delta S^n$ 也为零。通常水平姿态误差角 ϕ_E 和 ϕ_N 都比较小,如果进一步忽略它们的影响得

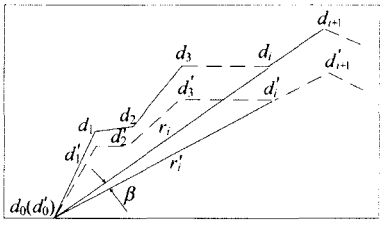
$$\delta\Delta S^n = \Delta S^n \times [\phi_U]_3 + \Delta S^n \delta K_D \tag{11}$$

其中记 $[\cdot]_3 = [0 \quad 0 \quad \cdot]^{\mathrm{T}}$,$\phi_U$ 为天向姿态误差角。由式(11)在水平面上投影可得

$$\delta\Delta S^h = \Delta S^h \times [\phi_U]_3 + \Delta S^h \delta K_D \tag{12}$$

实际上,只要将式(11)中 $\delta\Delta S^n$ 和 ΔS^n 的第三分量都置为 0 并分别记为 $\delta\Delta S^h$ 和 ΔS^h,即得式(12)。

为了方便说明问题,提出两折线相似概念:oxy 平面上两条折线 r 和 r' 分别由线段 $d_i d_{i+1}$ 和 $d_i' d_{i+1}'$ 首尾相连组成(其中 $i = 0,1,2,\cdots$,下同),并且 r 和 r' 具有共同的起始点,即 d_0 和 d_0' 重合,连接起始点到端点 d_i 和 d_i' 的矢量分别记为 r_i 和 r_i',如果长度之比 $|r_i'|/|r_i| = k$ 为常值,并且 r_i 到 r_i' 的转角 β 也是常值,则称这两条折线相似,如图 2 所示。



—:r;– –:r'

图 2 折线相似示意图

换言之,如果折线 r' 和 r 相似,则可以由 r 构造出 r',即由 r_i 绕 d_0 转动 β 角再乘以比例系数 k 则得 r_i'。假设 d_0 为原点,r_i 和 r_i' 的坐标分别为 $(x_i, y_i, 0)$ 和 $(x_i', y_i', 0)$,且 β 角是小角,则两矢量 r_i 和 r_i' 之差为

$$\delta r_i = r_i' - r_i = \begin{bmatrix} x_i' \\ y_i' \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & \beta & 0 \\ -\beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} \cdot k - \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix} \cdot (k-1) = r_i \times [\beta_k]_3 + r_i \cdot (k-1) \tag{13}$$

比较式(12)和式(13)可知在水平面上投影时航位推算轨迹和载车行驶过的真实轨迹是相似的,这就是航位推算轨迹和真实轨迹相似性原理。

3.2 航向误差角的计算

利用航位推算轨迹和真实轨迹相似性原理,在跑车过程中可进行航向误差角的修正,即进行精对准。由起始点和位置已知点间的矢量水平投影 ΔS^h 和航位推算矢量水平投影 $\Delta\tilde{S}^h$,利用简单的几何关系,可求得转角,即天向姿态误差角 ϕ_U

$$|\Delta S^h||\Delta\tilde{S}^h|\sin(\phi_U) = [\Delta\tilde{S}^h \times \Delta S^h]_3 \tag{14}$$

移项整理近似得

$$\phi_U \approx \arcsin(\phi_U) = \frac{[\Delta\tilde{S}^h \times \Delta S^h]_3}{|\Delta S^h||\Delta\tilde{S}^h|} \tag{15}$$

由此可见当载车行驶到位置已知点时,由航位推算位置误差和载车位移可求得误差角 ϕ_U。载车行驶的特点是水平姿态角一般比较小($<5°$),误差角 ϕ_U 和航向误差角后近似相等,因此在位置已知点估计出 ϕ_U 后,只要将计算航向角直接减去估计出的 ϕ_U 即可得精对准航向角。这就是利用航位推算进行精对准的原理。

4 跑车试验

跑车系统的主要组成部分有:惯组、里程计、导航计算机以及相关电源等。其中惯组包括三个激光陀螺和三个石英挠性加速度计,激光陀螺随机常值漂移小于 0.03 °/h(1σ),加速度计随机常值零偏稳定性为 $\pm 3 \times 10^{-4}$ g;里程计刻度系数误差小于 0.2 %。跑车路线为图 3 所示"L"形路线,路况为省级公路,总里程约 47 km。其中"0"为起始点,"1"为可供精对准利用的位置已知点,用"○"标出;"2 - 5"为四个考核点,用"+"标出。所有点的位置均由 DGPS 测出,定位精度为 0.1 m(1σ)。"0"到"1"点之间里程约 6 km,其它点间为 8 - 12 km 不等。

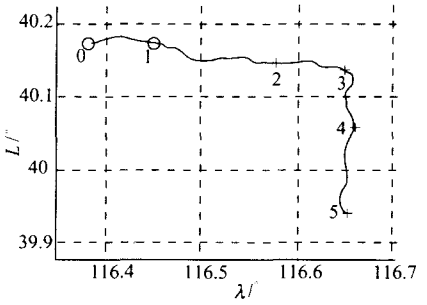


图 3 跑车路线图

跑车在"0"点静止 1 min 左右进行初始粗对准后,行驶至"1"点,从"0"到"1"点间行驶不限时,在"1"点由航位推算位置误差修正航向角完成精对准,并对航位推算位置进行校正。之后,"1 - 5"点中每两点间限时行驶约 15 min,行驶至每个考核点时记录下航位推算的定位结果。跑车定位结果和标准定位值比较见表 1。跑车行驶到"1"点进行精对准时在纬度方向的误差为 47.2 m,等效于初始粗对准误差约 27″;而"3"点和"1"点相距约 20 km,从表 1 中可以看出,

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

在“3”点时航位推算在纬度方向的误差为 4.6,等效于航向角误差约 0.8′,即经过精对准后航位推算误差的增长速度明显地减缓了。由此可见,精对准对航向角精度的提高是非常有效的。上述跑车过程中,“0”到“1”点间行驶不限时,如果行驶时间越短,其间陀螺漂移越小,则越容易忽略陀螺漂移的影响,满足航向误差角为常值这一条件,越有利于航向误差角的修正。

表 1　跑车定位测量值和标准值比较

考核点		标准值	测量值	误差/ m
2	L/°	40.143 382	40.143 413	3.4
	λ/°	116.576 963	116.576 889	8.2
	h/ m	41.2	49.7	8.5
3	L/°	40.135 724	40.135 768	4.8
	λ/°	116.648 762	116.648 628	14.9
	h/ m	41.8	51.9	10.1
4	L/°	40.054 562	40.054 649	9.6
	λ/°	116.659 452	116.659 324	14.2
	h/ m	34.8	50.1	15.3
5	L/°	39.937 664	39.937 900	26.2
	λ/°	116.651 503	116.651 435	7.5
	h/ m	27.5	47.3	19.8

影响精对准精度的因素有路标点测定精度、载车在路标点处停车精度和陀螺漂移等。假设停车精度为 0.5 m(可忽略路标点测定精度影响),由载车计算的从“0”点到“1”点的基线所确定的方位精度约为 $0.5\times\sqrt{2}/6000\approx0.4'$。再假设从“0”点到“1”点行驶 10 min,则 0.03°/h 随机常值漂移的陀螺在此期间将可能使姿态角产生 0.3′的误差。综合上述主要误差源,初始对准航向角可达到角分级精度。值得指出的是,误差角 ϕ_U 估计式(15)对跑车路线没有提出任何特定的要求,只要起始点到位置已知点之间有一定的距离,中间的路线可以是曲折的。但是尽量不要出现载车转圈行驶的情况,因为转圈将可能引入陀螺的刻度系数误差,破坏精对准中姿态误差角为常值这一假设。高度的变化不影响对准精度。因此该方法能满足一般的工程应用。

5　结　论

文献[3]研究了载车在运动状态下惯导初始对准问题,但是其中需要设置特定的行驶路线,这种路线要求有时是难以满足的。本文提出的利用航位推算进行初始对准的方法,仅要求在距离出发点几公里处有一位置已知点,就可以进行精对准,并能消除对准过程中产生的位置误差,从而提高导航系统的快速反应能力。跑车试验结果表明:当载车起始点和位置已知点间距离为 6 km 左右时,初始对准航向角可达到角分级精度。

参考文献:

[1] 王新龙,申功勋. 一种快速精确的捷联惯导系统初始对准方法研究[J]. 中国惯性技术学报,2003,11(5):19 - 23.

[2] 房建成,万德钧. GPS/ SINS 组合导航系统的动基座快速初始对准方法[J]. 中国惯性技术学报,1996,4(3):6 - 10.

[3] Miao Ling-juan, Shen Jun, Liu Wei, et al. Initial alignment technique for SINS of vehicles in the moving state[J]. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2002,11*(3)*:234 - 239.

[4] 张宏兵,葛茂荣,过静 2. GPS 姿态确定原理及软件设计[J]. 测绘通报,1999(12):27 - 29.

[5] Lin D, Keck Voon L, Guo Rong H, et al. GPS-based attitude determination for microsatellite using three-antenna technology [C]// *IEEE Aerospace Conference Proceedings*, 2004:1024 - 1029.

(上接第 1403 页)

with time delay[J]. *IEEE Trans. on Automation Control*, 1989, 34*(4)*: 494 - 501.

[3] Goldberg K, Gentner S. The mercury project: a feasibility study for Internet robots[J]. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, 2000, 7*(1)*: 35 - 40.

[4] Lee J - H, Hashimoto H. Controlling mobile robots in distributed intelligent sensor network[J]. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, 2003, 50*(5)*: 890 - 902.

[5] 陈仁际,谈大龙. 分布式对象技术在多机器人系统应用[J]. 机器人,1998,20(6):465 - 470.

[6] Hori T, Hirukawa H, Suehiro T. Networked robots as distributed objects[C]// *Proc. of the IEEE/ ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. Piscataway, USA: IEEE*, 1999: 61 - 66.

[7] Lee B J, Lee H G, Lee J H. New architecture for mobile robots in home network environment using Jini[C]// *Proc. of the* 2001 *IEEE International Conference on Robotics and Automation. Piscataway, USA: IEEE*, 2001: 471 - 476.

[8] Edwards W K. Core Jini[M]. *Indiana: Prentice Hall PTR*, 2000.

[9] Hocaoglu Cem, Sanderson Arthur C. Planning Multiple Paths with Evolutionary Speciation[J]. *IEEE Trans. on Evolutionary Computation*, 2001, 5*(3)*: 169 - 191

[10] 刘旭红,张国英,刘玉树,等. 基于多目标遗传算法的路径规划[J],北京理工大学学报,2005,25 (7),:613 - 616.

[11] 高玉华,苏剑波. JMF 视频传输技术在 Web 机器人中的应用[J]. 机器人,2004,26(3):218 - 221.

[12] Gao Zhendong, Su Jianbo, Zhou Wei. Robot autonomous perception model for internet - based intelligent robotic system [C]// *IEEE Inter. Conf. on Machine Learning and Cybernetics, Guangzhou, China*, 2005:67 - 71.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

文章编号：1005-6734(2007)01-0123-05

激光捷联惯组的双轴位置转台标定仿真

严恭敏，秦永元

（西北工业大学 自动化学院，陕西 西安 710072）

摘要：研究了利用双轴位置转台标定时，水平基准误差和北向基准误差对激光捷联惯组（LSIMU）标定精度的影响。首先建立了LSIMU标定模型和生成惯性器件信息的仿真算法，接着设计了LSIMU标定方案和数据处理方法，最后对LSIMU标定进行仿真和分析。仿真结果表明：水平基准误差为0.4′ 时，加速度计标定误差将达到116×10^{-6}；当北向基准误差大于5 时，陀螺标定误差将超过0.0001。

关 键 词：激光捷联惯组；双轴位置转台；标定；仿真

中图分类号：U666.1 **文献标识码：**A

Calibration simulation for laser strapdown IMU with two-axis turntable

YAN Gong-min, QIN Yong-yuan

(Department of Automation Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Based on two-axis position turntable, the effect of horizontal error and north error on calibration accuracy of Laser strapdown inertial measurement unit (LSIMU) was studied. The calibration models of LSIMU and the algorithms of generating inertial measurement output were established. A continuous rotation calibration scenario and its data processing method were proposed. According to the LSIMU calibration simulation, the results show that the accelerometer calibration error will reach 116×10^{-6} when horizontal error is about 0.4′ , and the gyro calibration error will exceed 100×10^{-6} when north error is more than 5º.

Key words: laser strapdown inertial measurement unit (LSIMU); two-axis position turntable; calibration; simulation

激光捷联惯组（LSIMU）标定是进行惯性导航的前提，标定结果的好坏将对惯性导航精度产生直接的影响。LSIMU标定通常采用分立标定法，即将加速度计和陀螺分开标定，加速度计标定以重力加速作为参考量，采用静态多位置标定方法；在陀螺标定中，由于地球自转角速率太小而不能作为陀螺标定的参考量，因此必须利用转台转动的办法进行标定，这时地球自转角速率被看作是陀螺标定的干扰量[1-3]。除了测试转台自身精度外，水平基准和北向基准精度都将对LSIMU标定结果产生重要的影响，在位置转台中，转速的不均匀性也将影响陀螺标定精度。本文仿真的目的是为了评估上述因素在双位置转台标定中对LSIMU标定精度的影响。标定中双轴位置转台的主要性能指标为：转台主轴可转动360º，而俯仰轴只能转动±90º，转台角度测量精度为5″，转台初始安装时俯仰轴水平误差约为15″；俯仰轴基本指向北向，指北误差约为0.5º；转台台面绕俯仰轴方向可由外部水平仪进行调水平，水平仪精度为5″。LSIMU的性能指标为：陀螺常值漂移稳定性0.05 (º)/h，随机漂移0.1 (º)/h；加速度计常值零偏稳定性0.15 mg，噪声0.05 mg。

1 LSIMU的标定模型

1.1 坐标系的定义

记i系为地心惯性坐标系；记e系为地球坐标系；选取东-北-天地理坐标系为导航参考坐标系，记为n系。其它坐标系的定义如下：

1）转台坐标系（p系）：原点在转台台面中心，oz_p 轴垂直与转台台面指向外（即与转台主轴重合），ox_p 轴和 oy_p 轴在台面内且与 oz_p 轴构成右手坐标系，假设在标定起始位置 oy_p 轴平行于转台俯仰轴。在标定起始位置时b系和p系示意图见图1。

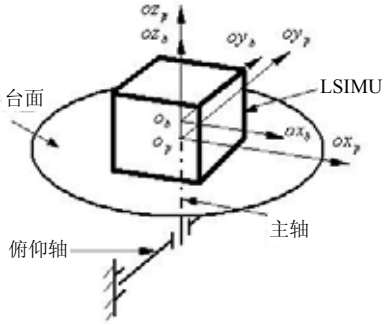


图1 标定起始位置时*b*系和*p*系示意图

Fig. 1 b frame vs p frame in startup

收稿日期：2006-08-17；**修回日期：**2006-12-22

作者简介：严恭敏（1977—），男，博士，主要从事捷联惯性导航算法、组合导航系统理论研究。Email: yangongmin@163.com

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2） 惯组标定坐标系（b系）：原点在惯组中心，当惯组按一定要求安装到转台台面上时，定义b系 ox_{b} 、oy_{b} 、oz_{b} 轴分别与p系的同名坐标轴平行，b系随p系转动而转动，两者间的相对方位关系是固定不变的。

3） 惯性器件敏感坐标系：假设在LSIMU中陀螺和加计为无冗余安装，陀螺的敏感轴坐标系为 $ox_g y_g z_g$ ，记为g系；加速度计的敏感轴坐标系为 $ox_{\mathrm{a}} y_{\mathrm{a}} z_{\mathrm{a}}$ ，记为a系。由于陀螺（加速度计）敏感轴两两之间难以实现完全垂直安装，所以g系（a系）不是正交坐标系。文中不妨假设陀螺输出为角速率输出，加速度计输出为比力输出。

1.2 加速度计的标定模型：

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{b}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{a}} \cdot \boldsymbol{N}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{b}} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{f}^{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} f_x^{\mathrm{b}} & f_y^{\mathrm{b}} & f_z^{\mathrm{b}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为沿b系轴的比力输入；$\boldsymbol{K}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} k_{\mathrm{axx}} & k_{\mathrm{axy}} & k_{\mathrm{axz}} \\ k_{\mathrm{ayx}} & k_{\mathrm{ayy}} & k_{\mathrm{ayz}} \\ k_{\mathrm{azx}} & k_{\mathrm{azy}} & k_{\mathrm{azz}} \end{bmatrix}$ 为加速度计的脉冲当量矩阵，当加速度计安装误差角很小时，对角线上元素分别近似等于三个加速度计的脉冲当量，非对角线上元素与加速度计安装误差角有关；$\boldsymbol{N}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} N_{\mathrm{ax}} & N_{\mathrm{ay}} & N_{\mathrm{az}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为加速度计的采样输出；$\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} \nabla_x^{\mathrm{b}} & \nabla_y^{\mathrm{b}} & \nabla_z^{\mathrm{b}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为加速度计在b系轴上的等效常值零偏。

1.3 陀螺的标定模型：

$$\boldsymbol{\omega}^{b} = \boldsymbol{K}_{g} \cdot \boldsymbol{N}_{g} + \boldsymbol{\varepsilon}^{b} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} \omega_x^{\mathrm{b}} & \omega_y^{\mathrm{b}} & \omega_z^{\mathrm{b}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为沿b系轴的角速度输入；$\boldsymbol{K}_{\mathrm{g}} = \begin{bmatrix} k_{\mathrm{gxx}} & k_{\mathrm{gxy}} & k_{\mathrm{gxz}} \\ k_{\mathrm{gyx}} & k_{\mathrm{gyy}} & k_{\mathrm{gyz}} \\ k_{\mathrm{gzx}} & k_{\mathrm{gzy}} & k_{\mathrm{gzz}} \end{bmatrix}$ 为陀螺的脉冲当量矩阵，当陀螺安装误差角很小时，对角线上元素分别近似等于三个陀螺的脉冲当量，非对角线上元素与陀螺安装误差角有关；$\boldsymbol{N}_{\mathrm{g}} = \begin{bmatrix} N_{\mathrm{gx}} & N_{\mathrm{gy}} & N_{\mathrm{gz}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为陀螺的采样输出；$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{\mathrm{b}} & \varepsilon_y^{\mathrm{b}} & \varepsilon_z^{\mathrm{b}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为陀螺在b系轴上的等效常值漂移。

2 惯性器件输出信息的仿真

在标定之前需要先建立对惯性器件输出信息进行仿真的算法。由于加速度计采用静态法标定，作为加速度计的激励输入是重力加速度；而陀螺采用速率法标定，陀螺的激励输入包含地球自转角速度和转台转动的角速度。为了精确得到惯性器件的激励输入，在转台转动过程中需要计算p系相对于n系的方位关系。以下介绍利用变换四元数进行变换的两个结论：

结论1 设向量 $\boldsymbol{v}$ 在b系内投影为 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}}$ ，在n系内投影为 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{n}}$ ，从b系至n系的变换四元数为 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$ ，则有：

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{b}} \qquad （或 \boldsymbol{v}^{\mathrm{b}} = \boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} \cdot \boldsymbol{v}^{\mathrm{n}}） \tag{3}$$

式中，变换四元数 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$ 和向量 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}}$ 的乘法是这样定义的：

1）扩展向量为四元数：设 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ ，则扩展 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{b}}$ 为 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 0 & v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ ；

2）作四元数乘法：$\boldsymbol{q}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{q}^{\mathrm{b}} \boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}*}$ ，其中 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}*}$ 为 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$ 的共轭四元数，也可表示为 $\mathbf{q}_n^b$ ，即 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} = \boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}*}$ ；

3）从四元数中提取向量：设 $\boldsymbol{q}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ ，则有 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & q_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 。

结论2 设 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}(k)}^{\mathrm{n}}$ 和 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}(k+1)}^{\mathrm{n}}$ 分别为 t_k 和 t_{k+1} 时刻从b系至n系的变换四元数，且从 t_k 至 t_{k+1} 时刻沿转动轴方向的单位向量为 $\boldsymbol{u}$ ，转动角大小为 $\boldsymbol{\Phi}$ ，则有[4]：

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}(k+1)}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{q}_{\mathrm{b}(k)}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{q}_{\mathrm{b}(k+1)}^{\mathrm{b}(k)} \tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}(k+1)}^{\mathrm{b}(k)} = \cos(\boldsymbol{\Phi}/2) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{b}} \sin(\boldsymbol{\Phi}/2)$

利用变换四元数容易求得惯性器件的激励输入。首先，易知重力加速度 $\boldsymbol{g}$ 和地球自转角速度 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}$ 在n系的投影 g^{n} 和 $\omega_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}}$ ：

$$\mathbf{g}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -g \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \quad , \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{\mathrm{ie}} \cos L & \omega_{\mathrm{ie}} \sin L \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

式中，g 为重力加速度大小，ω_{ie} 为地球自转角速率，L为当地地理纬度。在转台转动过程中利用式（4）进行更新计算可以求出b系至n系的实时变换四元数 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$ ，当转台静止时，就能计算出 $\boldsymbol{g}$ 在b系中的投影，获得加速度计激励输入 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{b}}$ ：

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{b}} = -\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} \cdot \boldsymbol{g}^{\mathrm{n}} \tag{6}$$

在式（2）中 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{b}}$ 表示的是试验转台相对于惯性空间转动的角速度，包含地球自转角速度和转台转动的角速度两部分。当转台以 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}$ 角速度转动时（即p系相对n系以 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}$ 角速度转动），b系相对于i系的角速度输出为：

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{b}} = \boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{ie}^{n} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}} \tag{7}$$

至此得到惯性器件的激励输入 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{b}}$ 和 $\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{b}}$。最后，可由LSIMU标定模型式（1）和式（2）逆向求解，生成在g系（或a系）上投影的惯性器件输出信息，即加速度计和陀螺的采样信息：

$$\boldsymbol{N}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{a}}^{-1}(\boldsymbol{f}^{\mathrm{b}} - \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{b}}) \quad , \qquad \boldsymbol{N}_{\mathrm{g}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{g}}^{-1}(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{b}} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{b}}) \tag{8}$$

3 标定方案设计和数据处理

3.1 标定方案设计

LSIMU标定就是由仿真生成的惯性器件信息求解标定模型参数。加速度计标定采用静态位置法，在式（1）中共有12个未知参数，每个位置含3个方程，因此最少需要4个不相关的位置才能求得这些参数，例如选择这样四个位置：ox_{p} 轴向上、ox_{p} 轴向下、oy_{p} 轴向上和 oz_{p} 轴向上。在陀螺标定中，通常转台转动时间很短，而陀螺常值漂移一般很小，其需要较长时间才能得到精确的标定，因此陀螺标定可以先选择绕每个转台轴转动一次来标定陀螺脉冲当量矩阵，再利用一次双位置对准中的测量陀螺常值漂移原理来标定陀螺常值漂移。

为了缩短标定时间，设计了一套连续转动标定方案，在转动中进行陀螺采样，在静止时进行加速度计采样（陀螺标定常值漂移时也要用到两个静止位置的陀螺采样）。标定方案如图2所示，假设转台初始方位为*x*E*y*N*z*U（方位符号意义为：E-东、S-南、W-西、N-北、U-天、D-地），该方案位置/转动统计如表1所示。该方案的特点是：ox_{p} 轴和 ox_{p} 轴均向上和向下各一次；由于转台结构限制，oz_{p} 轴不能感受-*g*比力；在六次转动中绕 ox_{p} 轴和绕 oy_{p} 轴各转动一次，而绕 oz_{p} 轴转动四次；位置1与位置7构成双位置，用于标定陀螺常值漂移。

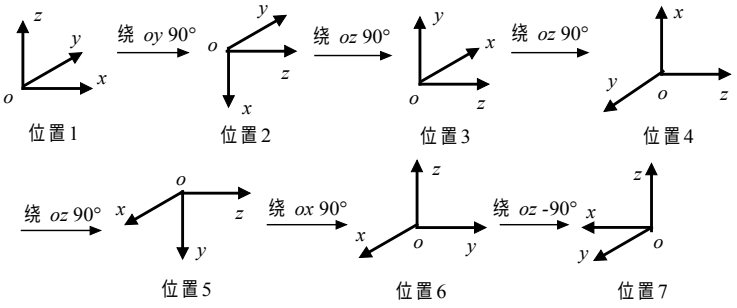


图2 连续转动标定方案

Fig. 2 Scheme for continuous rotation calibration

表1 位置/转动统计

Tab.1 Position/rotation statistics

位置	E	S	W	N	U	D	*k*至*k*+1转动轴
x	1	5.6	7	3	4	2	5
y	6	4.7	-	1.2	3	5	1
z	2.3.4.5	-	-	-	1.6.7	-	2.3.4.6

3.2 标定数据处理

3.2.1 加速度计标定数据处理

由式（1）展开并整理可得：

$$\begin{bmatrix} f_x^{\mathrm{b}} \\ f_y^{\mathrm{b}} \\ f_z^{\mathrm{b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\mathrm{ax}} & N_{\mathrm{ay}} & N_{\mathrm{az}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{\mathrm{ax}} & N_{\mathrm{ay}} & N_{\mathrm{az}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\mathrm{ax}} & N_{\mathrm{ay}} & N_{\mathrm{az}} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot$$
$$\begin{bmatrix} k_{\mathrm{axx}} & k_{\mathrm{axy}} & k_{\mathrm{axz}} & k_{\mathrm{ayx}} & k_{\mathrm{ayy}} & k_{\mathrm{ayz}} & k_{\mathrm{azx}} & k_{\mathrm{azy}} & k_{\mathrm{azz}} & \nabla_x^{\mathrm{b}} & \nabla_y^{\mathrm{b}} & \nabla_z^{\mathrm{b}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

如果有*n*组加速度计测量，参考输入和采样输出分别为 $\tilde{\boldsymbol{f}}^{b(k)}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{N}}_a^{(k)}$（*k*=1,2,3…*n*），则有：

$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{a}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{a}} + \boldsymbol{W}_{\mathrm{a}} \tag{10}$$

式中，$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_x^{\mathrm{b}(1)} \\ \tilde{f}_y^{\mathrm{b}(1)} \\ \tilde{f}_z^{\mathrm{b}(1)} \\ \vdots \\ \tilde{f}_x^{\mathrm{b}(n)} \\ \tilde{f}_y^{\mathrm{b}(n)} \\ \tilde{f}_z^{\mathrm{b}(n)} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{a}} = \begin{bmatrix} \tilde{N}_{\mathrm{ax}}^{(1)} & \tilde{N}_{\mathrm{ay}}^{(1)} & \tilde{N}_{\mathrm{az}}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{\mathrm{ax}}^{(1)} & \tilde{N}_{\mathrm{ay}}^{(1)} & \tilde{N}_{\mathrm{az}}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{\mathrm{ax}}^{(1)} & \tilde{N}_{\mathrm{ay}}^{(1)} & \tilde{N}_{\mathrm{az}}^{(1)} & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & \vdots & & & & & \\ \tilde{N}_{\mathrm{ax}}^{(n)} & \tilde{N}_{\mathrm{ay}}^{(n)} & \tilde{N}_{\mathrm{az}}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{\mathrm{ax}}^{(n)} & \tilde{N}_{\mathrm{ay}}^{(n)} & \tilde{N}_{\mathrm{az}}^{(n)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{N}_{\mathrm{ax}}^{(n)} & \tilde{N}_{\mathrm{ay}}^{(n)} & \tilde{N}_{\mathrm{az}}^{(n)} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\boldsymbol{X}_{\mathrm{a}}=\left[k_{axx}\quad k_{axy}\quad k_{axz}\quad k_{ayx}\quad k_{ayy}\quad k_{ayz}\quad k_{azx}\quad k_{azy}\quad k_{azz}\quad \nabla_x^{\mathrm{b}}\quad \nabla_y^{\mathrm{b}}\quad \nabla_z^{\mathrm{b}}\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{W}_{\mathrm{a}}$ 为 $3n\times1$ 维加速度计测量噪声。

当方程数目大于未知参数个数时，可由最小二乘法求出未知参数，从而得到加速度计的脉冲当量矩阵和等效常值零偏：

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{a}}=(\boldsymbol{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{a}})^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{a}} \tag{11}$$

3.2.2　陀螺标定数据处理

在陀螺标定中，由于陀螺常值漂移很小，往往远小于地球自转角速率 $\boldsymbol{\omega}_{ie}$，并且转台转动时间很短，因此可以忽略陀螺常值漂移的影响，先标定陀螺脉冲当量矩阵。暂且不考虑陀螺常值漂移，把式（7）代入式（2）可得：

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{g}}\cdot\boldsymbol{N}_{\mathrm{g}} \tag{12}$$

在绕转台某个轴转动过程中，从转动起始时刻0至终止时刻T对上式求转动角度和，可得：

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{b}}+\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{K}_{\mathrm{g}}\cdot\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{g}} \tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{b}}=\sum_{t_k=0}^{T}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}(k)}^{\mathrm{b}}\cdot\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}}T_{\mathrm{s}})$ 为地球自转补偿量，T_{s} 为陀螺采样周期，虽然双轴位置转台没有角速率测量功能，但是可以利用转动轴上的陀螺输出大致估计出该角速率，并利用式（4）实时求得变换四元数 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}(k)}^{\mathrm{n}}$；$\boldsymbol{\Omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}$ 为转台转动前后读数之差值（参考输入）；$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{g}}=\sum_{t_k=0}^{T}N_{\mathrm{g}(k)}T_s$ 为转动过程中陀螺采样的总和。

设有m组陀螺转动测量，转台转动角度、地球自转补偿量和陀螺采样分别为 $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}(k)}$、$\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{b}(k)}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{g}}^{(k)}$（$k$=1,2,3…$m$），并记 $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{b}(k)}=\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{b}(k)}+\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}(k)}$，类似于加速度计标定的数据处理方法，有：

$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{g}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{g}}\boldsymbol{X}_{\mathrm{g}}+\boldsymbol{W}_{\mathrm{g}} \tag{14}$$

式中，$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{g}}=\begin{bmatrix}\tilde{\Omega}_x^{\mathrm{b}(1)}\\ \tilde{\Omega}_y^{\mathrm{b}(1)}\\ \tilde{\Omega}_z^{\mathrm{b}(1)}\\ \vdots\\ \tilde{\Omega}_x^{\mathrm{b}(m)}\\ \tilde{\Omega}_y^{\mathrm{b}(m)}\\ \tilde{\Omega}_z^{\mathrm{b}(m)}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{g}}=\begin{bmatrix}\tilde{\Sigma}_{gx}^{(1)} & \tilde{\Sigma}_{gy}^{(1)} & \tilde{\Sigma}_{gz}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\Sigma}_{gx}^{(1)} & \tilde{\Sigma}_{gy}^{(1)} & \tilde{\Sigma}_{gz}^{(1)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\Sigma}_{gx}^{(1)} & \tilde{\Sigma}_{gy}^{(1)} & \tilde{\Sigma}_{gz}^{(1)}\\ & & & & \cdots & & & & \\ \tilde{\Sigma}_{gx}^{(m)} & \tilde{\Sigma}_{gy}^{(m)} & \tilde{\Sigma}_{gz}^{(m)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\Sigma}_{gx}^{(m)} & \tilde{\Sigma}_{gy}^{(m)} & \tilde{\Sigma}_{gz}^{(m)} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{\Sigma}_{gx}^{(m)} & \tilde{\Sigma}_{gy}^{(m)} & \tilde{\Sigma}_{gz}^{(m)}\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{X}_{\mathrm{g}}=\left[k_{gxx}\quad k_{gxy}\quad k_{gxz}\quad k_{gyx}\quad k_{gyy}\quad k_{gyz}\quad k_{gzx}\quad k_{gzy}\quad k_{gzz}\right]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{W}_{\mathrm{g}}$ 为 $3m\times1$ 维陀螺测量噪声。

在求得陀螺脉冲当量矩阵 $\tilde{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{g}}$ 之后，可利用位置1和位置7标定陀螺常值漂移，假设在位置1陀螺平均采样为 $\tilde{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{g}}^{(0)}$，在位置7陀螺平均采样为 $\tilde{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{g}}^{(180)}$，则有[5]：

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{\omega}_U-\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{K}}_{\mathrm{g}}(\tilde{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{g}}^{(0)}+\tilde{\boldsymbol{N}}_{\mathrm{g}}^{(180)}) \tag{15}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{U}}=\left[0\quad 0\quad \omega_{\mathrm{ie}}\sin L\cos L\right]^{\mathrm{T}}$。由于标定陀螺常值漂移需要较长时间，因此在位置1和位置7采样时间可适当加长。

4　标定仿真及结论

仿真惯性器件信息之前，先对LSIMU标定模型参数进行设置，标定模型参数真值设置如表2中“真值”一栏所示，且

表2　LSIMU标定模型参数真值设置及其标定结果

Tab. 2　Parameter settings and simulation results of LSIMU calibration model

		$\boldsymbol{K}_{\mathrm{a}}$（m·s^{-2}/脉冲）			∇^{b} ($10^{-3}g$)	$\boldsymbol{K}_{\mathrm{g}}$（rad·s^{-1}/脉冲）			$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{b}}$/((°)·h^{-1})
		x	y	z		x	y	z	
真值	x	4.89×10^{-3}	3.9×10^{-6}	-1.2×10^{-6}	-2	9.25×10^{-6}	1.2×10^{-8}	1.5×10^{-8}	-0.15
	y	-0.1×10^{-6}	4.9×10^{-3}	2.1×10^{-6}	1.5	-2.4×10^{-8}	9.15×10^{-6}	-1.9×10^{-8}	0.1
	z	-0.1×10^{-6}	3.9×10^{-6}	4.92×10^{-3}	1.3	4.1×10^{-8}	1.1×10^{-8}	9.11×10^{-6}	-0.05
标定值	x	4.890×10^{-3}	3.757×10^{-6}	-1.152×10^{-6}	-2.000	9.250×10^{-6}	1.192×10^{-8}	1.498×10^{-8}	-0.150
	y	-0.042×10^{-6}	4.900×10^{-3}	2.195×10^{-6}	1.500	-2.407×10^{-8}	9.150×10^{-6}	-1.900×10^{-8}	0.100
	z	-0.100×10^{-6}	3.900×10^{-6}	4.920×10^{-3}	1.358	4.093×10^{-8}	1.093×10^{-8}	9.110×10^{-6}	-0.049

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

加速度计噪声设置为0.05mg，陀螺噪声设置为0.1 (º)/h，地理纬度取为L=40º，重力加速度大小取为g=9.801 665 m·s^{-2}。

假设初始时转台俯仰轴水平误差为0.2′，俯仰轴与真实北向的误差为0.5º，并且由于水平仪测量误差，转台台面绕俯仰轴方向存在0.1′误差。按照标定方案仿真生成惯性器件输出信息如表3和表4所示，其中转台在位置1和位置7采样时间均为500 s，其它位置采样时间均为100 s，而在前后两个位置间转动所需时间均为30 s，总计标定时间为1680 s。

表3 加速度计输出仿真

Tab 3. Accelerometer output simulation

位置	参考输入/g			采样值		
	x	y	z	x	y	z
1	0	0	1	4.383	-3.794	1989.619
2	-1	0	0	-2000.419	-2.981	-2.745
3	0	1	0	2.473	1997.340	-3.071
4	1	0	0	2008.441	-3.016	-2.664
5	0	-1	0	5.547	-2003.339	-2.339
6	0	0	1	4.441	-3.969	1989.619
7	0	0	1	4.616	-3.911	1989.619

最后利用式（10）（14）（15）对仿真数据进行标定处理，标定结果如表2中“标定值”一栏所示。从表中可以看出，标定值和真值相比存在一定的误差。在$\boldsymbol{K}_{\mathrm{a}}$中$k_{axy}$的标定值和真值误差最大，相对误差为：

$$\left|(\tilde{k}_{axy}-k_{axy})/k_{ayy}\right|=29.2\times10^{-6}$$

在∇^{b}中z轴加速度计常值偏置误差为0.058mg。在$\boldsymbol{K}_{\mathrm{g}}$中$k_{gxy}$的误差最大为8.7×10^{-6}，而陀螺常值漂移误差$\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{b}}$均很小。

表4 陀螺输出仿真

Tab. 4 Gyro output simulation

位置	参考输入/rad			采样值		
	x	y	z	x	y	z
1→2	0	π/2	0	-318.212	171853.768	-106.515
2→3	0	0	π/2	-262.271	571.782	172427.615
3→4	0	0	π/2	-67.814	339.613	172427.020
4→5	0	0	π/2	-297.724	142.736	172428.292
5→6	π/2	0	0	169635.358	346.431	-664.819
6→7	0	0	-π/2	163.415	-472.621	-172271.289
1	-	-	-	0.115	6.063	5.164
7	-	-	-	0.026	-6.147	5.179

进一步仿真结果表明：加速度计标定误差不受北向基准误差影响，但随着水平基准误差的增加而增大，当水平基准误差为0.4′时，最大误差将达到116 ×10^{-6}；陀螺脉冲当量矩阵标定误差基本不受水平基准误差影响（当水平基准误差为角分级量级时），但是，如果不考虑地球自转角速度的补偿，则最大误差将达到1000 ×10^{-6}，并且转动时间越长误差也越大，如果初始北向基准误大于5º，则地球自转角速度补偿的效果会受到限制，最大误差将超过100×10^{-6} 。由此可见，在LSIMU双轴位置转台标定中，进行地球自转角速度的补偿是必要的，为了得到高精度的标定结果，初始水平基准误差和北向基准误差都不能太大。因此，通过仿真证明了利用本文前言处提到的双轴位置转台对相应的LSIMU进行标定是合适的。

参考文献：

[1] 袁信，郑谔. 捷联式惯性导航原理[M]. 北京：航空专业教材编审组，1985
YUAN Xin, ZHENG E. The principle of strapdown inertial navigation[M]. Beijing: Edit Workgroup of Aviation Textbook, 1985.

[2] Camberlein L, Mazzananti F. Calibration technology for laser gyro strapdown inertial navigation systems[C]//Symposium Gyro Technology. Stuttgart, Germany, 1985.

[3] 张卫东，刘恒春. 捷联惯性测量组合标定的仿真研究[J]. 中国惯性技术学报，2000，8(2)：10-15.
ZHANG Wei-dong, LIU Heng-chun. Simulation research on strapdown IMU calibration[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2000, 8(2): 10-15.

[4] Savage P G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design, Part 1: Attitude algorithms[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(2): 19-28.

[5] 缪玲娟，田海. 车载激光捷联惯导系统的快速初始对准及误差分析[J]. 北京理工大学学报，2002，20(2)：205-209.
MIAO Ling-juan, TIAN Hai. Fast initial alignment and its errors of RLG strapdown inertial navigation system for land vehicle[J]. Journal of Beijing Institute of Technology, 2002, 20(2): 205-209.

[6] 林玉荣，邓正荣. 激光陀螺捷联惯导系统中惯性器件误差的系统级标定[J]. 哈尔滨工业大学学报，2001，33(1)：112-115.
LIN Yu-rong, DENG Zheng-long. Systematic calibration for inertial instruments errors in laser gyro strapdown inertial navigation system[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2001, 33(1): 112-115.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

文章编号: 1671- 4598(2006) 08- 1087- 02　　中图分类号: V249. 3　　文献标识码: A

惯导/里程仪组合导航系统算法研究

严恭敏[1]，秦永元[1]，马建萍[2]
(1. 西北工业大学 自动化学院，陕西 西安　710072; 2. 中国航空计算技术研究所，陕西 西安　710068)

摘要: 惯导系统误差随着导航时间而增长，而里程仪测量误差一般随着运载体行驶距离而增加，惯导系统和里程仪具有互补性，推导了简化的惯导/里程仪组合导航系统的卡尔曼滤波方程，研究了里程仪刻度系数误差校正的方法，并提出了里程仪打滑和滑行故障的判断准则，仿真结果表明: 经过里程仪刻度系数校正后，组合导航系统能有效提高定位精度，并且具备一定的容错能力。

关键词: 惯性导航; 里程仪; 组合导航; 刻度系数修正; 故障检测; 仿真

Research on INS/OD Integrated Navigation System Algorithm

Yan Gongmin[1], Qin Yongyuan[1], Ma Jianping[2]
(1. Department of Automation Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an　710072, China;
2. China Aeronautics Computing Technique Research Institute, Xi'an 710068, China)

Abstract: Errors in the Inertial Navigation System (INS) accumulate over time, whereas odometer (OD) measurement errors increase relative to distance. The mutual compensation of INS and OD combines them into an integrated navigation system with high performance. The Kalman filter dynamic model for a simplified INS/OD integrated navigation system is deduced. The OD scale factor error rectification algorithm is investigated, and the fault detection criteria for OD skidding and sliding error are presented. Simulation results show that after OD scale factor error rectification the integrated system position accuracy is improved effectively, and the system is capable of fault tolerance to some extent.

Key words: inertial navigation; odometer; integrated navigation; scale factor error rectification; fault detection; simulation

0　引言

惯导系统以其提供导航信息的全面性和完全的自主性，得到了广泛的应用，但惯导误差随着时间不断积累。在车辆导航应用中，由姿态系统和里程仪组成的航位推算系统，和惯导系统一样具有自主性，但是航位推算系统误差随着时间增长变化较小，特别是在载体低速运动时。虽然由低等精度的惯导系统和里程仪组成的组合导航系统无法进行完全的自主导航，定位误差随时间迅速增长[1-2]，但是中等或高等精度的惯导系统具有较强的姿态保持和跟踪能力，它可以与里程仪构成高精度的自主导航系统。例如法国的“西格玛 30”军用车辆导航系统，它由捷联惯导系统和 GPS 接收机组成，在没有 GPS 进行修正的情况下，用里程计作辅助，定位精度可达 5m+ 行程的 0.1%[3]。

惯导/里程仪组合导航系统精度提高的主要问题之一是提高里程仪的测量精度。本文以载体简单的一维运动为例，推导了惯导/里程仪组合导航系统的卡尔曼滤波方程，可观测性分析指出里程仪刻度系数误差是不可观测的，研究了里程仪刻度系数误差校正的方法，并提出了里程仪打滑和滑行故障的判断准则。最后进行了仿真，仿真结果表明: 经过里程仪刻度系数校正后，组合导航系统有效提高了定位精度，并且具有一定的容错能力。

收稿日期: 2006- 01- 19;　修回日期: 2006- 02- 25。

作者简介: 严恭敏(1977-)，男，福建建瓯人，博士研究生，主要从事捷联惯性导航算法、组合导航系统理论研究。

秦永元(1946-)，男，江苏常熟市人，教授，博士生导师，主要从事惯性导航技术及卡尔曼滤波理论的研究。

1　惯导/里程仪组合导航系统滤波动态模型

1.1　载体运动方程

为了分析简单，本文假设载体是在一维空间中运动。如果载体的加速度为 a，而用 v 和 s 分别表示其速度和位置，参见

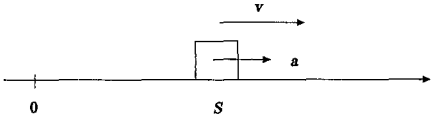


图 1　载体运动示意图

图 1，则载体的运动方程可以写成:

$$\dot{v} = a \tag{1a}$$

$$\dot{s} = v \tag{1b}$$

以步长 $T = t_k - t_{k-1}$ 对方程 (1) 进行离散化，并假设加速度 a 在一个步长内为常值 a_{k-1}，则有

$$v_k = v_{k-1} + a_{k-1}T \tag{2a}$$

$$s_k = s_{k-1} + v_{k-1}T + \frac{1}{2}a_{k-1}T^2 \tag{2b}$$

通过设计加速度序列 a_k，并设定初始值 v_0 和 s_0，即可对载体的运动进行数字仿真。

1.2　系统状态方程

惯性导航解算就是对加速度计的测量值进行积分，一次积分得载体速度，二次积分得载体位置。假设加速度计对载体的加速度测量值为 a，测量误差包含随机常值零偏误差 ∇ 和随机误差 w_a，即 $a = a + \nabla + w_a$，则惯性导航解算得载体的速度和位置分别为:

$$v_k = v_{k-1} + a_{k-1}T \tag{3a}$$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$s_k = s_{k-1} + v_{k-1}T + \frac{1}{2}a_{k-1}T^2 \quad (3b)$$

其中 v_0 和 s_0 分别为惯导系统初始设定的速度和位置。

通过 (3) 式求误差，得惯性导航解算速度误差和位置误差方程:

$$\delta v_k = \delta v_{k-1} + \delta a_{k-1}T = \delta v_{k-1} + \nabla_{k-1}T \quad (4a)$$

$$\delta s_k = \delta s_{k-1} + \delta v_{k-1}T + \frac{1}{2}\delta a_{k-1}T^2 = \delta s_{k-1} + \delta v_{k-1}T + \frac{1}{2}\nabla_{k-1}T^2 \quad (4b)$$

并且加速度计随机常值零偏误差 ∇ 满足:

$$\nabla_k = \nabla_{k-1} = \nabla \quad (4c)$$

理论上，里程仪测量的是前后相邻时刻载体行驶的路程，即:

$$m_k = |s_k - s_{k-1}| \quad (5)$$

从中可得载体从 t_{k-1} 时刻到 t_k 时刻运动的平均速度，即:

$$\bar{v} = \frac{s_k - s_{k-1}}{T} = \frac{pm_k}{T} \quad (6)$$

其中 $p = \mathrm{sign}(s_k - s_{k-1})$，sign (·) 为符号函数，它表示载体的运动方向。里程仪测量的主要误差是刻度系数误差 δK，假设其为随机常值，即:

$$\delta K_k = \delta K_{k-1} = \delta K \quad (7)$$

实际中，里程仪测量值 m_k 与真实值 m_k 之间的关系为:

$$m_k = (1 + \delta K_k)m_k \quad (8)$$

和惯导系统定位一样，由里程仪测量值 m_k 也可进行载体定位解算 (航位推算):

$$s_{mk} = s_{mk-1} + p\,m_k \quad (9)$$

由 (4) 式和 (7) 式构成惯导/里程仪组合系统的状态方程:

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{x}_{k-1} + w_{k-1}$$

其中: $\boldsymbol{x}_k = [\nabla_k \quad \delta v_k \quad \delta s_k \quad \delta K_k]^T$

$$F_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ T & 1 & 0 & 0 \\ 1/2\cdot T^2 & T & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{E}[w_k] = 0$、$\boldsymbol{E}[w_k w_j^T] = \boldsymbol{Q}_k\delta(k,j)$，$\boldsymbol{Q}_k$ 为系统噪声方差阵。

1.3 测量方程

以从 t_{k-1} 时刻到 t_k 时刻惯导解算的位移增量与里程仪测量的位移增量之差作为量测，

$$z_k = (s_k - s_{k-1}) - p\,m_k = [(s_k + \delta s_k) - (s_{k-1} + \delta s_{k-1})] - p(1 + \delta K_k)m_k =$$

$$(s_k - s_{k-1} - pm_k) + (\delta s_k - \delta s_{k-1}) - \delta K_k\cdot pm_k =$$

$$\delta v_{k-1}T + \frac{1}{2}\nabla_{k-1}T^2 - \delta K_k\cdot pm_k = -\frac{1}{2}\nabla_k T^2 + \delta v_k T - \delta K_k\cdot pm_k \quad (11)$$

由此得惯导/里程仪组合系统的测量方程:

$$z_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k + n_k \quad (12)$$

其中 $\boldsymbol{H}_k = [-1/2\cdot T^2 \quad T \quad 0 \quad -pm_k]$，$\boldsymbol{E}[n_k] = 0$、$\boldsymbol{E}[n_k n_j^T] = R_k\delta(k,j)$，$R_k$ 为量测噪声方差。

2 惯导/里程仪组合导航系统的技术处理

2.1 滤波方程的降阶处理

对系统方程 (10) 和量测方程 (12) 中的 $\boldsymbol{F}_k$ 和 $\boldsymbol{H}_k$ 矩阵进行可观测性分析，其可观测性矩阵为:

$$\boldsymbol{O}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_k \\ \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{F}_k \\ \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{F}_k^2 \\ \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{F}_k^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2\cdot T^2 & T & 0 & -pm_k \\ 1/2\cdot T^2 & T & 0 & -pm_k \\ 3/2\cdot T^2 & T & 0 & -pm_k \\ 5/2\cdot T^2 & T & 0 & -pm_k \end{bmatrix} \quad (13)$$

在系统中只有两个参数，即采样周期 T 和里程仪测量值 m_k，是可变的。T 固定时 m_k 的变化意味着载体运动速度的变化。显然，$\boldsymbol{O}_k$ 的秩等于 2，由此可知系统 ($\boldsymbol{F}_k$，$\boldsymbol{H}_k$) 是不可观测的，其可观测的状态数 (或状态线性组合) 为 2。观察状态方程 (10) 和测量方程 (12)，观测量中不包含 δs_k 的任何信息，因而 δs_k 是不可观测的。由于 δs_k 不可观测，因此，可以通过降低 δv_k，在估计出 δv_k 后及时实施反馈校正，抑制 δv_k 的发散速度，从而降低定位误差 δs_k。

对滤波方程进行降阶处理，测量方程 (11) 式可整理成:

$$z_k = -\frac{1}{2}\nabla_k T^2 + \delta v_k T - \delta K_k\cdot pm_k =$$

$$-\frac{1}{2}\nabla_k T^2 + (\delta v_k - \delta K_k\bar{v}_{mk})T \quad (14)$$

其中又有如下表示式成立:

$$(\delta v_k - \delta K_k\bar{v}_{mk}) = (\delta v_{k-1} + \nabla_{k-1}T) - \delta K_{k-1}\bar{v}_{mk}) =$$

$$(\delta v_{k-1} - \delta K_{k-1}\bar{v}_{mk}) + \nabla_{k-1}T \quad (15)$$

因此，滤波方程 (10) 式和 (12) 式可以降阶简化为:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{F}}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + \hat{\boldsymbol{w}}_{k-1} \quad (16a)$$

$$z_k = \hat{\boldsymbol{H}}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + n_k \quad (16b)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{x}}_k = [\nabla_k \quad \delta\hat{v}_k]^T = [\nabla_k \quad \delta v_k - \delta K_k\bar{v}_{mk})]^T$，$\hat{\boldsymbol{F}}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{bmatrix}$，$\hat{\boldsymbol{w}}_{k-1}$，为系统噪声方差阵，$\hat{\boldsymbol{H}}_k = [-1/2\cdot T^2 \quad T]^T$，该系统为完全可观测系统。

当滤波方程 (16) 滤波稳定后，$\delta\hat{v}_k$ 可以得到最优无偏估计，而 δv_k 的滤波误差为 $\delta K_k\bar{v}_{mk}$ (这里认为 δK_k 是不可观测的，而 δv_k 是可观测的)，即里程仪刻度系数误差越大、载体的行驶速度越大，δv_k 的滤波误差就越大，这也说明了惯导/里程仪组合导航精度在一定程度上取决于里程仪的测量精度；当载体静止时，∇_k 和 δv_k 的滤波估计均是无偏的，相当于惯导系统零速修正的效果。

2.2 里程仪刻度系数的校正

由于惯导系统在短时间内具有较高的测量精度，因此里程仪刻度系数误差 δK 有可能通过惯导系统标定出来。首先载体静止，应用方程(16) 进行滤波估计，滤波稳定后得到 ∇_k 和 δv_k 的无偏估计，并对惯导系统实施校正，尽量降低惯导系统误差；接着载体在短时间内加速到速度较大值，这过程中惯导系统速度误差 δv_k 变化很小；最后通过惯导输出与里程仪测量之差估计里程仪刻度系数误差。当惯导误差比较小时，可以认为量测 z_k 中包含的主要成份是里程仪刻度系数误差，(11) 式可整理成:

$$z_k = -\frac{1}{2}\nabla_k T^2 + \delta v_k T - \delta K_k\cdot pm_k = \left(\frac{-\nabla_k T/2 + \delta v_k}{\bar{v}_{mk}} - \delta K_k\right)\cdot pm_k \quad (17)$$

因此，当惯导系统经过滤波估计和校正之后，其残余加速度计零偏 ∇_k 和速度误差 δv_k 均很小，而载体行驶速度 $\bar{v}_{mk}$ 比较大时，由 (17) 式可求得:

$$\delta K = -\left(\frac{-\nabla_k T/2 + \delta v_k}{\bar{v}_{mk}} - \delta K_k\right) = -\frac{z_k}{pm_k} \quad (18)$$

近似代替 δK，即得到里程仪刻度系数误差，其估计误差等于速度相对误差 $\frac{-\nabla_k T/2 + \delta v_k}{\bar{v}_{mk}}$。

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2.3　里程仪测量故障（打滑或滑行）的判断

载体运动过程中里程仪出现故障的常见形式是打滑和滑行, 打滑时里程仪测量的路程远远大于载体实际行驶过的路程（$m \gg m_k$）, 而滑行时正好相反（$m \ll m_k$）。由于惯导系统在短时间内具有较高的测量精度, 在组合系统实时滤波校正过程中载体速度误差 δv_k 一般很小, 如果出现打滑或滑行, 则前后相邻时刻里程仪测量值与惯导系统测量值之间将存在较大差别, 即:

(1)、打滑时（Γ 为打滑判断阈值, 取值范围 $\infty > \Gamma > 0$）

$$m_k - | s_k - s_{k-1} | > \Gamma \tag{19a}$$

(2)、滑行时（Λ 为滑行判断阈值, 取值范围 $-|s-s_{k-1}| < \Lambda < 0$）

$$m_k - | s_k - s_{k-1} | < \Lambda \tag{19b}$$

Γ 和 Λ 在 0 附近的选择依赖于惯导解算的速度误差和里程仪的噪声（特别是量化噪声）, 为了有效判断里程仪故障, 维持惯导速度误差为小量并降低里程仪量化噪声是必要的。随着里程仪连续故障次数的增加, 惯导解算误差不断增大, 故障判断阈值 Γ 和 Λ 应具有自适应调整判断范围的能力。

如果里程仪测量出现故障, 假设从 k 时刻之后开始共连续出现 N 步故障, 则在故障期间无法进行组合导航, 载体定位只能由惯导系统给出（或由惯导系统导航值减去对应时刻的误差预测值）。当里程仪恢复正常后, 重新组合滤波的初值及其方差可由故障之前的相应值预测得到。假设故障前的 k 时刻状态最优估计值及其方差分别为 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 和 $\hat{\boldsymbol{P}}_k$, 则 N 步之后的滤波初值及方差选择为 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+N}$ 和 $\hat{\boldsymbol{P}}_{k+N}$ 的 N 步预测值[4], 即:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k+N} = \hat{\boldsymbol{x}}_{k+N,k} = \hat{\boldsymbol{F}}_{k+N,k}\hat{\boldsymbol{x}}_k\hat{\boldsymbol{F}}^T_{k+N,k} \tag{20a}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_{k+N} = \hat{\boldsymbol{P}}_{k+N,k} = \hat{\boldsymbol{F}}_{k+N,k}\hat{\boldsymbol{P}}_k\hat{\boldsymbol{F}}^T_{k+N,k} + \sum_{i=k+1}^{k+N}\hat{\boldsymbol{F}}_{k+N,i}\hat{\boldsymbol{Q}}_{k-1}\hat{\boldsymbol{F}}^T_{k+N,i} \tag{20b}$$

其中 $\hat{\boldsymbol{F}}_{k+N,k} = \hat{\boldsymbol{F}}_{k+N}\cdots\hat{\boldsymbol{F}}_{k+1}\hat{\boldsymbol{F}}_k$。如果 k 时刻已经实施了滤波反馈校正, 则 N 步之后的状态预测值（即 $k+N$ 时刻的滤波初值）为零, 即 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k+N} = 0$; 如果里程仪故障发生时间较长, 上述预测误差将可能越来越大, 里程仪恢复正常后可考虑不利用预测值而重新开始滤波。

3　仿真

主要仿真参数设置如下: 加速度计随机常值零偏 $\nabla = 10^{-4}$ g ≈ 0.001 m·s^{-2}（g 为重力加速度大小）, 噪声水平 10^{-5} g ≈ 0.0001 m·s^{-2}; 里程仪刻度系数误差 $\delta K = 0.2\%$。

载体运动过程为: 首先静止 50 s, 接着在 50–60 s 以加速度 1 m·s^{-2} 加速, 之后在 60–200 s 一直匀速行驶。各种仿真结果如图 2 所示。其中小图(a)中实线为航位推算误差, 点画线为惯性导航定位误差, 可见惯性导航定位误差随时间迅速增长; 小图(b)中实线为航位推算误差, 点画线为惯性导航/里程仪组合定位误差, 可见组合导航定位精度取决于航位推算的精度; 小图(c)中在加速阶段完后校正里程仪刻度系数, 实线为航位推算误差, 点画线为惯性导航/里程仪组合定位误差, 可见经过里程仪刻度系数校正后, 航位推算误差和组合导航定位误差与小图(b)相比都大大降低了, 但是组合导航定位误差趋势取决于航位推算误差的趋势; 仿真小图(d)时, 假设在 100–110 s 里程仪出现打滑故障, 在 150–160 s 里程仪出现滑行故障, 由于里程仪出现故障, 无法实现航位推算, 图中只给出惯性导航/里程仪组合定位误差（当里程仪出现故障时完全由惯导进行定位）, 小图(d)的结果和小图(c)的结果基本一致, 可见组合导航系统具有一定的容错能力。

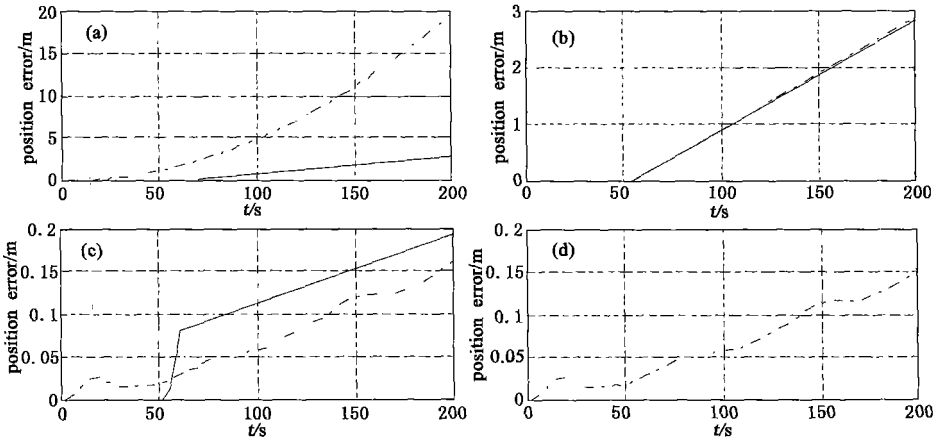


图 2　仿真结果

4　结论

惯性导航误差随着导航时间而增长, 而里程仪测量误差一般随着运载体行驶距离而增加, 惯导系统和里程仪具有互补性: 首先, 由它们组成的组合导航系统能有效抑制导航精度随时间的发散; 其次, 利用惯导系统短时间导航的高精度特性, 能够对里程仪刻度系数误差进行校正; 最后, 面对里程仪出现打滑或滑行故障, 组合导航系统具有故障判断的能力, 因而具有一定的容错功能。

里程仪刻度系数误差的校正有赖于惯导系统零速修正的效果, 即加速度计随机常值零偏和零速的估计精度, 在三维空间导航系统中它还与姿态误差角等因素有关。实际应用中里程仪刻度系数误差是随应用环境而变化的, 载车行驶过程中可能有必要多次进行校正。上述问题都有待于更进一步的深入研究。

参考文献:

[1] 冯绍军, 胡国辉, 袁信. 低成本 IMU/GPS 组合导航系统研究[J]. 南京航空航天大学学报. 1998, 30(6): 641–645.

[2] 沈晓蓉, 滕继涛, 范跃祖. GPS/DR 组合导航系统在车辆连续定位中的研究[J]. 压电与声光. 2003, 25(6): 476–479.

[3] 刘占荣, 刘全. 自行武器系统的定位定向方法探讨[J]. 情报指挥控制系统与仿真技术, 2003, 1: 33–36.

[4] Ludeman L C. 随机过程——滤波、估计与检测[M]. 邱天爽, 等译. 北京: 电子工业出版社, 2005.

[5] 吕小红, 张玲翔. 飞航导弹发射车自动定位定向技术[J]. 飞航导弹, 1995, 5: 55–62.

[6] 朱庄生, 万德钧, 王庆. 航位推算累积误差实时修正算法研究[J]. 中国惯性技术学报, 2003, 11(3): 7–11.

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

文章编号:1006 - 9348(2006)10 - 0036 - 05

捷联惯导系统静基座初始对准精度分析及仿真

严恭敏,秦永元
(西北工业大学自动化学院,陕西 西安 710072)

摘要:在利用卡尔曼滤波器对捷联惯导系统(SINS)进行静基座初始对准中,由于系统的不完全可观测性,使得有些状态没有滤波效果,有些状态的估计精度受到限制。对SINS静基座初始对准卡尔曼滤波方程进行了可观测性分析,提出了状态降阶的处理方法,并得到了各状态估计的极限精度公式。最后进行了软件仿真,仿真结果表明:降阶滤波器和全降阶滤波器的估计精度基本相同,但是前者计算量更小,并且在滤波计算中能够消除不可观测状态的不利影响。

关键词:捷联惯导系统;初始对准;卡尔曼滤波;可观测性;仿真
中图分类号:V249.3 **文献标识码**:A

Initial Alignment Accuracy Analysis and Simulation of Strapdown Inertial Navigation System on a Stationary Base

YAN Gong - min, QIN Yong - yuan
(Department of Automation Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shanxi 710072, China)

ABSTRACT: In the process of initial alignment for an inertial navigation system (SINS) on a stationary base via Kalman filter, some states have no filtering effect as the system is not completely observable. Moreover, the accuracy of the states which have filtering effect are limited to some extend for the poor observability. In this paper, the observability for the initial alignment equations of SINS on a stationary base is analyzed, and the reduced - order Kalman filter is established with each state estimating accuracy limitation proposed. Simulation results show that the reduced - order Kalman filter has the some accuracy as the traditional full - order estamation method, but the former has less calculating consumption and is not sensitive to the bad effect of the unobservable states.

KEYWORDS: Strapdown inertial navigation system (SINS); Initial alignment; Kalman filtering; Observability; Simulation

1 引言

捷联惯导系统(SINS)初始对准的目的是为了获得载体坐标系相对于导航坐标系的坐标变换矩阵,即姿态矩阵,对准精度将直接影响着惯导系统的导航精度。准确性和快速性是初始对准的两个重要指标。SINS静基座初始对准通常可分为粗对准和精对准两个阶段。在粗对准阶段,利用地球自转角速度和重力加速度作为参考量,通过惯性器件的测量输出建立粗略的导航计算坐标系;在精对准阶段,假设导航计算坐标系和真实导航坐标系间的失准角误差为小角度误差矢量,建立失准角误差模型,利用加速度计的输出,通过卡尔曼滤波估计出失准角,从而获得准确的姿态矩阵。

收稿日期:2005 - 09 - 11

在SINS静基座初始对准卡尔曼滤波器中,水平加速度计常值零偏和东向陀螺常值漂移是不可观测的,因而它们没有滤波效果,同时也使得姿态角误差、北向和天向陀螺常值漂移的估计精度受到限制。本文对卡尔曼滤波方程可观测性进行了分析,去除方程中不可观测的状态,提出了降阶初始对准卡尔曼滤波方程,并对滤波器状态的估计精度进行了分析。最后给出了软件仿真结构图和效果图,仿真结果表明:降阶滤波器和全降阶滤波器的估计精度基本相同,但是前者计算量更小,并且能够消除不可观测状态对滤波器的不利影响。

2 SINS静基座初始对准模型

首先给出一些文中用到的坐标系的定义:地心惯性坐标系记为i系;地球坐标系记为e系;选取东 - 北 - 天(ENU)地

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

理坐标系为导航参考坐标系，记为 n 系，导航计算坐标系记为 n' 系；载体坐标系记为 b 系，其三坐标轴分别平行与载体横轴、纵轴和立轴，选右 - 前 - 上为正向。

2.1 初始对准状态方程

用 C_b^n 表示姿态矩阵，则 SINS 姿态矩阵微分方程为：

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \Omega_{nb}^b \tag{1}$$

式中，Ω_{xy} 表示由矢量 ω_{xy}^x 构成的反对称矩阵。用 $\tilde{\Omega}_{nb}^b$ 表示 Ω_{nb}^b 的测量值，定义测量值和真实值之间的误差为：

$$\delta\Omega_{nb}^b = \tilde{\Omega}_{nb}^b - \Omega_{nb}^b \tag{2}$$

假设 n 系至 n' 系的转动为小角度，由姿态角误差矢量 φ^n 表示，则有等式成立：

$$C_b^{n'} = (I_{3\times3} - (\varphi^n \times))C_b^n$$

即

$$C_n^{n'} = I_{3\times3} - (\varphi^n \times) \tag{3}$$

其中，$(\varphi^n \times)$ 表示由 φ^n 构成的反对称矩阵，$C_b^{n'}$ 表示姿态矩阵计算值。类似于(1)式，姿态矩阵计算值 $C_b^{n'}$ 应当满足微分方程：

$$\dot{C}_b^{n'} = C_b^{n'} \tilde{\Omega}_{nb}^b \tag{4}$$

将(2)式和(3)式代入(4)式得：

$$-(\dot{\varphi}^n \times)C_b^n + (I_{3\times3} - (\varphi^n \times))\dot{C}_b^n = (I_{3\times3} - (\varphi^n \times))C_b^n(\Omega_{nb}^b + \delta\Omega_{nb}^b) \tag{5}$$

展开上式，并略去关于 φ^n 和 $\delta\Omega_{nb}^b$ 的二阶小量，得：

$$(\dot{\varphi}^n \times)C_b^n = -C_b^n\delta\Omega_{nb}^b$$

即

$$(\dot{\varphi}^n \times) = -C_b^n\delta\Omega_{nb}^b C_n^b \tag{6}$$

根据反对称阵相似变换性质，上式写成矢量形式为：

$$\dot{\varphi}^n = -C_b^n\delta\omega_{nb}^b \tag{7}$$

另外，有矢量之间的和式关系：

$$\omega_{ib}^b = \omega_{ie}^b + \omega_{en}^b + \omega_{nb}^b \tag{8}$$

在静基座初始对准中，不考虑导航坐标系相对地球坐标系的转动，即有 $\delta\omega_{en}^b = 0_{3\times1}$，因而对(8)式求误差并代入(7)式得：

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^n &= -C_b^n(\delta\omega_{ib}^b - \delta\omega_{ie}^b)\\ &= -C_b^n[\delta\omega_{ib}^b - (C_{n'}^b\omega_{ie}^n - \omega_{ie}^b)]\\ &= -C_b^n\delta\omega_{ib}^b + C_{n'}^n\omega_{ie}^n - \omega_{ie}^n\\ &= -\delta\omega_{ib}^n + \varphi^n \times \omega_{ie}^n\end{aligned} \tag{9}$$

假设陀螺测量误差 $\delta\omega_{ib}^b = \tilde{\omega}_{ib}^b - \omega_{ib}^b$ 由常值漂移误差 ε^b 和随机误差 w_g^b 组成，即 $\delta\omega_{ib}^b = \varepsilon^b + w_g^b$，并记 $\varepsilon^n = C_b^n\varepsilon^b$ 和 $w_g^n = C_b^n w_g^b$，则展开(9)式得：

$$\dot{\phi}_E^n = \omega_U\phi_N^n - \omega_N\phi_U^n - \varepsilon_E^n - w_{gE}^n \tag{10a}$$

$$\dot{\phi}_N^n = -\omega_U\phi_E^n - \varepsilon_N^n - w_{gN}^n \tag{10b}$$

$$\dot{\phi}_U^n = \omega_N\phi_E^n - \varepsilon_U^n - w_{gU}^n \tag{10c}$$

式中 $\omega_N = \omega_{ie}\cos L$，$\omega_U = \omega_{ie}\sin L$，$L$ 表示当地地理纬度。

至此，由(10)式，并考虑到关于陀螺测量误差和加速度计测量误差(见 2.2 小节)的假设，可得 SISN 静基座初始对准状态方程为：

$$\dot{X} = FX + w \tag{11}$$

其中 $X = [\phi_E^n \quad \phi_N^n \quad \phi_U^n \quad \varepsilon_E^n \quad \varepsilon_N^n \quad \varepsilon_U^n \quad \nabla_E^n \quad \nabla_N^n]^T$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \omega_U & -\omega_N & & & \\ -\omega_U & 0 & 0 & -I_{3\times3} & & 0_{3\times2} \\ \omega_N & 0 & 0 & & & \\ & & & 0_{5\times8} & & \end{bmatrix}$$

$$w = [-w_{gE}^n \quad -w_{gN}^n \quad -w_{gU}^n \quad 0_{5\times1}]^T$$

$$E[w(t)] = 0_{8\times1}, E[w(t)w^T(\tau)] = \begin{bmatrix} Q_{wg}^n & 0_{3\times5} \\ 0_{5\times8} & \end{bmatrix}\delta(t,\tau)$$

假设陀螺随机误差 w_g^b 的方差阵为 $Q_{wg}^b = E[w_g^b(t)w_g^{bT}(\tau)] = \mathrm{diag}([q_{gx} \quad q_{gy} \quad q_{gz}])^2\delta(t,\tau)$，则 $w_g^n = C_b^n W_g^b$ 的方差阵为 $Q_{wg}^n = E[w_g^n(t)w_g^{nT}(\tau)] = C_b^n Q_{wg}^b C_n^b\delta(t,\tau)$。

2.2 初始对准测量方程

在静基座初始对准中，加速度计输出的是重力加速度的测量值，不考虑任何误差时理论上应当有：

$$-g^n = C_b^n f^b \tag{12}$$

其中 $g^n = [0 \quad 0 \quad -g]^T$，$g$ 为重力加速度大小，f^b 为加速度计的比力输出。由于加速度计测量误差和姿态矩阵的计算误差，实际上加速度计的输出在 n' 系的投影为：

$$f^{n'} = C_b^{n'}\tilde{f}^b \tag{13}$$

将(3)式代入上式展开，并略去关于 φ^n 和加速度计测量误差 $\delta f^b = \tilde{f}^b - f^b$ 的二阶小量，得：

$$\begin{aligned}f^{n'} &= (I_{3\times3} - (\varphi^n \times))C_b^n(f^b + \delta f^b)\\ &\approx -g^n + \varphi^n \times g^n + C_b^n\delta f^b\end{aligned} \tag{14}$$

假设加速度计测量误差 δf^b 由常值零偏 ∇^b 和随机误差 v_a^b 组成，即 $\delta f^b = \nabla^b + v_a^b$，并记 $\nabla^n = C_b^n\nabla^b$ 和 $v_a^n = C_b^n v_a^b$，由于天向比力测量分量和水平姿态角误差耦合很弱，因此不考虑天向分量，展开(14)式取前两分量可得：

$$f_E^{n'} = -g\phi_N^n + \nabla_E^n + v_{aE}^n \tag{15a}$$

$$f_N^{n'} = -g\phi_E^n + \nabla_N^n + v_{aN}^n \tag{15b}$$

至此，由(15)式，可得 SINS 静基座初始对准测量方程为：

$$Z = HX + v \tag{16}$$

其中 $Z = [f_E^{n'} \quad f_N^{n'}]^T$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -g & & \\ g & 0 & 0_{2\times4} & I_{2\times2} \end{bmatrix}$$

$$v = [v_{aE}^n \quad v_{aN}^n]^T$$

$$E[v(t)] = 0_{2\times1},$$

$$E[v(t)v^T(\tau)] = \begin{bmatrix} (Q_{va}^n)_{11} & (Q_{va}^n)_{12} \\ (Q_{va}^n)_{21} & (Q_{va}^n)_{22} \end{bmatrix}\delta(t,\tau)$$

假设加速度计随机误差 v_a^b 的方差阵为 $Q_{va}^b = E[v_a^b(t)v_a^{bT}(\tau)]$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$= \mathrm{diag}([q_{ax} \quad q_{ay} \quad q_{az}])^2\delta(t,\tau)$，则 $v_a^n = C_b^n v_a^b$ 的方差阵为 $Q_{va}^n = E[v_a^n(t)v_a^{nT}(\tau)] = C_b^n Q_{va}^b C_n^b \delta(t,\tau)$，$(Q_{va}^n)_{ij}$ 表示矩阵 Q_{va}^n 的第 i 行第 j 列元素。

综上所述，(11) 式和(16) 式就是 SINS 静基座初始对准卡尔曼滤波的数学模型。

3 初始对准精度分析及滤波方程简化

对(11) 式和(16) 式的系统模型 F 阵和 H 阵作观测性分析可知，其观测矩阵的秩为 5，因此系统中有三个不可观测状态(或状态的线性组合)。文献[1] 指出，在 ϕ_N^n 和 ∇_E^n、ϕ_E^n 和 ∇_N^n、ϕ_U^n 和 ε_E^n 三对状态中，每对状态中均有一个是不可观测的。初始对准的目标主要是估计出姿态角误差，因此通常选取 ∇_E^n、∇_N^n 和 ε_E^n 为不可观测状态。

3.1 可观测性和精度分析

本小节中暂且不考虑陀螺和加速度计的随机误差，从(10a) 式和(15) 式将 ϕ_E^n、ϕ_N^n 和 ϕ_U^n 分别移到等式左边，可得：

$$\phi_U^n = \frac{1}{\omega_N}(-\dot{\phi}_E^n + \omega_U\phi_N^n - \varepsilon_E^n) \tag{17a}$$

$$\phi_N^n = \frac{1}{g}(-f_E^{n\prime} + \nabla_E^n) \tag{17b}$$

$$\phi_E^n = \frac{1}{g}(f_N^{n\prime} - \nabla_N^n) \tag{17c}$$

再将(17c) 和(17b) 代入(17a)，可得：

$$\phi_U^n = -\frac{1}{g\omega_N}\dot{f}_N^{n\prime} - \frac{\tan L}{g}f_E^{n\prime} + \frac{\tan L}{g}\nabla_E^n - \frac{\varepsilon_E^n}{\omega_N} \tag{18}$$

另外，由(10b) 和(10c) 式，将 ε_N^n 和 ε_U^n 分别移到等式左边，可得：

$$\varepsilon_N^n = -\dot{\phi}_N^n - \omega_U\phi_E^n \tag{19a}$$

$$\varepsilon_U^n = -\dot{\phi}_U^n + \omega_N\phi_E^n \tag{19b}$$

再将(17b) 式、(17c) 式和(18) 式代入(19) 式，可得：

$$\varepsilon_N^n = \frac{1}{g}(\dot{f}_E^{n\prime} - \omega_U f_N^{n\prime} + \omega_U\nabla_N^n) \tag{20a}$$

$$\varepsilon_U^n = \frac{1}{g}(\frac{1}{\omega_N}\ddot{f}_N^{n\prime} + \tan L \cdot \dot{f}_E^{n\prime} + \omega_N f_N^{n\prime} - \omega_N\nabla_N^n) \tag{20b}$$

令状态变换关系：

$$\hat{\phi}_N^n = \phi_N^n - \frac{\nabla_E^n}{g} \tag{21a}$$

$$\hat{\phi}_E^n = \phi_E^n + \frac{\nabla_N^n}{g} \tag{21b}$$

$$\hat{\phi}_U^n = \phi_U^n + \frac{\varepsilon_E^n}{\omega_N^n} - \frac{\tan L}{g}\nabla_E^n \tag{21c}$$

$$\hat{\varepsilon}_N^n = \varepsilon_N^n - \frac{\nabla_N^n}{g}\omega_U \tag{21d}$$

$$\hat{\varepsilon}_U^n = \varepsilon_U^n + \frac{\nabla_N^n}{g}\omega_N \tag{21e}$$

在(17b)、(17c)、(18)、(20) 式中，把等式右边与比力无关项移到左边，并利用(21) 式进行状态替换，可得：

$$\hat{\phi}_N^n = -\frac{1}{g}f_E^{n\prime} \tag{22a}$$

$$\hat{\phi}_E^n = \frac{1}{g}f_N^{n\prime} \tag{22b}$$

$$\hat{\phi}_U^n = -\frac{1}{g\omega_N}(\dot{f}_N^{n\prime} + \omega_U f_E^{n\prime}) \tag{22c}$$

$$\hat{\varepsilon}_N^n = \frac{1}{g}(\dot{f}_E^{n\prime} - \omega_U f_N^{n\prime}) \tag{22d}$$

$$\hat{\varepsilon}_U^n = \frac{1}{g\omega_N}(\ddot{f}_N^{n\prime} + \omega_U\dot{f}_E^{n\prime} + \omega_N^2 f_N^{n\prime}) \tag{22e}$$

由于比力 $f_E^{n\prime}$ 和 $f_N^{n\prime}$ 是可直接测量得到，也就是可观测的，在(22) 各式中，$\hat{\phi}_E^n$、$\hat{\phi}_N^n$、$\hat{\phi}_U^n$、$\hat{\varepsilon}_N^n$ 和 $\hat{\varepsilon}_U^n$ 只和比力及其各阶导数有关，因此它们均是可观测的。如果认为 ∇_E^n、∇_N^n 和 ε_E^n 不可观测，并且假设(22) 各式左边变量能得到准确估计，则从(21) 式可得到各状态估计的理论极限精度，即为 ϕ_N^n 为 $\frac{\nabla_E^n}{g}$、ϕ_E^n 为 $-\frac{\nabla_N^n}{g}$、ϕ_U^n 为 $-\frac{\varepsilon_E^n}{\omega_N^n} + \frac{\tan L}{g}\nabla_E^n$、$\varepsilon_N^n$ 为 $\frac{\nabla_N^n}{g}\omega_U$、$\varepsilon_U^n$ 为 $-\frac{\nabla_N^n}{g}\omega_N$。

文献[2] 研究指出，卡尔曼滤波的状态协方差阵可用来判断滤波效果，协方差阵的特征值越大，其对应状态(或一些状态的线性组合) 的方差就越大，滤波效果就越差，反之亦然。惯导初始对准系统可以认为是一个线性定常系统，文献[3] 通过系统观测矩阵的奇异值分解，定量分析了各状态可观测度的大小。本文由(17) 式和(19) 式定性分析各状态的收敛速度快慢。在(17b) 式和(17c) 式中 ϕ_N^n 和 ϕ_E^n 可直接由比力求解，它们收敛速度较快；在(17a) 式和(19a) 式中 ϕ_U^n 和 ε_N^n 的收敛取决于 ϕ_E^n 和 ϕ_N^n 的收敛，并且 ϕ_U^n 对 ϕ_E^n 的变化敏感、ε_N^n 对 ϕ_N^n 的变化敏感，也就是 ϕ_E^n 和 ϕ_N^n 的平稳收敛决定了 ϕ_U^n 和 ε_N^n 的收敛，因而 ϕ_E^n 和 ϕ_N^n 的收敛速度相对较慢，文献[4] 提出了采用低通滤波的方法以减少 ϕ_U^n 震荡，缩短初始对准过程；在(19b) 式中 ϕ_U^n 的平稳收敛决定了 ε_U^n 的收敛，因此 ε_U^n 的收敛速度最慢。另外，基于估计高阶导数需要比估计低阶导数需要更多的信息的事实，从(22) 式中各量与比力观测量及其各阶导数的关系式，同样也能定性得到上述的状态收敛速度快慢的对比结果。由此可见，初始对准完成时，估计出 ϕ_U^n 的同时，通常 ε_N^n 也可以获得较好的估计，但是 ε_U^n 的估计需要一个更长的过程。

3.2 初始对准模型简化

将(21) 式代入(10) 式和(15) 式，并去掉加速度计常值零偏和东向陀螺常值漂移状态项，可得：

$$f_E^{n\prime} = -g\hat{\phi}_N^n + v_{aE}^n \tag{23a}$$

$$f_N^{n\prime} = g\hat{\phi}_E^n + v_{aN}^n \tag{23b}$$

$$\dot{\hat{\phi}}_E^n = \omega_U\hat{\phi}_N^n - \omega_N\hat{\phi}_U^n - w_{gE}^n \tag{23c}$$

$$\dot{\hat{\phi}}_N^n = -\omega_U\hat{\phi}_E^n - \hat{\varepsilon}_N^n - w_{gN}^n \tag{23d}$$

$$\dot{\hat{\phi}}_U^n = \omega_N\hat{\phi}_E^n - \varepsilon_U^n - w_{gU}^n \tag{23e}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_N^n = 0 \tag{23f}$$

$$\dot{\hat{\varepsilon}}_U^n = 0 \tag{23g}$$

因此,SINS 静基座初始对准模型可降阶简化为:

$$\dot{\hat{X}} = \hat{F}\hat{X} + \hat{w} \tag{24a}$$

$$\hat{Z} = \hat{H}\hat{X} + \hat{v} \tag{24b}$$

其中:$\hat{X} = [\hat{\phi}_E^n \quad \hat{\phi}_N^n \quad \hat{\phi}_U^n \quad \hat{\varepsilon}_E^n \quad \hat{\varepsilon}_N^n]^T$

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_U & -\omega_N & 0 & 0 \\ -\omega_U & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \omega_N & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{w} = [-w_{gE}^n \quad -w_{gN}^n \quad -w_{gU}^n \quad 0_{1\times 2}]^T$$

$$E[\tilde{w}(t)] = 0_{5\times 1}, E[\tilde{w}(t)\tilde{w}^T(\tau)] = \begin{bmatrix} Q_{wg}^n & 0_{3\times 2} \\ 0_{2\times 5} \end{bmatrix}\delta(t,\tau)$$

$$\hat{Z} = Z$$

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & -g & \\ g & 0 & 0_{2\times 3} \end{bmatrix}$$

$$\hat{v} = v$$

4 初始对准仿真

SINS 静基座初始对准仿真可以分为四个步骤(见图 1):①生成惯性器件信息,即在静基座条件下仿真生成陀螺的角速率输出和加速度计的比力输出。先根据坐标变换关系产生理想的惯性器件输出,再加上适当的误差量。② 进行姿态更新和卡尔曼滤波器量测量构造,在姿态更新中不必考虑导航坐标系相对于地球坐标系的转动,实际应用中姿态更新可以隔离载体角晃动的影响。由实时姿态矩阵对加速度计输出进行变换,即可得到卡尔曼滤波所需要的量测量。③ 进行卡尔曼滤波,估计出姿态角误差、北向和天向陀螺常值漂移。④ 计算卡尔曼滤波估计误差,定义卡尔曼滤波估计误差为状态估计输出与对应状态真实值之差。

仿真中主要参数值设置如下:俯仰角 $\theta = -5°$、横滚角 $\gamma = 2°$、航向角 $\psi = 235°$、姿态角误差 $\varphi^n = [10 \quad 10 \quad 60]^T{}'$、陀螺常值漂移 $\varepsilon^b = [0.01\ 0.01\ 0.01]^T°/h$、陀螺噪声方差阵 $Q_{wg}^b = \mathrm{diag}([1 \quad 1 \quad 1] \times 10^{-3}°/h)^2$、加速度计常值零偏 $\nabla^b = [100\ 100\ 100]^T\ \mu g$、加速度计噪声方差阵 $Q_{wa}^b = \mathrm{diag}([10\ 10\ 10] \times \mu g)^2$,卡尔曼滤波器中系统噪声方差阵 $Q = \begin{bmatrix} Q_{wg}^{n'} & 0_{3\times 2} \\ 0_{2\times 5} \end{bmatrix}$(其中 $Q_{wg}^{n'} = C_b^{n'} Q_{wg}^b C_{n'}^b$)、量测噪声方差阵 $R = \begin{bmatrix} (Q_{wa}^{n'})_{11} & (Q_{wa}^{n'})_{12} \\ (Q_{wa}^{n'})_{21} & (Q_{wa}^{n'})_{22} \end{bmatrix}$(其中 $Q_{wa}^{n'} = C_b^{n'} Q_{wa}^b C_{n'}^b$)、滤波初始值 $\hat{X}_0 = 0_{5\times 1}$、滤波初值方差阵 $P_0 = 100 \times \mathrm{diag}(\lfloor 10' \quad 10' \quad 60' \quad 1 \times 10^{-3}°/h \quad 1 \times 10^{-3}°/h \rfloor)^2$。

仿真时间 1200s,结果见图 2,其中实线为卡尔曼滤波估计误差,虚线为理论极限精度。从图中可以看出各状态滤波估计误差和理论极限精度两者之间相差为:东向姿态角误差约 0.1′、北向姿态角误差约 0.07′、天向姿态角误差约 1—2′、北向陀螺常值漂移约 0.002°/h、天向陀螺常值漂移滤波还未收敛。如果增加仿真时间,可知大约在 50min 之后天向陀螺常值漂移估计开始收敛。进一步仿真表明,如果减小初始姿态角误差,则可以降低滤波估计误差和理论极限精度之间的差别,因此在滤波估计的同时,应当利用估计结果进行适当的姿态误差角反馈修正。

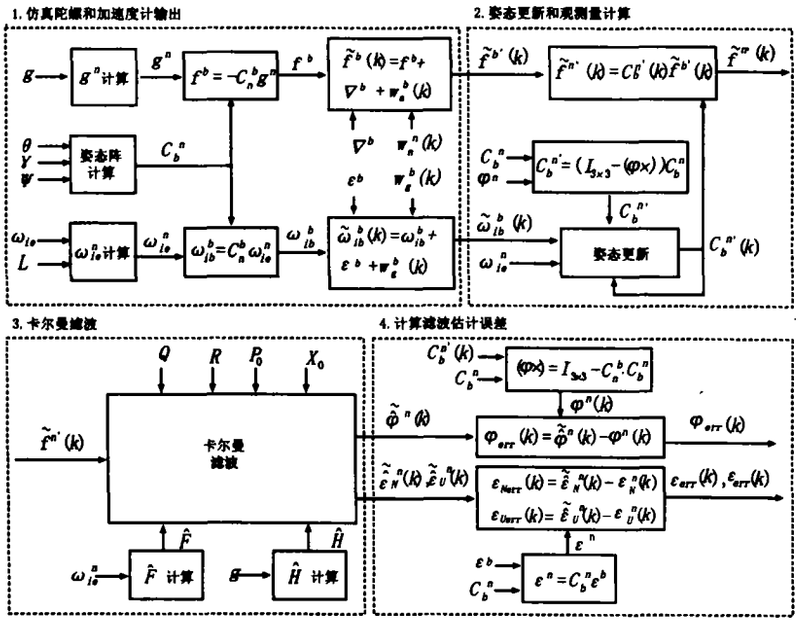


图 1 捷联惯导静基座初始对准仿真框图

值得指出的是,在 SINS 静基座初始对准中,由于缺少东向陀螺常值漂移的估计结果,即使北向和天向陀螺常值漂移得到精确估计,它们也只能用于修正等效的北向和天向陀螺常值漂移,而不能够对实际的陀螺输出实行校正。但是,在某些特殊情况下可以近似得到有些陀螺的常值漂移,例如当载体坐标系某个轴近似指向北时,这时其它两个轴的陀螺对等效北向陀螺常值漂移的贡献很小,可以近似认为估计出的等效北向陀螺常值漂移就是该轴的陀螺常值漂移。另外,如文献[5]所述,在水平姿态角较小情况下,可利用双位置对准方法达到水平陀螺测漂的目的。

作为比较,文中还对第 2 节中的全阶初始对准卡尔曼滤波器进行了仿真,结果见图 3,图中东向陀螺常值漂移和加速度计常值零偏直接为卡尔曼滤波估计结果,其它小图中实线为卡尔曼滤波估计误差,虚线为理论极

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

限精度。从图中可以看出，东向陀螺常值漂移和加速度计常值零偏基本没有滤波估计效果，其它小图的结果和降阶滤波的结果大致相同，但是从水平姿态角误差可见，降阶滤波的结果略微好于全阶滤波的结果。从而证明了，SINS 静基座初始对准可以不考虑不可观测状态的影响，对滤波器作降阶处理，不但能够减小计算量，还能够消除不可观测状态对滤波器的不利影响。

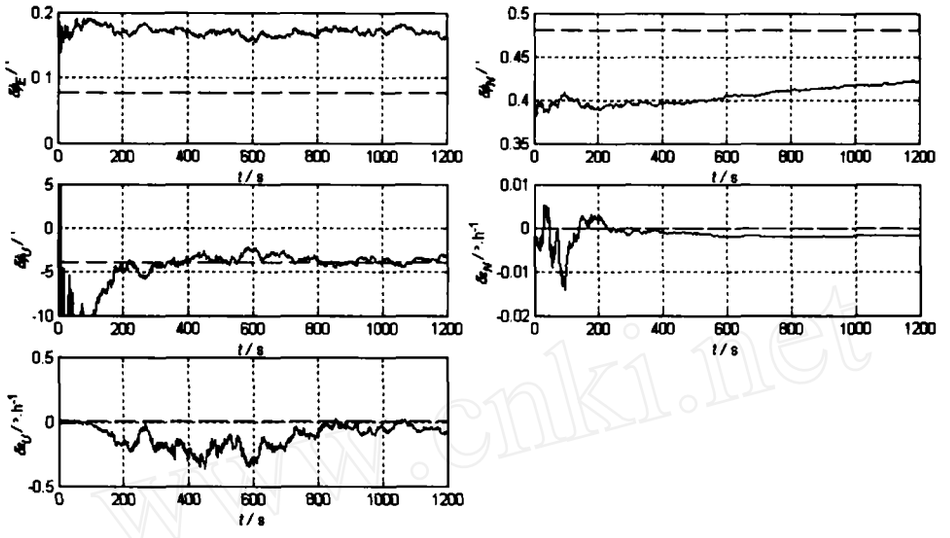


图 2　捷联惯导静基座初始对准仿真结果(降阶)

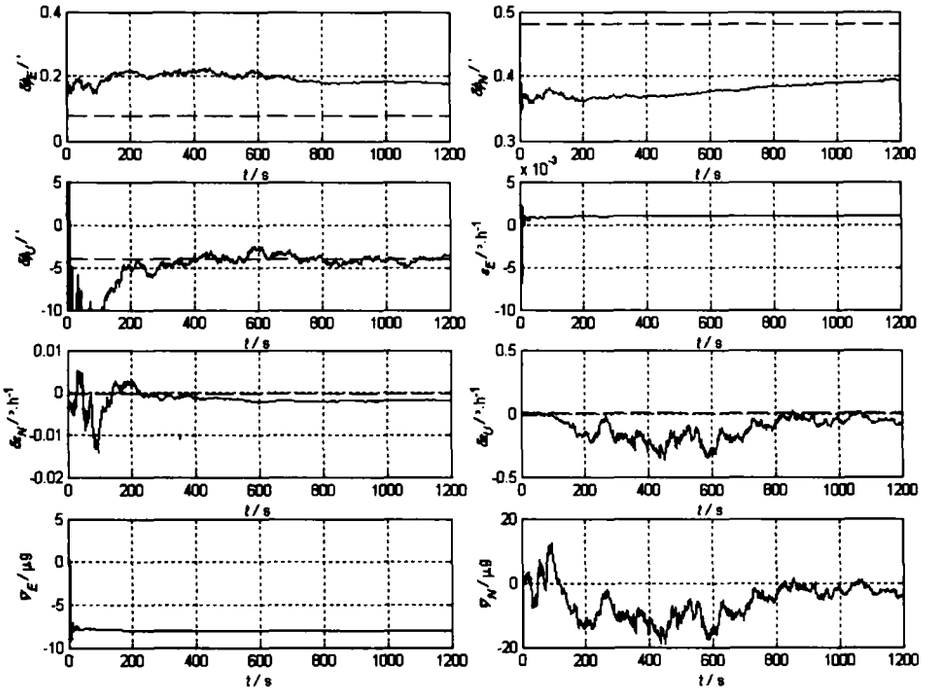


图 3　捷联惯导静基座初始对准仿真结果(全阶)

5　结论

SINS 静基座初始对准是一个不完全可观测的系统，文中对该系统观测性进行了分析，根据初始对准的目标，选取加速度计常值零偏和东向陀螺常值漂移为不可观测状态，提出了降阶初始对准卡尔曼滤波方程，并对滤波器状态的估计精度进行了分析。最后给出了软件仿真结构图和效果图，仿真结果表明：降阶滤波器和全降阶滤波器的估计精度基本相同，但是前者计算量更小，并且能够消除不可观测状态对滤波器的不利影响。因此，在实际 SINS 静 (下转第 60 页)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

如:设*H1*为激光发射点海拔高度,*H2*为激光照射目标点海拔高度,*Range*为激光发射点到激光照射目标点的斜距离,原美国大气软件计算的透过率数据为*P1*(模型未知),自行编制的大气模型软件计算的透过率数据为*P2*。在条件相同、输入相同的情况下,自编软件与美国所编软件所得仿真输出结果基本一致(见表1)。

表1 激光大气透过率仿真结果对照表

激光发射点(km)	目标点(km)	斜距离 Range(km)					
H1	H2	3.0(km)		4.0(km)		5.0(km)	
		P1	P2	P1	P2	P1	P2
1.5	0.0	0.8459	0.8459	0.8000	0.8000	0.7567	0.7566
2.0	0.0	0.8597	0.8597	0.8175	0.8175	0.7773	0.7773
2.5	0.0	0.8726	0.8726	0.8339	0.8339	0.7969	0.7969
3.0	0.0	0.8841	0.8841	0.8486	0.8486	0.8145	0.8145
1.5	1.0	0.8784	0.8789	0.8413	0.8419	0.8057	0.8065
2.0	1.0	0.8903	0.8907	0.8565	0.8569	0.8241	0.8245
2.5	1.0	0.9021	0.9023	0.8717	0.8720	0.8422	0.8426
3.0	1.0	0.9124	0.9126	0.8849	0.8852	0.8583	0.8586
3.0	1.0	0.9124	0.9126	0.8849	0.8852	0.8583	0.8586
3.5	3	0.9629	0.9628	0.9508	0.9508	0.9389	0.9388
4.0	3	0.9676	0.9676	0.9570	0.9570	0.9466	0.9466
4.5	3	0.9716	0.9716	0.9623	0.9623	0.9531	0.9531
5.0	3	0.9750	0.9750	0.9668	0.9668	0.9587	0.9587
6.5	5	0.9893	0.9893	0.9857	0.9857	0.9822	0.9822
7.0	5	0.9898	0.9898	0.9864	0.9864	0.9831	0.9831
7.5	5	0.9904	0.9904	0.9872	0.9872	0.9841	0.9841
8.0	5	0.9911	0.9911	0.9882	0.9882	0.9852	0.9852
8.5	7	0.9944	0.9944	0.9925	0.9925	0.9907	0.9907
9.0	7	0.9950	0.9950	0.9933	0.9933	0.9916	0.9916
9.5	7	0.9954	0.9954	0.9939	0.9939	0.9924	0.9924
10.0	7	0.9958	0.9958	0.9945	0.9945	0.9931	0.9931

注:上表为中纬度夏季乡村模式下(其他模式类似)的仿真结果,由于篇幅所限,这里不做详细说明。

3 结束语

以上提出的校核方法既有课题组在项目研制过程中的研究结果,又有在长期从事仿真工作中所积累的经验。这些方法能够较好地指导仿真模型算法和软件的校核,无疑是提高建模与仿真可信度的有效措施。

参考文献:

[1] 周启煌,单东升. 坦克火力控制系统[M]. 北京:国防工业出版社,1997.

[2] 李鹏波,张金槐. 仿真可信性的研究综述[J]. 计算机仿真,2000,17(4):12 - 14.

[3] 陶化成,史爱芬. 离散事件决策系统仿真建模研究[J]. 南京理工大学学报,2000,24(增刊):52 - 55.

[4] 王广耀,等. C^3I系统仿真评价环境与方法研究[J]. 情报指挥控制系统与仿真技术,2005,27(2):35 - 38.

[5] 刘飞,杨明. 分布式仿真逼真度研究[J]. 计算机仿真,2005,22(6):49 - 52.

[6] 刘庆鸿,等. 建模与仿真校核、验证与确认综述[J]. 系统仿真学报,2003,15(7):925 - 930.



[作者简介]

史爱芬(1963 -),女(汉族),河南省新乡市人,博士生,高工,主要研究方向:建模与仿真、火力控制与指挥控制。

吴祈宗(1947 -),男(汉族),北京市人,管理与经济学院教授,博导,主要研究方向:运筹学,建模与仿真、决策方法。

武智晖(1979 -),男(汉族),山西省交城人,硕士生,工程师,主要研究方向:武器系统精度分析、仿真与控制。

郑 恒(1980 -),男(汉族),广东省人,博士生,主要研究方向:仿真、决策、贝叶斯网络。

(上接第40页)

基座初始对准中应当首选降阶滤波器,并可利用文献[4]中的方法加快初始对准速度。

参考文献:

[1] Y F Jiang, Y P Lin. Error Estimation of INS Ground Alignment Through Observability Analysis[J]. IEEE Transactions on Aeropsace and Electronic Systems. 1992,28(1):92 - 97.

[2] F M Ham. Observability, eigenvalues and Kalman filtering[J]. IEEE Transactions on Aeropsace and Electronic Systems. 1983, 19(2):156 - 219.

[3] 冯绍军,袁信. 观测度及其在卡尔曼滤波器设计中的应用[J]. 中国惯性技术学报,1999,7(2):18 - 21.

[4] J C Fang, D J Wan. A fast initial alignment method for a strapdown inertial navigation system on a stationary base [J]. IEEE Transactions on Aeropsace and Electronic Systems. 1996, 32(4):1501 - 1505.

[5] 秦永元,张洪钺,汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M],西安:西北工业大学出版社,1998. 302 - 305.

[6] C B Zhang, W G Tian, Z H Jin. A Novel Method Improving the Alignment Accuracy of a Strapdown Inertial Navigation System on a Stationary Base[J]. Measurement Science and Technology. 2004, 15:765 - 769.



[作者简介]

严恭敏(1977 -),男(汉族),福建建瓯人,西北工业大学自动化学院博士研究生,主要从事捷联惯性导航算法、组合导航系统理论研究。

秦永元(1946 -),男(汉族),江苏常熟市人,西北工业大学教授,博士生导师,主要从事惯性导航技术及卡尔曼滤波理论的研究。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Influence Analysis of Dithered Laser Gyro Whole Cycle Sampling Demodulation on SINS Attitude Computation Accuracy *

YAN Gong-min[1], YAN Wei-sheng[1,2], XU De-min[1,2*], LUO Yi-song[3], MA Jian-wei[4]

1. College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. National Key Laboratory for Underwater Information Process & Control, Xi'an 710072, China;
3. Chongqing Aerospace New Century Satellite Application Technology Co. Ltd, Chongqing 401122, China;
4. Shandong Anqiu Power Supply Company, Anqiu Shandong 262100, China

Abstract: In dithered laser gyro strapdown inertial navigation system (LSINS), the mechanical dither frequencies of three laser gyros are always different form each other. Using dithered laser gyro whole cycle sampling demodulation method, the angular data sampled by navigation computer timing sample system imply that the outputs of the three laser gyros are asynchronous, hence noncommutative error occurs in LSINS attitude updating algorithm. The error becomes even worse under coning motion environment. The asynchronous behave of laser gyro outputs is introduced and analysed. Under coning motion circumstance, some simulations are carried out. The simulation results show that the laser gyro asynchronous sampling error plays an important part in LSINS attitude updating algorithm. The attitude updating error by asynchronous sampling method is far greater than that of ideal sampling method. Conclusion is drawn that more attention must be paid to LSINS sampling demodulation in high angular dynamic environment.

Key words: dithered laser gyro; whole cycle sampling demodulation; coning motion; attitude computation
EEACC: 7630

抖动偏频激光陀螺整周期采样对捷联惯导姿态解算的影响 *

严恭敏[1],严卫生[1,2],徐德民[1,2*],罗毅松[3],马建伟[4]

1. 西北工业大学 航海学院,西安 710072;
2. 水下信息处理与控制国家级重点实验室,西安 710072;
3. 重庆航天新世纪卫星应用技术有限责任公司,重庆 401122;
4. 山东安丘电业公司,山东 安丘 262100

摘 要:抖动偏频激光捷联惯导系统中,三个激光陀螺之间机械抖动频率一般互不相同. 当陀螺输出采用整周期锁存方式时,导航计算机定时采样系统采集到的三个陀螺信号,隐含着陀螺输出的不同步,在捷联惯导解算中将产生姿态解算的不可交换误差,在圆锥运动环境下误差更加严重. 介绍了整周期采样时陀螺输出的不同步现象,在圆锥运动条件下对不同步问题进行仿真,仿真结果表明不同步是引起姿态解算误差的主要因素,不同步误差远远超过同步采样条件下的姿态解算误差,因此在捷联惯导系统角运动剧烈时应当予以重视.

关键词:抖动偏频激光陀螺;整周期采样;圆锥运动;姿态解算
中图分类号:V249.3 **文献标识码**:A **文章编号**:1004-1699(2007)10-2268-04

激光陀螺的闭锁区是影响其测量灵敏度的重要因素,采用各种偏频方法减小闭锁区的影响是发展激光陀螺的一项关键技术. 由于机械抖动偏频具有结构简单和承受冲击能力强等诸多优点,它是应用最早和最成熟的激光陀螺偏频技术,其原理是采用小振幅高速机械抖动装置强迫环形激光器绕垂直

基金项目:水下信息与控制国家级重点实验室基金资助(9140C230206070C2306)
收稿日期:2007-04-16 **修改日期**:2007-05-28

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

于谐振腔环路平面的轴线来回转动,为谐振腔内相向行波对提供快速交变偏频[1-2].为了获得反映运载体角运动信息,必须消除机械抖动偏频的影响,其方法有[3-4]:①对陀螺输出进行高速采样,通过数据滤波提取有用信息;②利用高精度传感器测量激光器相对于陀螺壳体运动偏角,再在陀螺输出中扣除该偏角;③当机械抖动装置相对陀螺壳体抖动过平衡位置时,提供触发信号对陀螺输出进行整周期采样.上述第一种方法要求计算机具有很强的处理能力和好的数据处理方法;第二种方法对角度传感器要求比较高;第三种方法实现简单,对消除偏频信号非常有效,当载体角运动比较平稳时,容易满足测量要求,具有一定的应用价值.

在设计激光捷联惯导系统时,三个激光陀螺之间机械抖动频率应当交错开,建议相差 30 Hz 以上[2].当陀螺输出采用整周期锁存方式时,导航计算机定时采样系统采集到的三个陀螺信号,隐含着陀螺输出的不同步,如果载体角运动比较剧烈,整周期采样方法中存在以下缺点:①载体运动角速率难以实时准确测量;②载体姿态角测量存在延迟难以估计和补偿;③由于三个轴激光陀螺整周期锁存不同步,造成姿态解算的不可交换误差,误差随时间不断增长.

本文介绍了整周期锁存时陀螺输出采样的不同步现象,在圆锥运动条件下对不同步问题引起的姿态解算误差进行仿真,仿真结果对实际应用具有一定的参考价值.

1　激光陀螺整周期锁存和定时采样简介

如图 1 所示,g_x、g_y、g_z 三条横线分别代表捷联惯导系统中三个轴激光陀螺的输出时序,线上每一个节点表示整周期锁存的时刻,由于各个激光陀螺机械抖动周期不相等,因此它们的整周期锁存周期不同,即整周期锁存时刻也不相同.图中,t_k、t_{k+1}、t_{k+2} 表示导航计算机定时采样时刻,采样周期为 h.可以看出,图中共有四个独立的时钟系统(三个陀螺整周期锁存时钟加上一个导航计算机定时采样时钟,它们彼此间相互独立).

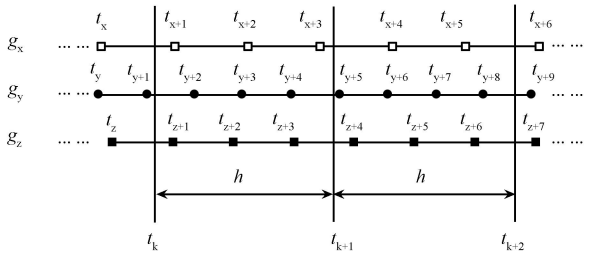


图 1　激光陀螺整周期锁存与定时采样示意图

在导航计算机定时采样 t_{k+1} 时刻,g_x 陀螺输出采样值为 t_x 至 t_{x+3} 时间段内的角增量(期间共包含 g_x 陀螺的三个整周期锁存周期);而在 t_{k+2} 采样时刻,g_x 陀螺输出采样值为 t_{x+3} 至 t_{x+5} 时间段内的角增量(期间只包含 g_x 陀螺的两个整周期锁存周期).这表明,虽然导航计算机定时采样时钟周期不变,但是不同采样时刻采集到的陀螺输出可能包含不等周期数的整周期锁存角增量,即导航计算机采样时间长度与期间陀螺输出时间长度之间没有确定的关系.由于难以准确获得陀螺输出时间长度,就造成了利用角增量输出求取瞬时角速率的困难.其它两个轴的陀螺采样输出情况分析也类似于 g_x 陀螺.还须指出,三个轴陀螺从各自的最近一次整周期锁存时刻到导航计算机采样时刻的采样延迟时间也是不相等的(如在 t_{k+1} 采样时刻,三个陀螺采样延迟分别为 $t_{k+1}-t_{x+3}$、$t_{k+1}-t_{y+4}$、$t_{k+1}-t_{z+3}$).由于陀螺输出时间长度不等和延迟时间不等的影响,如果捷联惯组三个轴都存在持续角运动,在捷联惯导算法中就可能产生角运动不可交换性误差并不断积累,最终导致严重姿态解算误差.

2　整周期锁存误差仿真

显然,如果捷联惯组只绕其某一激光陀螺敏感轴作角运动,其它两轴不转动,则激光陀螺输出时间长度不等和延迟时间不等就不会产生姿态解算累积误差.对于捷联惯导系统,最不利的角运动环境是圆锥运动,以下在圆锥运动环境下分析激光陀螺整周期采样对姿态解算误差的影响.

2.1　圆锥运动描述[5]

如图 2,动坐标系 b 系相对参考坐标系 r 系 o_rz_r 绕轴作圆锥运动,半锥角为 α,锥运动频率为 ω,即:b 系与 r 系坐标原点重合,o_bx_b 轴以 o_rx_r 轴为对称中心,在 $x_ro_rz_r$ 平面内作幅值为 α 的振动;o_by_b 轴以 o_ry_r 轴为中心,在 $y_ro_rz_r$ 平面内幅值为 α 的振动;o_bz_b 轴在以 o_rz_r 轴为中心的圆锥面上运动.该圆锥运动可用等效旋转矢量描述为:

$$\boldsymbol{\Phi}=[\alpha\cos\omega t \quad \alpha\sin\omega t \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

动坐标系 b 相对参考坐标系 r 的方位关系还可用姿态四元数描述为:

$$q_b^r(t)=\left[\cos\frac{\alpha}{2} \quad \sin\frac{\alpha}{2}\cos\omega t \quad \sin\frac{\alpha}{2}\sin\omega t \quad 0\right]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

在指北方位捷联惯导系统中,导航坐标系依次经过三次欧拉角(分别为航向角 ψ、俯仰角 θ 和横滚角 γ) 旋转,可获得载体坐标系,类似的,b 系与 r 系

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

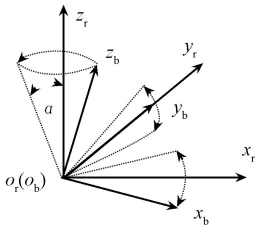


图 2 b 系相对 r 系作圆锥运动

之间的关系也可以利用上述三个欧拉角描述(相当于把 r 系当作导航坐标系,把 b 系当作载体坐标系),从姿态四元数 $q_b^r(t)$ 中容易求得这三个欧拉角,详见参考文献[5],本文后面仿真时将用到这三个欧拉角. 动坐标系 b 系相对参考坐标系 r 系的圆锥运动角速度矢量描述为:

$$\omega(t) = \left[-\omega\sin\alpha\sin\omega t \quad \omega\sin\alpha\cos\omega t \quad -2\omega\sin^2\frac{\alpha}{2} \right]^T \tag{3}$$

由圆锥运动角速度矢量式(3)积分得两个相邻采样时刻之间的理想角增量输出:

$$\Delta\theta_{k+1} = \begin{bmatrix} -2\sin\alpha\sin(\frac{\omega h}{2})\sin[\omega(t_k+\frac{h}{2})] \\ 2\sin\alpha\sin(\frac{\omega h}{2})\cos[\omega(t_k+\frac{h}{2})] \\ -2(\omega h)\sin^2(\frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中:$h = t_{k+1} - t_k$ 为采样周期,$\Delta\theta_{k+1}$ 为从 t_k 时刻到 t_{k+1} 时刻的角增量,即 t_{k+1} 时刻采样获得的理想角增量输出.

2.2 圆锥运动环境下整周期采样的角增量仿真

公式(4)为圆锥运动时理想的角增量输出采样表达式. 如果考虑到激光陀螺整周期锁存的不同步,假设三个激光陀螺机械抖动频率分别为 f_x、f_y、f_z(即整周期锁存周期分别为 $T_x = 1/f_x$、$T_y = 1/f_y$、$T_y = 1/f_y$),并不妨假设起始 t_0 时刻三个激光陀螺是同步开始抖动的,则不计激光陀螺量化效应时,在 t_{k+1} 时刻采样获得的陀螺角增量输出为:

$$\Delta\theta_{k+1} = \begin{bmatrix} -2\sin\alpha\sin(\frac{\omega h_{xk}}{2})\sin[\omega(t_{xk}+\frac{h_{xk}}{2})] \\ 2\sin\alpha\sin(\frac{\omega h_{yk}}{2})\cos[\omega(t_{yk}+\frac{h_{yk}}{2})] \\ -2(\omega h_{zk})\sin^2(\frac{\alpha}{2}) \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中,$t_{ik} = \mathrm{int}[t_k/T_i]\cdot T_i$,

$h_{ik} = \mathrm{int}[t_{k+1}/T_i]\cdot T_i - t_{ik}$,$(i = x, y, z)$,$\mathrm{int}[\cdot]$ 表示取整.

例如,在某型号激光捷联惯组中,三个激光陀螺的机械抖动频率分别为 x 轴 370 Hz、y 轴 359 Hz、z 轴 408 Hz,当作幅值 $\alpha = 10°$、周期 $\omega = 0.7$ Hz 的圆锥运动,采样周期 $h = 10$ ms 时,经过仿真其三个轴角增量输出如图 3 所示. 图中虚线为理想角增量输出,而实线为整周期锁存时的采样输出. 从图中可以看出,整周期锁存采样输出波动较大,如果用它计算捷联惯导系统的瞬时角速率必将产生很大误差.

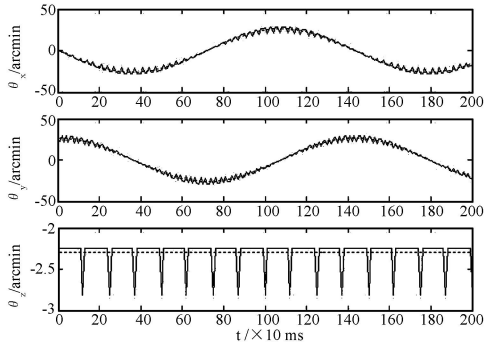


图 3 圆锥运动条件下角增量采样输出

2.3 整周期采样对姿态解算的影响

在圆锥运动条件下,许多文献研究推导出了半圆锥角、圆锥运动频率、采样周期与等效旋转矢量算法漂移误差之间的关系表达式. 但是,如果还要考虑到激光陀螺整周期锁存不同步的问题,势必使得研究算法漂移误差关系变得非常复杂. 文中利用计算机仿真的方法来研究整周期采样对算法漂移误差的影响.

同上文假设:激光陀螺机械抖动频率 x 轴 370 Hz、y 轴 359 Hz、z 轴 408 Hz,锥运动幅值 $\alpha = 10°$、周期 $\omega = 0.7$ Hz,采样周期 $h = 10$ ms. 选用等效旋转矢量双子样优化算法分别对理想角增量输出和整周期采样输出进行姿态更新解算,求得姿态角和航向角的误差,如图 4 所示. 图中虚线是理想角增量输出时的姿态和航向误差角,误差都很小,接近于零;实线表示的是整周期采样输出时的姿态和航向误差角,其出现明显周期性和随机变化,周期性变化反映了圆锥运动的周期性,随机变化是由于陀螺整周期锁存引起的,载体角运动快时随机变化幅值也大,姿态和航向误差角均没有明显的累积增大趋势. 但是,经过长时间(10 min)的仿真,如图 5 所示,整周期采样输出时航向误差角有一定的发散趋势,最终接近

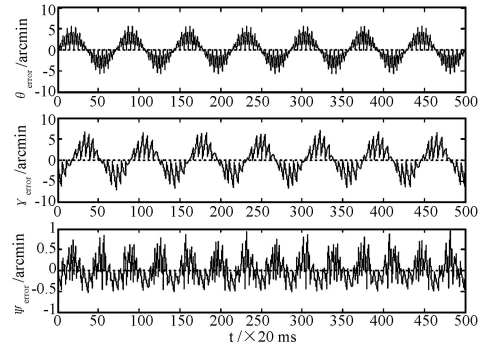


图 4 圆锥运动条件下姿态和航向解算误差

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

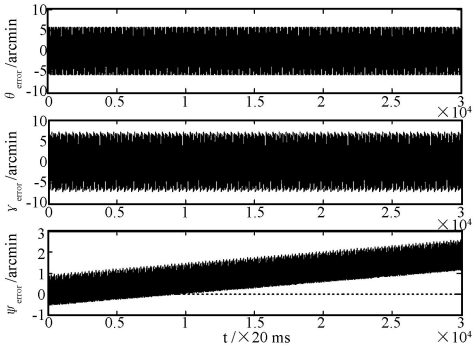


图 5　圆锥运动条件下姿态和航向解算误差(10 min)

2′,这说明整周期采样会引起捷联惯导姿态算法漂移误差.

进一步仿真表明,圆锥运动幅值、频率、激光陀螺机械抖动频率、导航计算机采样周期、所选择的等效旋转矢量算法等因素都与姿态算法漂移误差速率有关.如果增加圆锥运动频率,则整周期采样时航向误差角变化速度将急剧增大,远远大于理想采样输出条件下的航向误差角.如图 6 所示,仿真时选择圆锥角 1°,圆锥运动频率 5 Hz.图中,10 min 后理想角增量采样输出时航向误差角约 3′,而整周期采样时航向误差角约 47′,后者大约是前者的 18 倍.同样的,两种采样情况下俯仰和横滚误差角都没有明显的增长趋势.

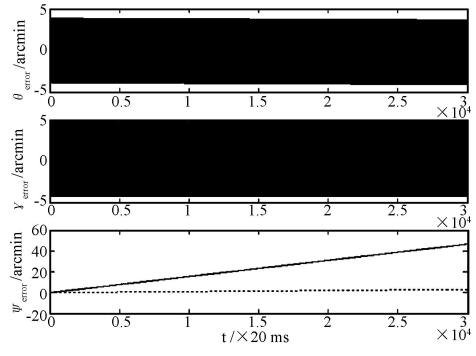


图 6　圆锥运动条件下姿态和航向解算误差(5 Hz)

3　结论

通过仿真表明:在圆锥运动条件下,激光陀螺整周期采样是引起姿态算法漂移误差的重要原因.姿态算法漂移误差速率与圆锥运动幅值、频率、激光陀螺机械抖动频率、导航计算机采样周期、所选择的等效旋转矢量算法等因素有关.如果圆锥运动条件恶劣,则整周期采样时姿态算法漂移误差将急剧增大,远远大于理想采样条件下的算法漂移误差.因此,在捷联惯导系统角运动平缓时可以采用整周期采样方式,而在角运动比较剧烈时就有必要改进激光陀螺采样方式,如采用高频采样[6-8],从采样原理上降低算法漂移误差,提高了姿态解算精度.

参考文献:

[1] 王可东,顾启泰. 环形激光陀螺仪机械抖动系统的进展[J]. 导航,2000,(1):17-24.

[2] WANG Ke-dong, GU Qi-tai. Optimization of Dither Amplitude and Frequency of RLG[C]// Proceeding of IEEE Position Location and Navigation on Symposium. 2002, 277-282.

[3] 杨海军, 滕云鹤, 郭美凤, 等. 环形激光陀螺仪的机械抖动控制及信号读出的研究[J]. 清华大学学报(自然科学版),1998, 38(11):33-35.

[4] 王宇. 机抖激光陀螺捷联惯导系统的初步探索[D]. 国防科技大学博士学位论文,2005.

[5] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京:科学出版社,2006.

[6] 吴文启,庹洲慧,江明明. 激光陀螺机械抖动偏频对等效转动矢量姿态计算的影响[J]. 航空学报,2006,27(1):71-76.

[7] 张岩,李廷志,罗兵. 基于 FPGA 的抖动偏频激光陀螺高精度信号解调[J]. 计算机测量与控制, 2006,14(7):950-952.

[8] 刘宗玉,陈明,王玮, 等. 抖动偏频激光陀螺中的解调及实现技术[J]. 测控技术, 2004,23(9):67-69.



严恭敏(1977-),男,福建建瓯人,2006 年 9 月毕业于西北工业大学自动化学院,获导航、制导与控制专业博士学位,现在西北工业大学航海学院兵器科学与技术博士后流动站工作,主要从事陆用定位定向系统、水下航行器自主导航技术与组合导航系统理论研究,yangongmin @163. com 或 yangongmin @sina. com



严卫生(1968-),男,江苏南通人,教授,博士生导师,主要研究领域为水下航行器的制导、控制与仿真、水下目标跟踪、变结构控制与智能控制,获国家级科技进步二等奖 10 项,获部级科技进步一等奖 2 项,获省部级科学技术进步二等奖 3 项,在国内外刊物上发表学术论文 60 余篇,被 EI、ISTP 等收录 20 余篇;



徐德民(1937-),男,陕西三原人,教授,博士生导师,中国工程院院士,现任水下航行器研究所所长、水下信息与控制国家科技重点实验室主任、中国造船工程学会学术委员会副主任等,长期从事鱼雷精确制导、控制理论与应用、一体化设计等方面的教学与研究,完成重要科研任务二十余项,多次获国家和省部级奖项.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

纬度未知条件下捷联惯导系统初始对准分析*

严恭敏[1] 严卫生[1,2] 徐德民[1,2] 蒋 浩[3]

1. 西北工业大学航海学院, 西安 710072
2. 水下信息处理与控制国家级重点实验室, 西安 710072
3. 重庆航天新世纪卫星应用技术有限责任公司, 重庆 401122



摘 要 在捷联惯导系统静基座初始对准的传统方法中,一般要求准确知道当地的地理纬度,如果给定的纬度存在误差,将可能影响初始对准精度。在静基座条件下并且地理纬度未知时,研究捷联惯导系统的初始对准实现问题,并对初始对准精度作详细分析。研究结果表明,在静基座条件下,借助于捷联惯组中的陀螺和加速度计的测量值可以估计出对准点处的地理纬度,再利用估计纬度进行初始对准,如果选择初始对准算法适当,纬度估计误差将不会影响对准精度。

关键词 捷联惯导系统;静基座;初始对准;纬度

中图分类号: V249.3 **文献标识码**: A

文章编号: 1006-3242(2008)02-0031-04

SINS Initial Alignment Analysis Under Geographic Latitude Uncertainty

Yan Gongmin[1] Yan Weisheng[1,2] Xu Demin[1,2] Jiang Hao[3]

1. College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China
2. National Key Laboratory for Underwater Information Process & Control, Xi'an 710072, China
3. Chongqing Aerospace New Century Satellite Application Technology Co. Ltd, Chongqing 401122, China

Abstract *Suppose to be on a stationary base, a local geographic latitude is demanded in initial alignment algorithm of the classic strapdown inertial navigation system (SNS). A geographic latitude input error will affect the accuracy of initial alignment. On a stationary base and with the geographic latitude uncertainty, SNS initial alignment algorithm is studied, and the alignment accuracy is also analyzed. The research shows that the geographic latitude can be well estimated via gyro and accelerometer measurements. Using the proposed initial alignment method in this paper, the alignment accuracy is insensitive to the approximation of geographic latitude.*

Key words *Strapdown inertial navigation system; Stationary base; Initial alignment; Geographic latitude*

*水下信息处理与控制国家重点实验室基金资助项目 (9140C230206070C2306)

收稿日期: 2007-04-26

作者简介:严恭敏(1977-),男,福建建瓯人,博士后,主要从事陆用定位定向系统、水下航行器自主导航技术与组合导航系统理论研究;严卫生(1968-),男,江苏南通人,教授,博士生导师,主要研究领域为水下航行器的制导、控制与仿真、水下目标跟踪、变结构控制与智能控制;徐德民(1937-),男,陕西三原人,教授,博士生导师,中国工程院院士,长期从事鱼雷精确制导、控制理论与应用、一体化设计等方面的教学与研究;蒋 浩(1974-),男,重庆人,工程师,从事激光捷联惯导系统软硬件设计和开发。

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

捷联惯导系统初始自对准就是利用地球自转角速度和重力加速度作为自然参考量,通过惯性器件测量确定姿态矩阵的初始值。晃动基座条件下的初始对准是目前研究的一个热点和难点,已经取得了一些研究成果[1],本文研究静基座初始对准问题,初始对准时要求载体静止。通常在初始对准过程中,要求输入具有一定精确度的当地地理纬度,而经度和高度不是必须的。众所周知,在纬度精确已知情况下,初始对准水平姿态误差角与等效水平加速度计零偏有关,而天向姿态误差角主要取决于等效东向陀螺漂移。

某些地区,例如隧道深处、深山密林里或水面下,想要获取准确的地理位置并不是一件容易的事情;有些应用场合,例如通信卫星跟踪或武器平台的稳定,有较高的定向要求,而没必要提供精确的定位要求。在上述纬度未知条件下,能否实现初始对准并且初始对准精度跟哪些因素有关呢?本文研究在静基座条件下且地理纬度未知时,捷联惯导系统的初始对准问题,并对初始对准精度作详细分析。

1 初始对准传统方法

1.1 坐标系定义

文中用到的坐标系有:1)地心惯性坐标系,记为 i系;2)地球坐标系,记为 e系;3)选择东-北-天(E-N-U)地理坐标系作为导航坐标系,记为 n系;4)载体坐标系(或捷联惯组坐标系),记为 b系。n系先后经过3个欧拉角转动,即航向角 Ψ,俯仰角 θ和横滚角 γ,可获得 b系,两者间的变换关系可用姿态矩阵 C_b^n描述。

1.2 姿态矩阵计算

捷联惯导系统在传统初始对准方法中,一般要求已知惯导系统所处的地理位置信息,主要是纬度信息。运载体静止时,利用地球自转角速度和重力加速度作为参考量,通过惯性器件测量确定捷联惯导系统的初始姿态矩阵。此时,加速度计的比力输出 $\tilde{f}_{sf}^b$是对重力加速度矢量 g在 b系上投影 g^b的测量,而方向正好相反;陀螺的角速度输出 $\tilde{\omega}_{ie}^b$是对地球自转角速度矢量 ω_{ie}在 b系上投影 ω_{ie}^b的测量,即

$$\tilde{f}_{sf}^b = -g^b + \delta f_{sf}^b \tag{1}$$

$$\tilde{\omega}_{ie}^b = \omega_{ie}^b + \delta\omega_{ie}^b \tag{2}$$

其中 δf_{sf}^b是加速度计测量误差,$\delta\omega_{ie}^b$是陀螺测量误差。如果对准地点的纬度 L已知,则可计算得参考量 g和 ω_{ie}在 n系中的投影 g^n和 ω_{ie}^n,即

$$g^n = [0 \quad 0 \quad -g]^T \tag{3}$$

$$\omega_{ie}^n = [0 \quad \omega_N \quad \omega_U]^T \tag{4}$$

其中 $\omega_N = \omega_{ie}\cos L$,$\omega_U = \omega_{ie}\sin L$,$g$是重力加速度大小,$\omega_{ie}$是地球自转角速率大小。姿态矩阵 C_b^n可由参考量 g及 ω_{ie}分别在 b系与 n系之间的转换关系 $g^n = C_b^n g^b$和 $\omega_{ie}^n = C_b^n \omega_{ie}^b$求得,构造 C_b^n的方法有多种[2-4],本文选用如下构造方式

$$\tilde{C}_b^n = \begin{bmatrix} (g^n)^T \\ (g^n \times \omega_{ie}^n)^T \\ [(g^n \times \omega_{ie}^n) \times g^n]^T \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} -(\tilde{f}_{sf}^b)^T \\ -(\tilde{f}_{sf}^b \times \tilde{\omega}_{ie}^b)^T \\ [(-\tilde{f}_{sf}^b \times \tilde{\omega}_{ie}^b) \times (-\tilde{f}_{sf}^b)]^T \end{bmatrix} \tag{5}$$

由于传感器存在测量误差,往往使得 $\tilde{C}_b^n$不是正交单位矩阵,通常还需将其按下式作正交化处理,最后求得初始对准姿态矩阵

$$(\tilde{C}_b^n)_o = \tilde{C}_b^n [(\tilde{C}_b^n)^T \tilde{C}_b^n]^{-1/2} \tag{6}$$

1.3 对准误差分析

由(6)式计算获得的初始对准姿态矩阵 $(\tilde{C}_b^n)_o$存在误差,其与真实姿态矩阵 C_b^n之间的关系为

$$(\tilde{C}_b^n)_o = (I - \Phi\times) C_b^n \tag{7}$$

其中,$\Phi = [\phi_E \quad \phi_N \quad \phi_U]^T$的3个分量分别表示数学平台的东向、北向和天向误差角,并且反对称矩阵 $\Phi\times$含义为

$$\Phi\times = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_U & \phi_N \\ \phi_U & 0 & -\phi_E \\ -\phi_N & \phi_E & 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

另一方面,若记

$$M = \begin{bmatrix} (g^n)^T \\ (g^n \times \omega_{ie}^n)^T \\ [(g^n \times \omega_{ie}^n) \times g^n]^T \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/(g\omega_N) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(g^2\omega_N) \\ -1/g & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} -(\tilde{f}_{sf}^b)^T \\ -(\tilde{f}_{sf}^b \times \tilde{\omega}_{ie}^b)^T \\ [(-\tilde{f}_{sf}^b \times \tilde{\omega}_{ie}^b) \times (-\tilde{f}_{sf}^b)]^T \end{bmatrix} \tag{9}$$

展开 $\tilde{Q}$,忽略关于传感器测量误差 δf_{sf}^b和 $\delta\omega_{ie}^b$的高阶

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

小量,得

$$\tilde{Q}=\begin{bmatrix}(g^b-\delta f^b_{sf})^{\mathrm{T}}\\ [(g^b-\delta f^b_{sf})\times(\omega^b_{ie}+\delta\omega^b_{ie})]^{\mathrm{T}}\\ \{[(g^b-\delta f^b_{sf})\times(\omega^b_{ie}+\delta\omega^b_{ie})]\times(g^b-\delta f^b_{sf})\}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\approx Q+\delta Q \tag{10}$$

其中 $Q=\begin{bmatrix}(g^b)^{\mathrm{T}}\\ (g^b\times\omega^b_{ie})^{\mathrm{T}}\\ [(g^b\times\omega^b_{ie})\times g^b]^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$, $\delta Q=$

$$\begin{bmatrix}-(\delta f^b_{sf})^{\mathrm{T}}\\ -(g^b\times\delta\omega^b_{ie}-\delta f^b_{sf}\times\omega^b_{ie})^{\mathrm{T}}\\ [(g^b\times\delta\omega^b_{ie}+\delta f^b_{sf}\times\omega^b_{ie})\times g^b+(g^b\times\omega^b_{ie})\times\delta f^b_{sf}]^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

则(5)式中的 $\tilde{C}^n_b$ 可改写成

$$\tilde{C}^n_b=M\tilde{Q}=MQ+M\delta Q=C^n_b+M\delta Q \tag{11}$$

将(11)式代入(6)式,按级数展开并舍去关于测量误差的高阶项,近似得

$$(\tilde{C}^n_b)_{\circ}=\{I+\frac{1}{2}[(M\delta Q)C^n_n-C^n_b(M\delta Q)^{\mathrm{T}}]\}C^n_b \tag{12}$$

比较(7)式和(12)式,可得数学平台误差角与传感器测量误差之间的关系

$$\Phi\times=\frac{1}{2}[C^n_b\delta Q^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}-(C^n_b\delta Q^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}] \tag{13}$$

记传感器测量误差在 n系投影的表达式为

$$\delta f^n_{sf}=C^n_b\delta f^b_{sf}=[\delta f^n_{sfE}\quad\delta f^n_{sfN}\quad\delta f^n_{sfU}]^{\mathrm{T}} \tag{14}$$

$$\delta\omega^n_{ie}=C^n_b\delta\omega^b_{ie}=[\delta\omega^n_{ieE}\quad\delta\omega^n_{ieN}\quad\delta\omega^n_{ieU}]^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

则有

$$C^n_b\delta Q^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-(\delta f^n_{sf})^{\mathrm{T}}\\ -(g^n\times\delta\omega^n_{ie}-\delta f^n_{sf}\times\omega^n_{ie})^{\mathrm{T}}\\ [(g^n\times\delta\omega^n_{ie}+\delta f^n_{sf}\times\omega^n_{ie})\times g^n+(g^n\times\omega^n_{ie})\times\delta f^n_{sf}]^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

将(9)式和(16)式代入(13)式,计算化简,最终求得数学平台误差角

$$\phi_{\mathrm{E}}=-\delta f^n_{sfN}/g,\quad\phi_{\mathrm{N}}=\delta f^n_{sfE}/g,$$
$$\phi_{\mathrm{U}}=\delta f^n_{sfE}\tan L/g-\delta\omega^n_{ieE}/\omega_{\mathrm{N}} \tag{17}$$

这就是传感器测量误差对数学平台误差角影响的表达式,与其它方法分析的结果是一致的[5]。

2 纬度未知条件下初始对准

2.1 纬度估计方法

不妨假设地球为圆球形的,并且忽略地球自转引起的哥氏加速度影响。如图 1所示,地球自转角速度 ω_{ie}和重力加速度 g之间的夹角与纬度 L存在如下关系

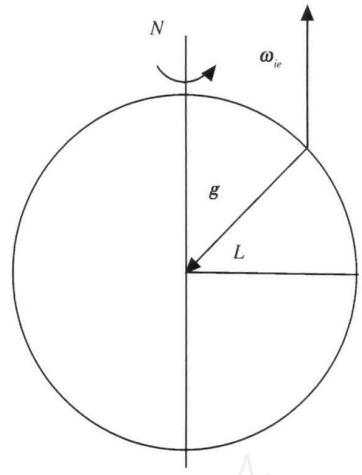


图 1 纬度估计示意图

$$L=\angle(g,\omega_{ie})-\pi/2 \tag{18}$$

其中 $\angle(a,b)$表示向量 a与 b之间的夹角。因此,在捷联惯导系统初始对准纬度未知时,可以由陀螺和加速度计测量值估计纬度得

$$\tilde{L}=\angle(-\tilde{f}^n_{sf},\tilde{\omega}^n_{ie})-\pi/2=\pi/2-\angle(\tilde{f}^n_{sf},\tilde{\omega}^n_{ie})=\pi/2-\angle(\tilde{f}^b_{sf},\tilde{\omega}^b_{ie}) \tag{19}$$

因为两矢量之间的夹角大小不因它们的具体坐标投影表达方式而改变,所以上式中有 $\angle(\tilde{f}^n_{sf},\tilde{\omega}^n_{ie})=\angle(\tilde{f}^b_{sf},\tilde{\omega}^b_{ie})$成立,文章后面还将利用到这一性质。

2.2 纬度估计误差

由(19)式取正弦值可得

$$\sin\tilde{L}=\cos(\angle(\tilde{f}^b_{sf},\tilde{\omega}^b_{ie}))=\frac{\langle\tilde{f}^b_{sf},\tilde{\omega}^b_{ie}\rangle}{|\tilde{f}^b_{sf}|\,|\tilde{\omega}^b_{ie}|} \tag{20}$$

其中$\langle a,b\rangle$表示向量 a与 b作内积。记 $\tilde{L}=L+\delta L$,展开上式得

$$\sin(L+\delta L)=\frac{\langle f^b_{sf}+\delta f^b_{sf},\omega^b_{ie}+\delta\omega^b_{ie}\rangle}{|f^b_{sf}+\delta f^b_{sf}|\,|\omega^b_{ie}+\delta\omega^b_{ie}|}\approx\frac{\langle f^b_{sf}+\delta f^b_{sf},\omega^b_{ie}+\delta\omega^b_{ie}\rangle}{|f^b_{sf}|\,|\omega^b_{ie}|} \tag{21}$$

即

$$\sin L+\delta L\cos L\approx\frac{\langle f^b_{sf},\omega^b_{ie}\rangle+\langle f^b_{sf},\delta\omega^b_{ie}\rangle+\langle\delta f^b_{sf},\omega^b_{ie}\rangle}{g\omega_{ie}} \tag{22}$$

经过化简,得纬度估计误差

$$\delta L=\frac{\langle f^b_{sf},\delta\omega^b_{ie}\rangle+\langle\delta f^b_{sf},\omega^b_{ie}\rangle}{g\omega_{ie}\cos L}=$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$(\langle f_{sf}^b/g, \delta\omega_{ie}^b/\omega_{ie}\rangle + \langle \delta f_{sf}^b/g, \omega_{ie}^b/\omega_{ie}\rangle)\sec L$$
$$= (\langle f_{sf}^n/g, \delta\omega_{ie}^n/\omega_{ie}\rangle + \langle \delta f_{sf}^e/g, \omega_{ie}^e/\omega_{ie}\rangle)\sec L$$
$$= (-\delta\omega_{ieU}^n/\omega_{ie} + \delta f_{sfz}/g)\sec L \quad (23)$$

上式中,$\delta\omega_{ieU}^n$表示陀螺测量误差矢量的天向投影分量,δf_{sfz}表示加速度计测量误差矢量在地球自转轴方向的投影分量。(23)式说明了纬度估计误差与陀螺测量误差矢量在重力方向上的投影分量成正比,与加速度计测量误差矢量在地球自转轴方向上的投影分量也成正比,并且还与纬度有关系,纬度越高估计误差越大。

2.3 姿态矩阵计算

将估计纬度 $\tilde{L}$ 用于 ω_{ie}^n的计算,代入(4)式,得

$$\tilde{\omega}_{ie}^n = [0 \quad \tilde{\omega}_N \quad \tilde{\omega}_U]^T \quad (24)$$

其中 $\tilde{\omega}_N = \omega_{ie}\cos\tilde{L}$,$\tilde{\omega}_U = \omega_{ie}\sin\tilde{L}$。姿态矩阵计算和正交化处理同(5)式和(6)式。

2.4 对准误差分析

若记

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} (g^n)^T \\ (g^n \times \tilde{\omega}_{ie}^n)^T \\ [(g^n \times \tilde{\omega}_{ie}^n) \times g^n]^T \end{bmatrix}^{-1} =$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1/(g\tilde{\omega}_N) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(g^2\tilde{\omega}_N) \\ -1/g & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx M + \delta M \quad (25)$$

则有

$$\delta M = \begin{bmatrix} 0 & \delta L\tan L/(g\omega_N) & 0 \\ 0 & 0 & \delta L\tan L/(g^2\omega_N) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

同时考虑纬度估计误差和传感器测量误差的影响,将(5)式中 $C_b^{\tilde{n}}$ 改写成

$$\tilde{C}_b^n = \tilde{M}\tilde{Q} = (M + \delta M)(Q + \delta Q) \approx$$
$$MQ + M\delta Q + \delta MQ = C_b^n + (M\delta Q + \delta MQ) \quad (27)$$

将(27)式代入(6)式,按级数展开并舍去关于误差的高阶项,近似得

$$(\tilde{C}_b^n)_\circ = \{I + \frac{1}{2}[(M\delta Q + \delta MQ)C_n^b -$$
$$C_b^n(M\delta Q + \delta MQ)^T]\}C_b^n \quad (28)$$

比较(7)式和(28)式可得数学平台误差角与纬度误差、传感器测量误差之间的关系

$$\Phi \times = \frac{1}{2}\{[C_b^n\delta Q^T M^T - (C_b^n\delta Q^T M^T)^T] +$$
$$[C_b^n Q^T\delta M^T - (C_b^n Q^T\delta M^T)^T]\} \quad (29)$$

上等式右边前半部分与(13)式完全相同,而后半部分中有

$$C_b^n Q^T = \begin{bmatrix} (g^n)^T \\ (g^n \times \omega_{ie}^n)^T \\ [(g^n \times \omega_{ie}^n) \times g^n]^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g\omega_N & 0 \\ 0 & 0 & g^2\omega_N \\ -g & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

和 $C_b^n Q^T\delta M^T = \begin{bmatrix} \delta L\tan L & 0 & 0 \\ 0 & \delta L\tan L & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

所以得 $C_b^n Q^T\delta M^T - (C_b^n Q^T\delta M^T)^T = 0$,这说明纬度误差与初始对准精度无关,纬度未知条件下对准精度公式同(17)式。进一步研究表明,如果选用其它初始对准计算方法,纬度估计误差可能对初始对准精度有影响,比如采取(30)式计算姿态矩阵,读者可自行分析之。

$$\tilde{C}_b^n = \begin{bmatrix} (g^n)^T \\ (\tilde{\omega}_{ie}^n)^T \\ (g^n \times \tilde{\omega}_{ie}^n)^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -(\tilde{f}_{sf}^b)^T \\ (\tilde{\omega}_{ie}^b)^T \\ -(\tilde{f}_{sf}^b \times \tilde{\omega}_{ie}^b)^T \end{bmatrix} \quad (30)$$

3 结 论

在捷联惯导系统静基座初始自对准中,纬度未知情况下可以先由惯性器件测量对纬度进行估计,再利用估计纬度进行初始对准姿态矩阵计算,本文所提方法中纬度误差不影响初始对准精度。因此,静基座初始对准时,除初始经度和高度外,也可以不必预先输入精确的纬度信息。

参 考 文 献

[1] 秦永元,严恭敏,顾冬晴等. 摇摆基座上基于 g信息的捷联惯导粗对准研究[J]. 西北工业大学学报, 2005, 23(5): 681 - 684.

[2] Yeon Fuh Jiang. Error Analysis of Analytic Coarse Alignment Methods[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1998, 34(1): 334 - 337.

[3] 陈令刚,刘建业,孙永荣等. 微小型捷联惯导系统解析式对准方法研究[J]. 航天控制, 2005, 23(4): 9 - 12.

[4] 魏春岭,张洪钺. 捷联惯导系统粗对准方法比较[J]. 航天控制, 2000(3): 16 - 21.

[5] 严恭敏,秦永元. 捷联惯导系统静基座初始对准精度分析及仿真[J]. 计算机仿真, 2006, 23(10): 36 - 40.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

文章编号：1005-6734(2008)02-0148-06

捷联惯性测量组件中内杆臂效应分析与补偿

严恭敏[1]，严卫生[1,2]，徐德民[1,2]

（1．西北工业大学航海学院，西安 710072；2．水下信息处理与控制国家级重点实验室，西安 710072）

摘要：在实际捷联惯性测量组件（SIMU）中，三个加速度计本质上测量的是 SIMU 上三个不同点处的加速度，如果把这些加速度当作来自于理想“点测量组件”的输出进行惯性导航解算，会从原理上引起导航误差，即内杆臂效应误差。假设 SIMU 中三个加速度计敏感轴互相垂直并且相交于一点，在 SIMU 绕某个固定坐标轴作角振动的条件下，分析了内杆臂效应的产生机理，得出内杆臂效应引起导航速度误差的规律：速度误差与角振动中心位置无关，与加速度计敏感点至交点的杆臂长度成正比，也与角振动频率成正比。提出内杆臂效应补偿的方法是将加速度计敏感点处的加速度测量值折算至它们的敏感轴交点上。

关 键 词：捷联惯导系统；SIMU；加速度计；杆臂效应；划船运动误差

中图分类号：U666.1 **文献标志码：**A

Analysis and compensation on inner lever arm effect of strapdown inertial measurement unit

YAN Gong-min[1], YAN Wei-sheng[1,2], XU De-min[1,2]

(1. College of Marine, Northwestern Polytechnical University, Xi’an 710072, China; 2. National Key Laboratory for Underwater Information Process & Control, Xi’an 710072, China)

Abstract: In a practical strapdown inertial measurement unit (SIMU), the acceleration measurements by three accelerometers are actually from different points. If these acceleration data are directly used, they could cause the navigation velocity error, i.e. inner lever arm effect velocity error (ILAEVR). The paper analyzed the mechanism of ILAEVE in detail, and some velocity error formulas were deduced by assuming that accelerometer’s sense axes were perpendicular to each other and the three axes intersect at one point—a virtual measuring point. When SIMU vibrates by a fixed axis, the velocity error is not relevant to the vibration position, but it is proportional to the length between accelerometer’s sense point and the virtual measuring point, and is also proportional to the SIMU vibrating frequency. The method of compensation for ILAEVE is to convert the accelerometer measurements to the virtual point of intersection.

Key words: SINS; strapdown inertial measurement unit; accelerometer; lever arm effect; scull error

在许多捷联惯性导航问题的研究中，都将捷联惯性测量组件（SIMU）当作“点测量组件”看待。当选择运载体上某点作为导航参考点（如舰船的摇摆中心），或进行不同导航系统之间信息对比（如SINS/GPS组合导航）时，必须考虑杆臂效应问题，不妨称之为外杆臂效应[1-4]。如果重新将导航参考点选择在SIMU上，并且惯性器件测量和导航计算均是理想的，则外杆臂效应从原理上并不会造成惯性导航误差，即导航结果就是运载体在SIMU点处真实运动状态的反映。然而现实中SIMU毕竟是具有一定体积大小的。如果将SIMU视为刚体，在SIMU角运动过程中它上面每个点的角速度都是相同的，所以理论上在SIMU中，三个角速度测量传感器——陀螺的安装位置和方位可以是任意的，只要它们的敏感轴之间不相互平行，均能实现SIMU的空间三维角速度测量[5]。但是，在角运动情况下，SIMU上各个点的加速度都是互不相同的，也

收稿日期：2008-01-02；**修回日期：**2008-03-18

基金项目：中国博士后科学基金（20070420215）；水下信息处理与控制国家级重点实验室基金（9140C230206070C2306）

作者简介：严恭敏（1977—），男，博士后，从事定位定向和水下航行器自主导航技术研究。E-mail：yangongmin@163.com

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

就是说，由于三个加速度计物理尺寸和实际安装位置的限制，它们测量的是SIMU上不同点处的加速度。如果把这些加速度当作来自于理想 “点测量组件”的输出进行惯性导航解算，将从原理上引起导航误差，文中称这种误差为内杆臂效应误差。本文研究的主要内容是分析内杆臂效应的产生原因和规律，并提出相应的补偿措施。

为了研究方便，提出如下假设条件：在SIMU中陀螺的测量是理想无误差的，SIMU中包含三个单轴加速度计 A_X、A_Y 和 A_Z，它们是“点敏感”的，并且敏感点（也可以用 A_X、A_Y 和 A_Z 点表示）相对SIMU固定不变，加速度计只感测沿敏感轴向的加速度，三个加速度计敏感轴相互垂直并且延长线相交于 o_b 点，如图 1 所示。以 o_b 为原点建立与SIMU固连的动坐标系 $o_bx_by_bz_b$，各加速度计敏感点相对于 o_b 的位置矢量在 $o_bx_by_bz_b$ 上投影分别为：$\boldsymbol{r}_x^b=[r_x \quad 0 \quad 0]^T$，$\boldsymbol{r}_y^b=[0 \quad r_y \quad 0]^T$ 和 $\boldsymbol{r}_z^b=[0 \quad 0 \quad r_z]^T$。

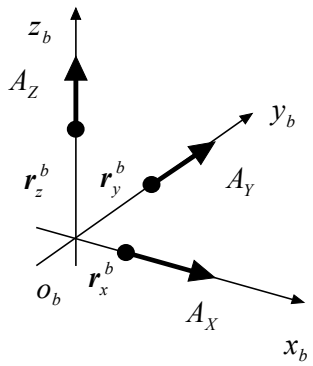


图1 三个加速度计的安装位置和敏感方向

Fig.1 Setting points and sense orientations of the accelerometers

下面首先分析质点在二维平面上的运动情况。

1 质点在圆弧形轨道上的运动分析

质点 R 沿半径为 r 的圆弧形轨道 ABC 反复运动，以角运动对称轴 oB 为 ox 轴，圆弧中心 o 为坐标原点建立固定坐标系 $oxyz$，使圆弧在平面 oxy 上，如图 2 所示（其中 oz 轴未画出，它垂直纸面向外）。质点与圆心之间的连线为 oR，假设 oR 与 ox 轴的夹角 $\alpha(t)$ 的规律为正弦角振动，即

$$\alpha(t)=\alpha_0\sin(\omega t) \tag{1}$$

其中，α_0 为振动幅值，ω 为角频率，并令 $T=2\pi/\omega$ 为振动周期。由式（1）求导后得振动角速率：

$$\dot{\alpha}(t)=\alpha_0\omega\cos(\omega t) \tag{2}$$

还容易得质点法向速度 $v_n(t)$、向心加速度 $a_n(t)$、切向速度 $v_t(t)$ 和切向加速度 $a_t(t)$ 分别为：

$$\begin{cases} v_n(t)=0 \\ a_n(t)=[\dot{\alpha}(t)]^2 r=r\alpha_0^2\omega^2[\cos(\omega t)]^2 \\ v_t(t)=\dot{\alpha}(t)r=r\alpha_0\omega\cos(\omega t) \\ a_t(t)=[v_t(t)]'=-r\alpha_0\omega^2\sin(\omega t) \end{cases} \tag{3}$$

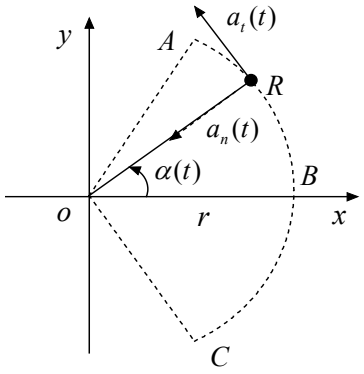


图 2 质点在圆弧形轨道上运动示意图

Fig.2 Particle motion on the arc path

一方面，在式（3）中对法向速度 $v_n(t)$ 和切向速度 $v_t(t)$ 沿坐标轴向分解，得速度投影：

$$\begin{cases} v_x(t)=-v_t(t)\sin[\alpha(t)]=-r\alpha_0\omega\cos(\omega t)\sin[\alpha_0\sin(\omega t)] \\ v_y(t)=v_t(t)\cos[\alpha(t)]=r\alpha_0\omega\cos(\omega t)\cos[\alpha_0\sin(\omega t)] \end{cases} \tag{4}$$

易知有 $v_x(0)=v_x(T)=0$ 和 $v_y(0)=v_y(T)=r\alpha_0\omega$ 成立，且在一个周期内速度变化 $\Delta v_x(T)=v_x(T)-v_x(0)=0$，$\Delta v_y(T)=v_y(T)-v_y(0)=0$。将式（4）求导得沿坐标轴向的加速度：

$$\begin{cases} a_x(t)=[v_x(t)]'=-r\alpha_0\omega^2\{-\sin(\omega t)\sin[\alpha_0\sin(\omega t)]+\alpha_0[\cos(\omega t)]^2\cos[\alpha_0\sin(\omega t)]\} \\ a_y(t)=[v_y(t)]'=-r\alpha_0\omega^2\{\sin(\omega t)\cos[\alpha_0\sin(\omega t)]+\alpha_0[\cos(\omega t)]^2\sin[\alpha_0\sin(\omega t)]\} \end{cases} \tag{5}$$

另一方面，在式（3）中直接对切向加速度 $a_t(t)$ 和向心加速度 $a_n(t)$ 沿坐标轴向分解，得加速度投影：

$$\begin{cases} a_{tx}(t)=-a_t(t)\sin[\alpha(t)]=r\alpha_0\omega^2\sin(\omega t)\sin[\alpha_0\sin(\omega t)] \\ a_{ty}(t)=a_t(t)\cos[\alpha(t)]=-r\alpha_0\omega^2\sin(\omega t)\cos[\alpha_0\sin(\omega t)] \\ a_{nx}(t)=-a_n(t)\cos[\alpha(t)]=-r\alpha_0^2\omega^2[\cos(\omega t)]^2\cos[\alpha_0\sin(\omega t)] \\ a_{ny}(t)=-a_n(t)\sin[\alpha(t)]=-r\alpha_0^2\omega^2[\cos(\omega t)]^2\sin[\alpha_0\sin(\omega t)] \end{cases} \tag{6}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

比较式（5）和式（6），易得：

$$a_x(t)=a_{tx}(t)+a_{nx}(t)\,,\qquad a_y(t)=a_{ty}(t)+a_{ny}(t) \tag{7}$$

暂且定义含参数 β 的二元积分函数：

$$Y_s(\beta,u,v)=\int_u^v \beta\sin(t)\sin[\beta\sin(t)]\mathrm{d}t\,,\qquad Y_c(\beta,u,v)=\int_u^v \beta\sin(t)\cos[\beta\sin(t)]\mathrm{d}t \tag{8}$$

直接求式（8）中两个积分的解析式解是非常困难的，但是根据被积函数的周期和对称特性，易知：

$$\begin{cases} Y_s(\beta,0,\pi/2)=Y_s(\beta,\pi/2,\pi)=Y_s(\beta,\pi,3\pi/2)=Y_s(\beta,3\pi/2,2\pi) \\ Y_c(\beta,0,2\pi)=Y_c(\beta,\pi/2,3\pi/2)=0 \end{cases} \tag{9}$$

若将参数 β 作为变量，当取值从0到180º变化时，利用数值积分方法求得 $Y_s(\beta,0,\pi/2)$ 的值，如图3所示，其中左上和右下小图分别为参数 β 从0到0.18º时和从0到1.8º时的积分函数曲线。由图可见，函数值随着参数 β 的减小而迅速减小。至此，由式（6）和式（7）可求得沿坐标轴向的各加速度投影的积分为：

$$\begin{cases} \Delta v_{tx}(T)=\int_0^T a_{tx}(t)\mathrm{d}t=\int_0^T r\alpha_0\omega^2\sin(\omega t)\sin[\alpha_0\sin(\omega t)]\mathrm{d}t=4r\omega Y_s(\alpha_0,0,\pi/2) \\ \Delta v_{ty}(T)=\int_0^T a_{ty}(t)\mathrm{d}t=\int_0^T -r\alpha_0\omega^2\sin(\omega t)\cos[\alpha_0\sin(\omega t)]\mathrm{d}t=-Y_c(\alpha_0,0,2\pi)=0 \\ \Delta v_{nx}(T)=\int_0^T a_{nx}(t)\mathrm{d}t=\int_0^T a_x(t)-a_{tx}(t)\mathrm{d}t=\Delta v_x(T)-\int_0^T a_{tx}(t)\mathrm{d}t=-4r\omega Y_s(\alpha_0,0,\pi/2) \\ \Delta v_{ny}(T)=\int_0^T a_{ny}(t)\mathrm{d}t=\int_0^T a_y(t)-a_{ty}(t)\mathrm{d}t=\Delta v_y(T)-\int_0^T a_{ty}(t)\mathrm{d}t=0 \end{cases} \tag{10}$$

虽然式（10）中第一、三式显示向心加速度和切向加速度的 ox 轴投影在一个周期内积分均不为零，但是它们符号正好相反，而式（10）中第二、四式显示向心加速度和切向加速度的 oy 轴投影在一个周期内积分均为零。换句话说，在“点测量组件”中，若由加速度计分别测量质点的切向和法向加速度，并且由陀螺准确测量角振动，则理论上利用陀螺和加速度计测量进行导航积分解算，在一个周期内的总速度增量将为零。但是，如果SIMU不是“点测量组件”，情况又会如何呢？这一问题将在下一节中进行详细分析。

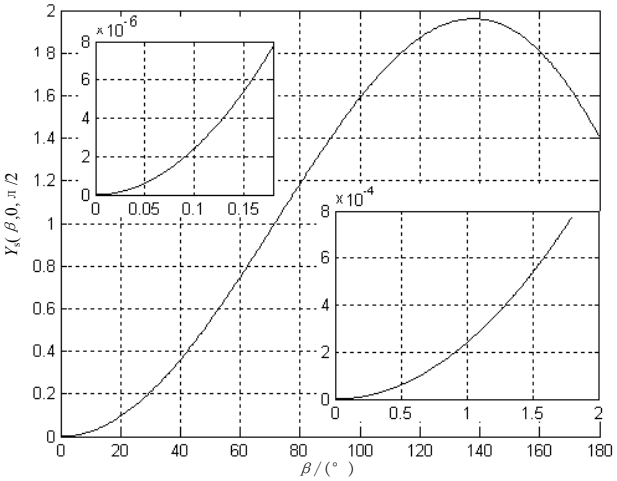


图3 $Y_s(\beta,0,\pi/2)$ 函数值

Fig.3 Graph for $Y_s(\beta,0,\pi/2)$

2 内杆臂效应误差分析

假设SIMU绕平行于 o_bz_b 轴的某转动轴作正弦角振动，该转动轴与 $o_bx_by_b$ 平面相交于 o_b' 点，振动幅值为 α_0，频率为 ω，如图4所示。现建立两种坐标系：一是固定坐标系 $oxyz$，使 ox 和 oy 坐标轴分别平行于振动平衡位置时的两加速度计敏感轴向，原点可任意选取；二是与SIMU固连的动坐标系 $o_b'x_b'y_b'z_b'$，它的三个坐标轴分别平行于 $o_bx_by_bz_b$ 的同名坐标轴。则参照式（3）可得角振动在 A_X 加速度计敏感点处的向心加速度和切向加速度大小分别为：

$$\begin{cases} a_{Xn}(t)=\left|OA_X\right|\alpha_0^2\omega^2[\cos(\omega t)]^2 \\ a_{Xt}(t)=-\left|OA_X\right|\alpha_0\omega^2\sin(\omega t) \end{cases} \tag{11}$$

所以沿加速度计 A_X 敏感轴向的加速度，即加速度计 A_X 的测量值为：

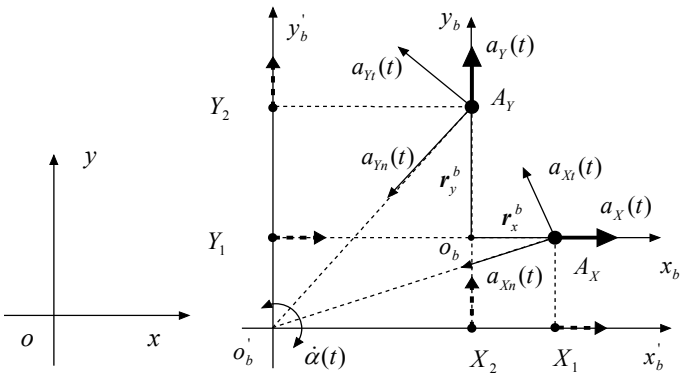


图4 内杆臂效应分析示意图

Fig.4 Analysis diagram of inner lever arm effect

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$a_X(t)=-a_{Xn}(t)\cos\angle A_X o_{\mathrm{b}}^{'}x_{\mathrm{b}}^{'}-a_{Xt}(t)\sin\angle A_X o_{\mathrm{b}}^{'}x_{\mathrm{b}}^{'}=-\left|o_{\mathrm{b}}^{'}X_1\right|\alpha_0^2\omega^2[\cos(\omega t)]^2+\left|o_{\mathrm{b}}^{'}Y_1\right|\alpha_0\omega^2\sin(\omega t) \tag{12}$$

它等效于在 X_1 和 Y_1 点处的两个虚拟的加速度计测量合成，Y_1 测量的是振动虚拟切向加速度 $\tilde{a}_{Xt}(t)=\left|o_{\mathrm{b}}^{'}Y_1\right|\alpha_0\omega^2\sin(\omega t)$，$X_1$ 测量的是振动虚拟法向加速度 $\tilde{a}_{Xn}(t)=-\left|o_{\mathrm{b}}^{'}X_1\right|\alpha_0^2\omega^2[\cos(\omega t)]^2$。同理可得 A_Y 加速度计的测量值为：

$$a_Y(t)=-a_{Yn}(t)\sin\angle A_Y o_{\mathrm{b}}^{'}x_{\mathrm{b}}^{'}+a_{Yt}(t)\cos\angle A_Y o_{\mathrm{b}}^{'}x_{\mathrm{b}}^{'}=-\left|o_{\mathrm{b}}^{'}Y_2\right|\alpha_0^2\omega^2[\cos(\omega t)]^2-\left|o_{\mathrm{b}}^{'}X_2\right|\alpha_0\omega^2\sin(\omega t) \tag{13}$$

并等效成在 Y_2 和 X_2 点处的两个虚拟的加速度计测量合成，Y_2 测量的是振动虚拟法向加速度 $\tilde{a}_{Yn}(t)=-\left|o_{\mathrm{b}}^{'}Y_2\right|\alpha_0^2\omega^2[\cos(\omega t)]^2$，$X_2$ 测量的是振动虚拟切向加速度 $\tilde{a}_{Yt}(t)=-\left|o_{\mathrm{b}}^{'}X_2\right|\alpha_0\omega^2\sin(\omega t)$。

参考式（6）和式（10），将 $\tilde{a}_{Xn}(t)$、$\tilde{a}_{Xt}(t)$、$\tilde{a}_{Yn}(t)$ 和 $\tilde{a}_{Yt}(t)$ 均沿固定坐标系 $oxyz$ 的轴向投影，再在一个振动周期内积分并求和，得轴向导航速度增量：

$$\begin{cases}\Delta v_x(T)=\int_0^T a_x(t)\mathrm{d}t=\int_0^T[\tilde{a}_{Xnx}(t)+\tilde{a}_{Xtx}(t)+\tilde{a}_{Ynx}(t)+\tilde{a}_{Ytx}(t)]\mathrm{d}t=\\ \qquad -4\left|o_{\mathrm{b}}^{'}X_1\right|\omega Y_s(\alpha_0,0,\pi/2)+0+0+4\left|o_{\mathrm{b}}^{'}X_2\right|\omega Y_s(\alpha_0,0,\pi/2)=\\ \qquad -4r_x\omega Y_s(\alpha_0,0,\pi/2)\\ \Delta v_y(T)=\int_0^T a_y(t)\mathrm{d}t=\int_0^T[\tilde{a}_{Xny}(t)+\tilde{a}_{Xty}(t)+\tilde{a}_{Yny}(t)+\tilde{a}_{Yty}(t)]\mathrm{d}t=\\ \qquad 0+4\left|o_{\mathrm{b}}^{'}Y_1\right|\omega Y_s(\alpha_0,0,\pi/2)-4\left|o_{\mathrm{b}}^{'}Y_2\right|\omega Y_s(\alpha_0,0,\pi/2)+0=\\ \qquad -4r_y\omega Y_s(\alpha_0,0,\pi/2)\end{cases} \tag{14}$$

由式（14）可见，在一个振动周期内的导航速度增量与振动中心的位置无关，由于虚拟法向加速度积分与虚拟切向加速度积分无法完全抵消，当振幅一定时，导航速度增量与加速度计敏感点（A_X 和 A_Y）与敏感轴延长线交点（o_{b}）的距离成正比，也与振动频率成正比。

以上分析表明，由于在实际SIMU中加速度计之间的安装位置存在差异，如果把加速度计测量当作“点测量组件”的输出进行导航解算，则将从原理上造成速度解算误差，称该误差为内杆臂效应速度误差，并称 r_x 和 r_y 为内杆臂长度。同理，也可对空间三维角运动情况进行分析，能得出类似的结论。以下再给出内杆臂效应的速度误差平均漂移率计算公式：

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\Delta v_x(T)/T=-2/\pi\cdot r_x\omega^2Y_s(\alpha_0,0,\pi/2)\\ \varepsilon_y=\Delta v_y(T)/T=-2/\pi\cdot r_y\omega^2Y_s(\alpha_0,0,\pi/2)\end{cases} \tag{15}$$

若仅取 t 从 $T/4$ 到 $3T/4$ 这段时间作分析，容易求得：

$$\int_{T/4}^{3T/4}a_x(t)\mathrm{d}t=-r_x\omega Y_s(\alpha_0,\pi/2,3\pi/2)=-2r_x\omega Y_s(\alpha_0,0,\pi/2)\,,\qquad \int_{T/4}^{3T/4}a_y(t)\mathrm{d}t=-2r_y\omega Y_s(\alpha_0,0,\pi/2)$$

这说明该段时间内导航速度解算发生了变化，而实际上SIMU在 $T/4$ 时刻和 $3T/4$ 时刻的真实速度是相同的，均为0。

上述例子说明了一个重要的现象：若SIMU初始导航速度为零，接着突然按正弦角速率绕 $o_{\mathrm{b}}^{'}z_{\mathrm{b}}^{'}$ 轴转动 $2\alpha_0$ 角度后再停止，则由于内杆臂效应，将在 ox 和 oy 轴出现导航速度解算误差，即内杆臂效应速度误差（如 α_0 =90°，$r_x=r_y=5$ cm，$\omega=0.5$ Hz，则速度误差约为−0.44 m/s）。虽然该例子是在特定的角运动规律下进行计算才得到导航速度解算误差的具体公式，但是它足以说明，在实际捷联惯导系统中，如果加速度计的内杆臂长度比较大，当运载体出现角运动，特别是航向急速转弯时，将可能引起严重的导航速度解算误差。

3　内杆臂效应的补偿方法

通过上一小节的分析指出，当三个加速度计敏感轴互相垂直并且相交于一点时，内杆臂效应速度误差与角振动中心无关，式（15）表明在一定振幅下内杆臂效应造成的导航速度漂移率与内杆臂长度成正比，也与振动频率平方成正比。反过来说，如果利用速率转台给SIMU以适当的角振动规律，从导航速度漂移率中即可辨识出内杆臂长度。当然，如果能直接使用测量工具测得内杆臂长度是最简单的了。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

测得内杆臂长度后，补偿内杆臂效应的基本思路是将加速度计敏感点处的加速度测量值折算至它们的敏感轴交点上，参见图1，也就是将加速度计 A_X、A_Y 和 A_Z 的输出折算至 o_b 点。假设SIMU的角运动速度矢量为 $\boldsymbol{\omega}=[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^\mathrm{T}$，现以加速度计 A_X 为例，则易知 A_X 点加速度矢量 $\boldsymbol{a}_X=[a_{Xx} \quad a_{Xy} \quad a_{Xz}]^\mathrm{T}$ 与 o_b 点加速度矢量 $\boldsymbol{a}_o=[a_{ox} \quad a_{oy} \quad a_{oz}]^\mathrm{T}$ 之间的关系为：

$$\boldsymbol{a}_X=\boldsymbol{a}_o+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_x^\mathrm{b}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_x^\mathrm{b}) \tag{16}$$

式中，$\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}_x^\mathrm{b}$ 和 $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_x^\mathrm{b})$ 分别代表 A_X 点相对于 o_b 点的切向加速度和法向加速度。由于加速度计 A_X 只敏感沿 $o_\mathrm{b}x_\mathrm{b}$ 轴向（法向）的加速度，将式（16）在 $o_\mathrm{b}x_\mathrm{b}$ 轴投影得加速度计 A_X 测量输出 a_{Xx} 为 $a_{Xx}=a_{ox}-(\omega_y^2+\omega_z^2)r_x$，移项后得 a_{ox} 计算公式。同理可得加速度计 A_Y 测量输出 a_{Yy} 和加速度计 A_Z 测量输出 a_{Zz} 折算至 o_b 的计算公式，即：

$$a_{ox}=a_{Xx}+(\omega_y^2+\omega_z^2)r_x,\quad a_{oy}=a_{Yy}+(\omega_z^2+\omega_x^2)r_y,\quad a_{oz}=a_{Zz}+(\omega_x^2+\omega_y^2)r_z \tag{17}$$

将式（17）记成矢量形式为：

$$\boldsymbol{a}_o=\boldsymbol{a}_A-\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}^\mathrm{b}) \tag{18}$$

其中 $\boldsymbol{a}_A=[a_{Xx} \quad a_{Yy} \quad a_{Zz}]^\mathrm{T}$，$\boldsymbol{r}^\mathrm{b}=[r_x \quad r_y \quad r_z]^\mathrm{T}$，这就是进行内杆臂效应补偿的公式。经补偿后若将 o_b 视为导航信息参考点，则从原理上不会再造成任何杆臂效应误差。对比式（18）和式（16），它们有些相似，然而式（18）缺少切向加速度项，从而与角速度的导数无关。从式（18）还可以看出，三个单轴加速度计的折算过程就像在矢径 $\boldsymbol{r}^\mathrm{b}$ 末端处有一个虚拟的“点状”三轴加速度计一样，但是虚拟加速度从 $\boldsymbol{r}^\mathrm{b}$ 末端折算至 o_b 点时不必考虑切向加速度影响。

如果三个加速度计敏感轴不相互垂直或者不相交于一点，分析过程稍显复杂，这里不再详细介绍。但是可以指出的是，如果三个加速度计敏感轴不相交于一点，则在加速度的折算过程中必然与角速度的导数关联，这对角速率或角增量输出的陀螺来说，求导对实际导航系统的影响是不利的。因此，在SIMU中通常对加速度计的安装都有一定的位置和方位要求，即要求三个加速度计敏感轴尽量相互垂直并且尽可能相交于一点，以降低内杆臂效应补偿的复杂性和减小导航误差。

4 杆臂效应引起的划船运动误差探讨

划船运动误差是由捷联惯导数值积分算法引起的，属于算法性误差，区别于前面的原理性误差。既使把SIMU当作“点测量组件”，这种算法性误差也是存在的，它还与振动中心的位置，即外杆臂长度有关。现分析如下：参见图2，假设振动幅值 α_0 是小量，忽略关于 α_0 的二阶小量，则在式（6）中，除 $a_{ty}(t)$ 简化为式（19）外，其余各式均近似为0。

$$a_{ty}(t)\approx -r\alpha_0\omega^2\sin(\omega t) \tag{19}$$

可见，加速度 $a_{ty}(t)$ 平行于 oy 轴，而角振动 $\dot{\alpha}(t)=\alpha_0\omega\cos(\omega t)$ 平行于 oz 轴，因此，未作划船运动补偿时在捷联惯导算法中将产生沿 ox 轴的划船运动误差[6]，其速度漂移率大小为：

$$\Delta v_\mathrm{scull}/T=r\alpha_0^2\omega^2 \tag{20}$$

划船运动误差速度漂移率与外杆臂长度成正比，因此，除了在捷联惯导算法中应采样划船误差补偿算法外，还应尽量将SIMU安装在运载体振动中心附近。对比式（15）和（20），可知在外杆臂长度比较大时，有效的划船误差补偿是利用试验方法进行正确的内杆臂长度计算的前提。

此外，既使运载体或使用环境没有角振动，在含有振动源的SIMU中，如由机械抖动偏频激光陀螺构成的捷联惯组，也可能出现划船运动误差[7]，可以将它看成是外杆臂划船误差的一个“微型缩影”。例如，在激光陀螺捷联惯组中，激光陀螺的抖动会经减震器诱导SIMU共振，如果共振中心与经内杆臂补效应偿后的加速度组件中心不重合，假设共振幅值 α_0=30"，频率 ω=10 Hz，加速度计组件中心离共振中心的杆臂长度 r=5 cm，则 $\Delta v_\mathrm{scull}/T\approx 4\times10^{-7}g$，在惯性级精度的导航系统中，该值可以忽略不计。

5 结 论

在SIMU的三个加速度计敏感轴互相垂直并且相交于一点的比较理想的条件下，分析了内杆臂效应产生的原因，即是由于虚拟法向加速度积分与虚拟切向加速度积分无法完全抵消造成的，内杆臂效应速度漂移率与角振动中心无关，而

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

与内杆臂长度成正比，也与振动频率平方成正比。进行内杆臂效应补偿的方法是将加速度计敏感点处的加速度测量值折算至它们的敏感轴交点上。如果SIMU的加速度计敏感轴不相互垂直或者不相交于一点，内杆臂效应的分析和补偿过程会比较复杂，但是这一问题在多加速度计冗余配置的SIMU中是无法避免的，值得更深入地研究。

参考文献(References)：

[1] 曹洁，刘光军，高伟，等. 捷联惯导初始对准中杆臂效应误差的补偿[J]. 中国惯性技术学报，2003，11(3)：39−44.
CAO Jie, LIU Guang-jun, GAO Wei, et al. Compensation of lever-arm effect in initial alignment of strapdown systems[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2003, 11(3): 39−44.

[2] 江红，张炎华，赵忠华. 捷联惯性导航系统传递对准的杆臂效应分析[J]. 中国造船，2006，47(4)：71−76.
JIANG Hong, ZHANG Yan-hua, ZHAO Zhong-hua. Analysis on the lever-arm effect in transfer alignment of strapdown inertial navigation system[J]. Ship Building of China, 2006, 47(4): 71−76.

[3] Hong S, Lee M H, Kwon S H, et al. A car test for the estimation of GPS/INS alignment errors[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2004, 5(3): 208−218.

[4] 徐晓苏，万德钧. 舰载捷联惯性系统中杆臂效应误差的研究[J]. 东南大学学报，1994，24(2)：122−126.
XU Xiao-su, WAN De-jun. A study on dimension effect error of strapdown inertial system[J]. Journal of Southeast University, 1994, 24(2): 122−126.

[5] 严恭敏. 车载自主定位定向系统研究[D]. 西安：西北工业大学博士论文，2006：104−106.
YAN Gong-min, The research on vehicular autonomous position and azimuth determining system[D]. Xi'an, China: Northwestern Polytechnical University, 2006: 104−106.

[6] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京：科学出版社，2006.
QIN Yong-yuan. Inertial navigation[M]. Beijing: Science Press, 2006.

[7] 潘献飞，吴文启，吴美平. 考虑信号处理特性的划摇算法优化[J]. 中国惯性技术学报，2007，15(5)：536−541.
PAN Xian-fei, WU Wen-qi, WU Mei-ping. Optimization of sculling algorithms considering the signal process characteristics[J]. Journal of Chinese Inertial Technology ,2007, 15(5): 536−541.

（上接第147页）

5　结 论

我们对捷联惯性导航系统中旋转矢量求解的问题，分别进行了角速度频域重构求解和常规方法求解的数值仿真计算。仿真结果表明：在高动态环境下频域重构求解旋转矢量的精度高于传统时域三子样，甚至也高于传统四子样。因此在高动态环境下将角速度频域重构的方法应用到旋转矢量的求解，能够有效抑制圆锥误差，提高解算精度。

参考文献(References)：

[1] LIN Xue-yuan, LIU Jian-ye, LIU Hong. An improved rotation vector attitude algorithm for laser strapdowm inertial navigation system[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2003, 20(1): 47−52.

[2] Savage P G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design, Part 1: Attitude algorithms[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1998, 21(1): 19−28.

[3] 冯丹琼，徐晓苏. 船用捷联惯性导航系姿态算法精度评估研究[J]. 中国惯性技术学报，2005，13(4)：10−13.
FENG Dan-qiong, XU Xiao-su. Evaluation on precision of attitude algorithm for ship SINS[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2005, 13(4): 10−13.

[4] 孙丽，秦永元. 捷联惯性导航系统姿态算法比较[J]. 中国惯性技术学报，2006，14(3)：6−9.
SUN Li, QIN Yong-yuan. Comparison of attitude algorithms of SINS[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2006, 14(3): 6−9.

[5] Andrey Soloviev. Investigation into performance enhancement of integrated GPS/INS by frequency domain implementation of inertial computational procedures[D]. Ohio: Ohio University, 2002.

[6] Soloviev A, Frank van Graas. Mitigation of commutation and sculling errors by frequency domain development of INS algorithmic, Part A[C]//Proceedings of the 2002 National Technical Meeting of the Institute of Navigation. San Diego, California, 2002: 330−338.

[7] 余杨，张洪钺. 捷联惯导系统中的圆锥和伪圆锥运动研究[J]. 中国惯性技术学报，2006，14(5)：1−4.
YU Yang, ZHANG Hong-yue. Coning motion and pseudo-coning motion of SINS[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2006, 14(5): 1−4.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Correction Study on Dithered Laser Gyro Whole Cycle Sampling Demodulation in SINS *

YAN Gong-min[1], YAN Wei-sheng[1,2*], XU De-min[1,2], LUO Yi-song[3], MA Jian-wei[4]

1. College of Marine, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. National Key Laboratory for Underwater Information Process & Control, Xi'an 710072, China;
3. Chongqing Aerospace New Century Satellite Application Technology Co. Ltd, Chongqing 401122, China;
4. Shandong Anqiu Power Supply Company, Anqiu Shandong 262100, China

Abstract: In dithered laser gyro strapdown inertial navigation system (LSINS) and under the coning motion circumstance, large attitude drift error occurs when adopting the dithered laser gyro whole cycle sampling demodulation (WCSD) method. With some modification to the WCSD circuit, an effective innovation is introduced to the demodulation technique, and the linear extrapolation for gyro angle increment prediction is deduced. Some simulations are carried out and the results show that the linear plus quadratic extrapolation correction algorithm is perfect and it can decrease WCSD attitude drift error to the error level of the ideal sampling method. The study will help to improve the WCSD application for dithered laser gyro.

Key words: dithered laser gyro; whole cycle sampling demodulation; coning motion; correction
EEACC: 7630; 6330

激光陀螺捷联惯导系统中整周期采样的修正研究 *

严恭敏[1],严卫生[1,2*],徐德民[1,2],罗毅松[3],马建伟[4]

1. 西北工业大学航海学院,西安 710072; 2. 水下信息处理与控制国家级重点实验室,西安 710072;
3. 重庆航天新世纪卫星应用技术有限责任公司,重庆 401122; 4. 山东安丘电业公司,山东 安丘 262100

摘 要:在圆锥运动环境下,若抖动偏频激光陀螺采用整周期采样抖动解调方式,将会引起严重的捷联惯导姿态算法漂移误差。提出了在整周期采样电路上进行少许改动,就能作出有效改进的方法,并详细推导了线性外推修正的算法公式。仿真结果表明,当姿态更新采用等效旋转矢量二子样算法时,利用线性 + 抛物线外推修正的效果非常显著,它能有效抑制整周期采样造成的姿态算法漂移误差,达到与理想采样的漂移误差非常接近的程度。研究结果有利于拓展整周期采样的应用范围。

关键词:抖动偏频激光陀螺;整周期采样;圆锥运动;修正
中图分类号:V249.3 **文献标识码**:A **文章编号**:1004-1699(2008)06-0998-04

机械抖动偏频激光陀螺中的抖动解调是激光陀螺走向应用环节的一项重要技术。目前,国内在中高精度激光陀螺捷联惯导系统中普遍采用高频采样方式解决抖动解调问题,由于高频采样引入的低通滤波器的影响,处于滤波器通带内的陀螺有效信号的幅频和相频特性也不可避免的发生变化,信号的微小畸变可能引入较大的姿态算法误差,为了减小信号滤波对姿态算法精度的影响,文献[1,2]提出了对经典圆锥补偿算法进行修正的公式,修正效果好。在高频采样的低通滤波器中一般采用 FIR 滤波器,使用 FIR 滤波器必然带来相位延迟问题,当导航系统参与制导控制时,过大的延时可能影响制导控制系统的控制回路性能。例如当角运动速率 200°/s、高频采样频率 2 000 Hz、FIR 滤波器为 30 阶时,将带来 7.5 ms 时延和产生 1.5′的角度测量误差,这在苛刻的应用环境中必需予以重视。

虽然激光陀螺的整周期采样抖动解调技术在中高精度捷联惯导系统中应用不多,但是其方法实现

基金项目:水下信息处理与控制国家级重点实验室基金资助(9140C230206070C2306);中国博士后科学基金资助(20070420215)
收稿日期:2007-09-28 修改日期:20070-11-03

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

简单,与高频采样相比对系统性能要求不高,因而具有一定的应用价值。文献[3]研究指出了捷联惯导系统中整周期采样存在如下缺点:①载体运动角速率难以实时准确测量;②载体姿态角测量存在延迟难以估计和补偿;③由于三个轴激光陀螺整周期锁存不同步,造成姿态解算的不可交换误差,误差随时间不断增长。本文提出了对激光陀螺整周期采样进行修正的方法,仿真表明它能消除运动角速率和姿态角测量不准的缺点,并有效降低了在圆锥运动环境下的姿态漂移误差,研究结果将有助于增加整周期采样的实际应用价值。

1　整周期采样及其对姿态误差的影响

如图 1 所示,g_x、g_y、g_z 三条横线分别代表捷联惯导系统中三个轴激光陀螺的输出时序,线上每一个节点表示整周期锁存的时刻,由于各个激光陀螺机械抖动周期不相等,因此它们的整周期锁存周期不同,即整周期锁存时刻也不相同。图中,t_k、t_{k+1}、t_{k+2} 表示导航计算机定时采样时刻,采样周期为 h。可以看出,图中共有四个独立的时钟系统(三个陀螺整周期锁存时钟加上一个导航计算机定时采样时钟,它们彼此间相互独立)。

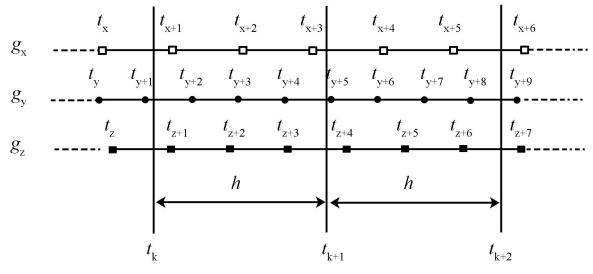


图 1　激光陀螺整周期锁存与定时采样示意图

在导航计算机定时采样 t_{k+1} 时刻,g_x 陀螺输出采样值为 t_x 至 t_{x+3} 时间段内的角增量(期间共包含 g_x 陀螺的三个整周期锁存周期);而在 t_{k+2} 采样时刻,g_x 陀螺输出采样值为 t_{x+3} 至 t_{x+5} 时间段内的角增量(期间只包含 g_x 陀螺的两个整周期锁存周期)。这表明,虽然导航计算机定时采样时钟周期不变,但是不同采样时刻采集到的陀螺输出可能包含不等周期数的整周期锁存角增量,即导航计算机采样时间长度与期间陀螺输出时间长度之间没有确定的关系。由于难以准确获得陀螺输出时间长度,就造成了利用角增量输出求取瞬时角速率的困难。其它两个轴的陀螺采样输出情况分析也类似于 g_x 陀螺。还须指出,三个轴陀螺从各自的最近一次整周期锁存时刻到导航计算机采样时刻的采样延迟时间也是不相等的(如在 t_{k+1} 采样时刻,三个陀螺采样延迟分别为 $t_{k+1}-t_{x+3}$、$t_{k+1}-t_{y+4}$、$t_{k+1}-t_{z+3}$)。由于陀螺输出时间长度不等和延迟时间不等的影响,如果捷联惯组三个轴都存在持续角运动,在捷联惯导算法中就可能产生角运动不可交换性误差并不断积累,最终导致严重姿态解算误差。

文献[3]分析了激光陀螺整周期采样对姿态解算的影响,指出当捷联惯组绕航向轴作圆锥运动时,捷联惯导系统姿态更新算法中虽然水平姿态角漂移小,但是瞬时姿态角和姿态角速率测量精度差,最为突出的问题是航向漂移误差大。例如在以下条件时:激光陀螺机械抖动频率 x 轴 370 Hz、y 轴 359 Hz、z 轴 408 Hz、圆锥运动幅值 $\alpha=1°$、频率 $f=5$ Hz、计算机定时采样周期 $h=10$ ms、姿态算法采用等效旋转矢量二子样算法,仿真 10 min 后理想角增量采样输出时航向漂移误差角约 3′,而整周期采样时航向漂移误差角约 47′,后者大约是前者的 18 倍,它充分说明了激光陀螺整周期采样会造成较大的漂移误差,这是限制整周期采样在中高精度捷联惯导系统上应用的一个重要原因。

2　整周期采样的修正方法

对整周期采样进行修正,比较简单而又实用的方法是在采样电路中增加一些触发信号和计数器。以 g_x 陀螺为例,每当陀螺机械抖动过平衡位置时,可以利用过平衡信号复位计数器并使计数器重新开始以一定的频率累加计数,而当导航计算机定时采样信号到来时,以定时采样信号终止计数器计数,最后在计算机采样程序中同时读取陀螺的脉冲数和相应计数器的计数值。因为计数器的计数频率是事先已知的,所以容易求得 g_x 陀螺的整周期锁存 t_x 时刻至计算机定时采样 t_k 时刻的时间长度 t_k-t_x,不妨以 $h_{x,k}$ 表示之,即 $h_{x,k}=t_k-t_x$,如图 2 所示,同样可以求得图示的时间长度 $h_{x+3,k+1}=t_{k+1}-t_{x+3}$ 和 $h_{x+5,k+2}=t_{k+2}-t_{x+5}$。知道了陀螺的整周期锁存时刻至计算机定时采样时刻的时间长度,就能够借助外推算法估计出该时间段内陀螺输出的角增量,从而对计算机定时采样角增量进行修正。下文以角速率线性外推为例来估计 g_x 陀螺在 $h_{x+5,k+2}$ 时间段内的角增量。

首先,记 t_x 时刻至 t_{x+3} 时刻的时间中点、t_{x+3} 时刻至 t_{x+5} 时刻的时间中点、t_{x+5} 时刻至 t_{k+2} 时刻的时间中点分别为 $t_{x,x+3}$、$t_{x+3,x+5}$ 和 $t_{x+5,k+2}$,即有:

$$t_{x,x+3}=\frac{t_x+t_{x+3}}{2}=\frac{(t_k-h_{x,k})+(t_k+h-h_{x+3,k+1})}{2}=t_k+\frac{h-h_{x,k}-h_{x+3,k+1}}{2}\tag{1}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$t_{x+3,x+5} = \frac{t_{x+3} + t_{x+5}}{2} = \frac{(t_k + h - h_{x+3,k+1}) + (t_k + 2h - h_{x+5,k+2})}{2} = t_k + h + \frac{h - h_{x+3,k+1} - h_{x+5,k+2}}{2} \quad (2)$$

$$t_{x+5,k+2} = \frac{t_{x+5} + t_{k+2}}{2} = \frac{(t_k + 2h - h_{x+5,k+2}) + (t_k + 2h)}{2} = t_k + 2h - \frac{h_{x+5,k+2}}{2} \quad (3)$$

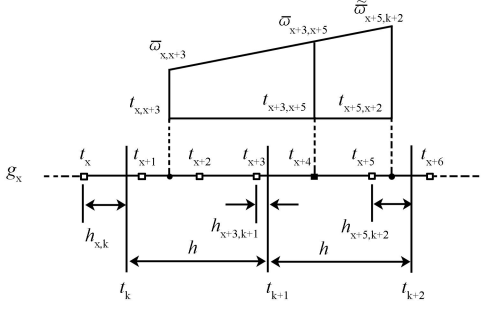


图 2 激光陀螺整周期采样修正示意图

其次,假设计算机定时采样在 t_{k+1} 时刻和 t_{k+2} 时刻读取 g_x 陀螺的角增量输出分别为 $\Delta\theta_{k+1,x}$ 和 $\Delta\theta_{k+2,x}$,则若以 t_x 时刻至 t_{x+3} 时刻内的平均角速率代替该段时间中点 $t_{x,x+3}$ 时刻的角速率 $\bar{\omega}_{x,x+3}$,得

$$\bar{\omega}_{x,x+3} = \frac{\Delta\theta_{k+1,x}}{t_{x+3} - t_x} = \frac{\Delta\theta_{k+1,x}}{h + h_{x,k} - h_{x+3,k+1}} \quad (4)$$

同理求得中点 $t_{x+3,x+5}$ 时刻的角速率

$$\omega_{x+3,x+5} = \frac{\Delta\theta_{k+2,x}}{t_{x+5} - t_{x+3}} = \frac{\Delta\theta_{k+2,x}}{h + h_{x+3,k+1} - h_{x+5,k+2}} \quad (5)$$

最后,利用梯形边长之间的比例关系式,参见图 2 中梯形部分,可线性外推估计得 $t_{x+5,k+2}$ 时刻的角速率 $\omega_{x+5,k+2}$,即可由比例关系式

$$\frac{\dot{\omega}_{x+5,k+2} - \dot{\omega}_{x+3,x+5}}{\omega_{x+3,x+5} - \omega_{x,x+3}} = \frac{t_{x+5,k+2} - t_{x+3,x+5}}{t_{x+3,x+5} - t_{x,x+3}} \quad (6)$$

再将式(1) ~ 式(3) 代入式(6),经过整理求得

$$\omega_{x+5,k+2} = \omega_{x+3,x+5} + \frac{h + h_{x+3,k+1}}{2h + h_{x,k} - h_{x+5,k+2}} (\omega_{x+3,x+5} - \omega_{x,x+3}) \quad (7)$$

获得线性外推角速率式(7) 后,进一步可粗略计算出从整周期锁存 t_{x+5} 时刻至计算机定时采样 t_{k+2} 时刻的陀螺输出角增量修正量为

$$\delta\theta_{k+2,x} = \omega_{x+5,k+2} h_{x+5,k+2} \quad (8)$$

同理在其它计算机定时采样时刻也可以估计得角增量修正量 $\delta\theta_{i,x}(i = 0,1,2\cdots)$。至此,可以构造如下式,最终得到修正后的 g_x 陀螺角增量输出

$$\Delta\theta_{i+1,x} = \Delta\theta_{i+1,x} + \delta\theta_{i+1,x} - \delta\theta_{i,x} \quad (9)$$

显然,修正公式式(9) 保证了陀螺总角增量输出不变,而它改变了角增量在时间轴上的分布,所以在有角速度运动时能够减轻“锯齿”症状,使修正后的陀螺输出比修正前的更加平滑,趋于符合捷联惯组的实际角运动情况。

除了利用线性外推算法对整周期采样进行修正外,还可以利用常值或抛物线等外推算法进行修正,文中不再详细叙述它们的推导过程。

3 仿真

采用同文献[3]一样的仿真条件:激光陀螺机械抖动频率 x 轴 370 Hz、y 轴 359 Hz、z 轴 408 Hz,圆锥运动幅值 α = 1°,频率 f = 5 Hz、采样周期 h = 10 ms、选用等效旋转矢量二子样算法,仿真结果如图 3 所示,其中俯仰角误差和横滚角误差只显示了前 6 s,而航向角误差为 10 min,在图中虚线、点划线、实线分别代表的是采用理想角增量输出、整周期采样输出、整周期采样线性外推修正三种姿态更新算法的姿态和航向误差角。从图中可以看出,经过整周期采样修正后水平姿态误差角减小了很多,其幅值从修正前的最大约 4 降低至修正后的 0.1 以下,10 min时航向误差角也从修正前的约47 减小到了 - 6。由此可见,整周期采样修正对提高激光陀螺捷联惯导系统的角度测量精度,降低圆锥运动漂移误差是有效的。

另外,在圆锥运动条件下、采样周期 h = 10 ms、姿态算法选用等效旋转矢量二子样算法时,而其它条件变化时,再进行了六组仿真试验,仿真条件和结果如表 1 所示。

表 1 圆锥运动条件下各种算法的航向漂移误差

组别	陀螺抖动频率/ Hz			圆锥运动参数		10 min 航向漂移误差( )				
	X 轴	Y 轴	Z 轴	α( )	f/ Hz	理想采样	整周期采样	常值外推修正	线性外推修正	抛物线外推修正	线性 + 抛物线
1	370	359	408	10	1	0.1	18.4	-104.7	-0.3	0.3	0.1
2	370	359	408	1	3	0.2	0.6	-30.6	-0.4	0.9	0.3
3	370	340	408	1	5	3.2	24.2	-115.8	-4.5	10.0	2.7
4	380	359	408	1	5	3.2	17.4	-131.5	-5.2	11.1	3.0
5	370	340	400	1	3	0.2	2.1	-27.7	-0.4	0.9	0.2
6	370	340	400	1	5	3.2	24.3	-115.1	-4.5	9.9	2.7

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

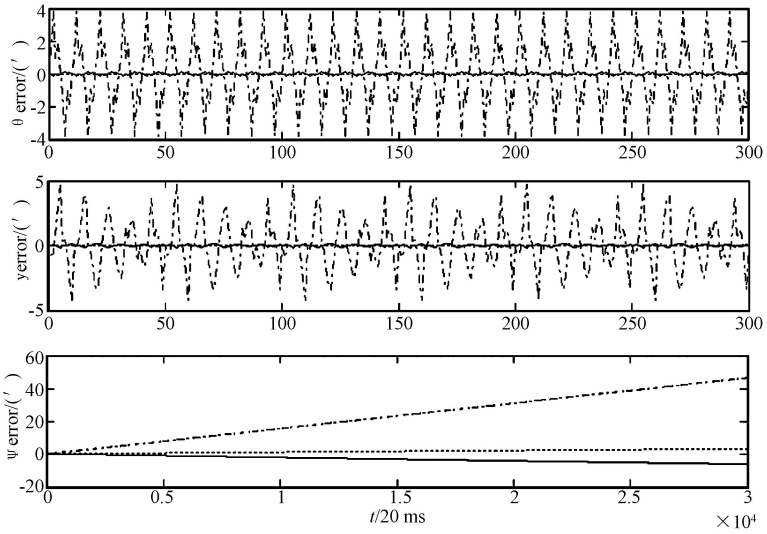


图 3　圆锥运动条件下各种算法的姿态和航向解算误差

从表 1 中可以看出:①当圆锥运动的锥角或频率较大时,整周期采样的航向漂移误差比理想采样的大得多;②激光陀螺抖动频率对整周期采样航向漂移误差有影响,如可通过对比组 3、组 4 和组 6 或者对比组 2 和组 5 中的整周期采样仿真结果;③整周期采样修正算法中,常值外推起不到改善作用,反而使航向漂移误差增大,线性外推修正性能较好,抛物线外推修正有改善作用,但效果不如线性外推的好;④从另外一个角度看,可以认为线性外推和抛物线外推修正效果是相当的,因为在每组仿真结果中这两者距理想采样漂移误差的距离大致相等,读者可以自行计算作比较,这表明了线性外推修正不够充分,而抛物线外推修正却有点"过了头",若取两者之平均构造线性 + 抛物线外推修正,仿真结果如表中最后一列所示,它和理想采样的漂移误差非常接近。

4　结论

在圆锥运动环境下,激光陀螺整周期采样是引起捷联惯导姿态算法漂移误差的重要原因。本文提出了对激光陀螺整周期采样进行改进的方法,详细推导了线性外推修正的算法公式。仿真结果表明,当姿态更新采用等效旋转矢量二子样算法时,利用线性 + 抛物线外推修正的效果非常显著,它能有效抑制整周期采样造成的姿态算法漂移误差,达到与理想采样的漂移误差非常接近的程度。因为,在等效旋转矢量二子样算法中,相当于采用线性模型近似惯组的角运动,文中使用线性 + 抛物线外推修正效果好,而在等效旋转矢量三子样算法中是采用抛物线模型近似角运动,所以,可以预见利用抛物线 + 三次曲线外推修正也能在三子样算法中取得好的补偿效果。同理,上述思路还可推广到其它子样数的整周期采样修正算法中去。

参考文献:

[1] Mark J G, Tazartes D A. Tuning of Coning Algorithms to Gyro Data Frequency Response Characteristics [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(4): 641-647.

[2] 潘献飞,吴文启,吴美平. 考虑机抖激光陀螺信号滤波特性的圆锥算法修正[J]. 中国惯性技术学报, 2007, 15(3): 259-264.

[3] 严恭敏,严卫生,徐德民,等. 抖动偏频激光陀螺整周期采样对捷联惯导姿态解算的影响[J]. 传感技术学报, 2007, 20(10): 2268-2271.



严恭敏(1977-),男,福建建瓯人,2006 年 9 月毕业于西北工业大学自动化学院,获导航、制导与控制专业博士学位,现在西北工业大学航海学院兵器科学与技术博士后流动站工作,主要从事陆用定位定向系统、水下航行器自主导航技术与组合导航系统理论研究,yangongmin @163. com



严卫生(1968-),男,江苏南通人,教授,博士生导师,主要研究领域为水下航行器的制导、控制与仿真、水下目标跟踪、变结构控制与智能控制,获国家级科技进步二等奖 10 项,获部级科技进步一等奖 2 项,获省部级科学技术进步二等奖 3 项,在国内外刊物上发表学术论文 60 余篇,被 EI、ISTP 等收录 20 余篇。

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Proceedings of the 27th Chinese Control Conference
July 16-18, 2008, Kunming,Yunnan, China

逆向导航算法及其在捷联罗经动基座初始对准中的应用*

严恭敏[1]，严卫生[1,2]，徐德民[1,2]

1. 西北工业大学航海学院, 西安 710072
E-mail: yangongmin@163.com
2. 水下信息处理与控制国家级重点实验室, 西安 710072
E-mail: yanws@nwpu.edu.cn

摘　要: 根据捷联惯导系统的导航更新算法，详细推导了逆向导航算法。提出了捷联罗经动基座初始对准方案，它包括三个阶段：方位角未知情况下水平对准、粗略方位自对准和罗经方位对准。在导航计算机存储容量足够大并且计算能力足够强的条件下，通过逆向导航算法将动基座初始对准与位置导航有机结合起来，先进行捷联罗经动基座初始对准和传感器采样数据存储，再利用逆向航位推算算法和正向航位推算算法，同时实现了初始对准和位置导航。最后，利用车载试验验证了所提方法的有效性，在运动条件下经过10分钟，方位对准达到0.112º(1σ)、位置导航精度约为0.1%×行驶路程。

关键词: 捷联惯导系统，逆向导航，动基座初始对准，罗经，航位推算

On Reverse Navigation Algorithm and its Application to SINS Gyro-compass In-movement Alignment

Yan Gongmin[1], Yan Weisheng[1,2], Xu Demin[1,2]

1. College of Marine, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, P.R.China
E-mail: yangongmin@163.com
2. National Key Laboratory for Underwater Information Process & Control, Xi'an 710072, P.R.China
E-mail: yanws@nwpu.edu.cn

Abstract: Reverse navigation algorithms are deduced in detailed based on the classical strapdown inertial navigation system (SINS) updating algorithms. The scheme of SINS gyro-compass in-movement alignment is proposed and is divided into three steps, including level alignment with header uncertainty, coarse header alignment and gyro-compass alignment for header. On the assumption of navigation computer having large memory and powerful computing ability, the connection between in-movement alignment and vehicle position determining is established by reverse navigation algorithm. After the process of SINS gyro-compass in-movement alignment and saving sensor's sample data to computer memory, reverse and normal dead reckoning algorithms are executed in succession to accomplish vehicle position updating. Finally, some vehicular tests prove that the proposed alignment algorithm in this paper is effective. In move base, the header alignment accuracy reaches 0.112º(1σ) and the position determining accuracy is about 0.1% by distance.

Key Words: Strapdown inertial navigation system, Reverse navigation, In-movement alignment, Gyro-compass, Dead reckoning

1 引言(Introduction)

可以将捷联惯导系统中陀螺和加速度计的采样数据当作一组时间序列看待，通常意义下的导航解算是对该序列按时间先后顺序进行实时处理，而不必进行数据存储，就能获得实时导航结果。如果导航计算机存储容量足够大并且计算能力足够强的话，把采样数据存储下来，既然可以按时间顺序正向处理，很容易联想到，也可以对它作逆向分析和处理。在有些情况下无实时性要求时，对存储的采样数据作正向和逆向的反复分析，有可能提高分析精度，或者在某项任务中能够减小实际用于分析的数据长度。

初始对准是惯导系统进入导航的前提，它的两个重要指标是精确性和快速性，但是在自对准中这两者之间往往是相互矛盾的。鉴于常规数据处理算法的局限性，一般将初始对准过程分为多个不同的阶段，例如，应用经典控制理论的罗经初始对准方法中的水平调平阶段和罗经方位对准阶段，或者应用现代控制最优估计的捷联惯导粗对准阶段和卡尔曼滤波精对准阶段，并且后一阶段（高级阶段）以前一阶段（低级阶段）的分析结果为基础[1,2]。对准阶段多必然导致初始对准时间变长，可是，对准精度往往只与高级阶段的数据处理结果精度有关，因此可以借助于数据存储的办法，在初始对准的不同阶段均利用相同的数据，有利于缩短初始对准时间。本文提出的逆向导航算法是实现前一阶段解算结果与后一阶段初值设置之间衔接的重要算法。

动基座初始对准在军事中具有重要的应用价值，有利于增强武器系统的机动性能，提高生存能力。动基座初始对准可大致划分为两类：主子惯导之间的传递对准和使用其它辅助信息的惯导自对准，文中主要研究后者。考虑到战时GPS的不可完全依赖

*此项工作得到：
1.中国博士后科学基金资助, 项目批准号: 20070420215;
2.水下信息处理与控制国家级重点实验室基金资助, 项目批准号: 9140C230206070C2306。

Authorized licensed use limited to: NORTHWESTERN POLYTECHNIC UNIVERSITY. Downloaded on July 04,2010 at 13:42:56 UTC from IEEE Xplore. Restrictions apply.

性，许多研究者提出了路标点和里程计辅助等动基座初始对准方法[3-5]。但是路标点辅助初始对准对路标点依赖性强，在一定程度上降低了导航系统的机动性；里程计辅助对准存在这种问题：姿态矩阵对准实现了而实时位置却“丢失”了，文献[4,5]也没有提出对准过程中位置导航问题的解决办法。就作者所知，在目前公开的文献报道中还未见一种既能实现动基座初始对准又能同时求得对准后精确运载体位置的算法，本文将动基座初始对准与位置导航划分为两个不同算法阶段，借助于逆向导航算法将它们有机结合起来，从而同时达到初始对准和位置导航的目的。

2 逆向导航算法(Reverse Navigation Algorithms)

文中记地心惯性坐标系为 i 系；记地球坐标系为 e 系；选取“东-北-天(E-N-U)”地理坐标系为导航坐标系，记为 n 系，“右-前-上”坐标系为捷联惯导坐标系（或运载体坐标系），记为 b 系。

2.1 逆向捷联惯导算法(Reverse SINS Algorithm)

捷联惯导系统的姿态、速度和位置导航算法可用如下一组微分方程表示

$$\dot{\boldsymbol{C}}_b^n = \boldsymbol{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{nb}^b \tag{1a}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n = \boldsymbol{C}_b^n \boldsymbol{f}_{sf}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n)\times \boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{g}^n \tag{1b}$$

$$\dot{L} = \frac{v_N^n}{R_M + h},\quad \dot{\lambda} = \frac{v_E^n \sec L}{R_N + h},\quad \dot{h} = v_U^n \tag{1c}$$

其中

$\boldsymbol{\Omega}_{nb}^b = (\boldsymbol{\omega}_{nb}^b\times)$，$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\boldsymbol{C}_b^n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n)$，

$\boldsymbol{g}^n = [0 \quad 0 \quad -g]^{\mathrm{T}}$，

$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = [0 \quad \omega_{ie}\cos L \quad \omega_{ie}\sin L]^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \left[-\frac{v_N^n}{R_M + h} \quad \frac{v_E^n}{R_N + h} \quad \frac{v_E^n \tan L}{R_N + h}\right]^{\mathrm{T}};$$

$\boldsymbol{C}_b^n$、$\boldsymbol{v}^n = \left[v_E^n \quad v_N^n \quad v_U^n\right]^{\mathrm{T}}$、$L$、$\lambda$ 和 h 分别表示惯导姿态矩阵、速度、纬度、经度和高度；$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 和 $\boldsymbol{f}_{sf}^b$ 分别表示陀螺角速度测量和加速度计比力测量；ω_{ie} 和 g 分别为地球自转角速率和重力加速度大小；R_M 和 R_N 分别为当地地球的子午圈和卯酉圈半径；$(\bullet\times)$ 表示由向量 $\bullet$ 构成的反对称矩阵。假设捷联惯导系统中陀螺和加速度计采样周期均为 T_s，将微分方程（1）式离散化为适合于计算机解算的递推算法（文中称之为正向算法），得

$$\boldsymbol{C}_{bk}^n = \boldsymbol{C}_{bk-1}^n(\boldsymbol{I} + T_s\boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b) \tag{2a}$$

$$\mathbf{v}_k^n = \mathbf{v}_{k-1}^n + T_s[\mathbf{C}_{bk-1}^n\mathbf{f}_{sfk}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{iek-1}^n + \boldsymbol{\omega}_{enk-1}^n)\times\mathbf{v}_{k-1}^n + \mathbf{g}^n] \tag{2b}$$

$$L_k = L_{k-1} + \frac{T_s v_{Nk-1}^n}{R_M + h_{k-1}},$$

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \frac{T_s v_{Ek-1}^n \sec L_{k-1}}{R_N + h_{k-1}},$$

$$h_k = h_{k-1} + T_s v_{Uk-1}^n \tag{2c}$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b = (\boldsymbol{\omega}_{nbk}^b\times)$，

$\boldsymbol{\omega}_{nbk}^b = \boldsymbol{\omega}_{ibk}^b - (\boldsymbol{C}_{bk-1}^n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega}_{iek-1}^n + \boldsymbol{\omega}_{enk-1}^n)$，

$\boldsymbol{\omega}_{iek}^n = [0 \quad \omega_{ie}\cos L_k \quad \omega_{ie}\sin L_k]^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{\omega}_{enk}^n = \left[-\frac{v_{Nk}^n}{R_M + h_k} \quad \frac{v_{Ek}^n}{R_N + h_k} \quad \frac{v_{Ek}^n \tan L_k}{R_N + h_k}\right]^{\mathrm{T}},$$

$(k = 1,2,3...)$。假设从离散化的 t_0 时刻至 t_m 时刻，惯导系统从A点导航至B点，则为了使系统从B点逆向导航至A点，由（2）式移项并稍作变化，整理得逆向捷联惯导算法为

$$\mathbf{C}_{bk-1}^n = \mathbf{C}_{bk}^n(\mathbf{I} + T_s\boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b)^{-1}$$

$$\approx \mathbf{C}_{bk}^n(\mathbf{I} - T_s\boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b) \approx \mathbf{C}_{bk}^n(\mathbf{I} + T_s\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{nbk-1}^b) \tag{3a}$$

$$\boldsymbol{v}_{k-1}^n = \boldsymbol{v}_k^n - T_s[\boldsymbol{C}_{bk-1}^n\boldsymbol{f}_{sfk}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{iek-1}^n + \boldsymbol{\omega}_{enk-1}^n)\times\boldsymbol{v}_{k-1}^n + \boldsymbol{g}^n]$$

$$\approx \mathbf{v}_k^n - T_s[\mathbf{C}_{bk}^n\mathbf{f}_{sfk-1}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{iek}^n + \boldsymbol{\omega}_{enk}^n)\times\mathbf{v}_k^n + \mathbf{g}^n] \tag{3b}$$

$$L_{k-1} = L_k - \frac{T_s v_{Nk-1}^n}{R_M + h_{k-1}} \approx L_k - \frac{T_s v_{Nk}^n}{R_M + h_k},$$

$$\lambda_{k-1} = \lambda_k - \frac{T_s v_{Ek-1}^n \sec L_{k-1}}{R_N + h_{k-1}} \approx \lambda_k - \frac{T_s v_{Ek}^n \sec L_k}{R_N + h_k},$$

$$h_{k-1} = h_k - T_s v_{Uk-1}^n \approx h_k - T_s v_{Uk}^n \tag{3c}$$

其中 $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{nbk-1}^b = (\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nbk-1}^b\times)$，

$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nbk-1}^b = -[\boldsymbol{\omega}_{ibk-1}^b - (\boldsymbol{C}_{bk}^n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega}_{iek}^n + \boldsymbol{\omega}_{enk}^n)]$。若记

$\hat{\boldsymbol{C}}_{bm-j}^n = \boldsymbol{C}_{bj}^n$，$\hat{\boldsymbol{v}}_{m-j}^n = -\boldsymbol{v}_j^n$，$\hat{L}_{m-j} = L_j$，$\hat{\lambda}_{m-j} = \lambda_j$，

$\hat{h}_{m-j} = h_j$，$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ibm-j}^b = -\boldsymbol{\omega}_{ibj}^b$，$\hat{\boldsymbol{f}}_{sfm-j}^b = \boldsymbol{f}_{sfj}^b$，

$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{iem-j}^n = -\boldsymbol{\omega}_{iej}^n$，$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{enm-j}^n = -\boldsymbol{\omega}_{enj}^n$，$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbm-j}^b = \tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{nbj}^b$，

$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbm-j}^b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nbj}^b, \hat{\omega}_{ie} = -\omega_{ie}$，$(j = 0,1,2,\cdots,m)$，并且令 $p = m - k + 1$，则通过记号和下标转换，（3）式按递推关系也可写成

$$\hat{\boldsymbol{C}}_{bp}^n = \hat{\boldsymbol{C}}_{bp-1}^n(\boldsymbol{I} + T_s\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbp}^b) \tag{4a}$$

Authorized licensed use limited to: NORTHWESTERN POLYTECHNIC UNIVERSITY. Downloaded on July 04,2010 at 13:42:56 UTC from IEEE Xplore. Restrictions apply.

$$\hat{\mathbf{v}}_p^n = \hat{\mathbf{v}}_{p-1}^n + T_s[\hat{\mathbf{C}}_{bp-1}^n \hat{\mathbf{f}}_{sfp}^b - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{iep-1}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{enp-1}^n) \times \hat{\mathbf{v}}_{p-1}^n + \mathbf{g}^n] \quad (4b)$$

$$\hat{L}_p = \hat{L}_{p-1} + \frac{T_s \hat{v}_{Np-1}^n}{R_M + \hat{h}_{p-1}},$$

$$\hat{\lambda}_p = \hat{\lambda}_{p-1} + \frac{T_s \hat{v}_{Ep-1}^n \sec \hat{L}_{p-1}}{R_N + \hat{h}_{p-1}},$$

$$\hat{h}_p = \hat{h}_{p-1} + T_s \hat{v}_{Up-1}^n \quad (4c)$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{iep}^n = -\boldsymbol{\omega}_{iem-p}^n = -[0 \quad \omega_{ie}\cos L_{m-p} \quad \omega_{ie}\sin L_{m-p}]^{\mathrm{T}}$$

$$= [0 \quad \hat{\omega}_{ie}\cos \hat{L}_p \quad \hat{\omega}_{ie}\sin \hat{L}_p]^{\mathrm{T}},\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_{enp}^n = -\boldsymbol{\omega}_{enm-p}^n$$

$$= -\left[-\frac{v_{Nm-p}^n}{R_M + h_{m-p}} \quad \frac{v_{Em-p}^n}{R_N + h_{m-p}} \quad \frac{v_{Em-p}^n \tan L_{m-p}}{R_N + h_{m-p}}\right]^{\mathrm{T}}$$

$$= \left[-\frac{\hat{v}_{Np}^n}{R_M + \hat{h}_p} \quad \frac{\hat{v}_{Ep}^n}{R_N + \hat{h}_p} \quad \frac{\hat{v}_{Ep}^n \tan \hat{L}_p}{R_N + \hat{h}_p}\right]^{\mathrm{T}},$$

$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbp}^b = (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbp}^n \times)$，$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbp}^b = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{nbm-p}^b$

$$= -[\boldsymbol{\omega}_{ibm-p}^b - (\boldsymbol{C}_{bm-p+1}^n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega}_{iem-p+1}^n + \boldsymbol{\omega}_{enm-p+1}^n)]$$

$$= \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ibp}^b - (\hat{\boldsymbol{C}}_{bp-1}^n)^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{iep-1}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{enp-1}^n)。$$

通过对比（2）式和（4）式，发现它们在算法表示形式上是完全一致的。从上述分析过程中可以看出，只要将正向算法中的陀螺采样和地球自转角速率符号取反，并设置逆向导航算法的初值为 $\hat{\boldsymbol{C}}_{b0}^n = \boldsymbol{C}_{bm}^n$、$\hat{\boldsymbol{v}}_0^n = -\boldsymbol{v}_m^n$、$\hat{L}_0 = L_m$、$\hat{\lambda}_0 = \lambda_m$、$\hat{h}_0 = h_m$，对采样数据作逆向处理，即可实现从 t_m 时刻（B点）至 t_0 时刻（A点）的逆向导航解算。不难发现，在正向与逆向导航过程中，两过程在相同时刻的姿态矩阵相等，位置坐标也相等，而速度之间大小相等但符号相反。值得指出的是，实际应用中捷联惯导解算可采用四元数、等效旋转矢量和圆锥运动补偿等算法来减小算法性误差，但同样可得到与本文类似的逆向算法和结论。从逆向捷联惯导算法中还容易求得以下两种逆向算法。

2.2 逆向姿态跟踪算法(Reverse Attitude Tracking Algorithm)

如果捷联惯导系统在小范围内运动，即其位置变化不大，并且如果只要求输出姿态导航信息，则在捷联惯导系统初始对准后，可忽略速度和位置变化的影响，只进行姿态更新解算（不妨称为姿态跟踪），姿态跟踪利用下式算法即可实现，

$$\boldsymbol{C}_{bk}^n = \boldsymbol{C}_{bk-1}^n(\boldsymbol{I} + T_s \boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b) \quad (5)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b = (\boldsymbol{\omega}_{nbk}^b \times)$，$\boldsymbol{\omega}_{nbk}^b = \boldsymbol{\omega}_{ibk}^b - (\boldsymbol{C}_{bk-1}^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_{ie0}^n$，$\boldsymbol{\omega}_{ie0}^n = [0 \quad \omega_{ie}\cos L_0 \quad \omega_{ie}\sin L_0]^{\mathrm{T}}$，$L_0$ 为捷联惯导系统所处的大致纬度。由此，容易求得逆向姿态跟踪算法为

$$\hat{\boldsymbol{C}}_{bp}^n = \hat{\boldsymbol{C}}_{bp-1}^n(\boldsymbol{I} + T_s \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbp}^b) \quad (6)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbp}^b = (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbp}^n \times)$，$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbp}^b = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ibp}^b - (\hat{\boldsymbol{C}}_{bp-1}^n)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie0}^n$，$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie0}^n = [0 \quad \hat{\omega}_{ie}\cos L_0 \quad \hat{\omega}_{ie}\sin L_0]^{\mathrm{T}}$。

2.3 逆向航位推算算法(Reverse Dead reckoning Algorithm)

由里程计（或测速仪）与捷联惯导系统结合可构成航位推算系统，假设里程计或测速仪采样周期也为 T_s，在 t_k 时刻采样输出的路程增量或速度在 b 系上投影分别为 $\boldsymbol{\Delta s}_k^b$ 和 $\boldsymbol{v}_{sk}^b$，不妨记 $\boldsymbol{\Delta s}_k^b / T_s = \boldsymbol{v}_{sk}^b$，则以 $\boldsymbol{v}_{sk}^b$ 推导的航位推算算法可写成

$$\boldsymbol{C}_{bk}^n = \boldsymbol{C}_{bk-1}^n(\boldsymbol{I} + T_s \boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b) \quad (7a)$$

$$\boldsymbol{v}_{sk}^n = \boldsymbol{C}_{bk-1}^n \boldsymbol{v}_{sk}^b \quad (7b)$$

$$L_k = L_{k-1} + \frac{T_s v_{sNk}^n}{R_M + h_{k-1}},$$

$$\lambda_k = \lambda_{k-1} + \frac{T_s v_{sEk}^n \sec L_{k-1}}{R_N + h_{k-1}},$$

$$h_k = h_{k-1} + T_s v_{sUk}^n \quad (7c)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}_{nbk}^b = (\boldsymbol{\omega}_{nbk}^b \times)$，

$\boldsymbol{\omega}_{nbk}^b = \boldsymbol{\omega}_{ibk}^b - (\boldsymbol{C}_{bk-1}^n)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\omega}_{iek-1}^n + \boldsymbol{\omega}_{enk-1}^n)$，

$\boldsymbol{\omega}_{iek}^n = [0 \quad \omega_{ie}\cos L_{k-1} \quad \omega_{ie}\sin L_{k-1}]^{\mathrm{T}}$，

$$\boldsymbol{\omega}_{enk-1}^n = \left[-\frac{v_{sNk}^n}{R_M + h_{k-1}} \quad \frac{v_{sEk}^n}{R_N + h_{k-1}} \quad \frac{v_{sEk}^n \tan L_{k-1}}{R_N + h_{k-1}}\right]^{\mathrm{T}}。$$

这里直接给出相应的逆向航位推算算法为

$$\hat{\boldsymbol{C}}_{bp}^n = \hat{\boldsymbol{C}}_{bp-1}^n(\boldsymbol{I} + T_s \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbp}^b) \quad (8a)$$

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{sp}^n = \hat{\boldsymbol{C}}_{bp-1}^n \hat{\boldsymbol{v}}_{sp}^b \quad (8b)$$

$$\hat{L}_p = \hat{L}_{p-1} + \frac{T_s \hat{v}_{sNp}^n}{R_M + \hat{h}_{p-1}},$$

$$\hat{\lambda}_p = \hat{\lambda}_{p-1} + \frac{T_s \hat{v}_{sEp}^n \sec \hat{L}_{p-1}}{R_N + \hat{h}_{p-1}},$$

$$\hat{h}_p = \hat{h}_{p-1} + T_s \hat{v}_{Up}^n \quad (8c)$$

其中 $\hat{\boldsymbol{v}}_{sm-j}^b = -\boldsymbol{v}_{sj}^b$，$\hat{\boldsymbol{\Omega}}_{nbp}^b = (\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbp}^n \times)$，

$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nbp}^b = \hat{\boldsymbol{\omega}}_{ibp}^b - (\hat{\boldsymbol{C}}_{bp-1}^n)^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{iep-1}^n + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{en-1}^n)$，

$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{iep-1}^n = [0 \quad \hat{\omega}_{ie}\cos \hat{L}_{p-1} \quad \hat{\omega}_{ie}\sin \hat{L}_{p-1}]^{\mathrm{T}}$，

Authorized licensed use limited to: NORTHWESTERN POLYTECHNIC UNIVERSITY. Downloaded on July 04,2010 at 13:42:56 UTC from IEEE Xplore. Restrictions apply.

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{enp-1}^{n}=\left[-\frac{\hat{v}_{sNp}^{n}}{R_M+\hat{h}_{p-1}}\quad\frac{\hat{v}_{sEp}^{n}}{R_N+\hat{h}_{p-1}}\quad\frac{\hat{v}_{sEp}^{n}\tan\hat{L}_{p-1}}{R_N+\hat{h}_{p-1}}\right]^{\mathrm{T}}。$$

可见，在逆向航位推算算法中将里程计（或测速仪）采样输出符号也进行了取反处理。

3 逆向导航算法在捷联罗经动基座初始对准中的应用(Application of Reverse Navigation Algorithm in SINS Gyro-compass Inmovement Alignment)

在动基座初始对准过程中，特别是在对准前期，由于捷联惯导系统方位误差角很大甚至方位角完全未知，无法进行正确的位置导航，因此，即使在对准起始时刻准确知道运载体的初始位置，在动基座对准过程中也将不断产生位置误差，运载体行驶距初始位置越远位置误差也就越大。本节将以捷联罗经动基座初始对准为例介绍逆向导航算法的应用。

首先说明的是，罗经初始对准方法对小纬度误差不太敏感。纬度误差造成的罗经方位对准误差还随惯导系统所处纬度不同而不同，图1显示的是在1º纬度误差下所处纬度与罗经方位对准误差之间的关系[6]。例如，在纬度30º处，假设罗经初始对准过程中纬度误差为0.1º，通过图1中曲线查得横坐标30º时对应的纵坐标约为0.03º，因而计算得纬度误差0.1º引起的方位对准误差为0.1×0.03º×sec(30º)=0.0035º，如此小的误差完全可以忽略不计。因此，除高纬度地区外，对于舰船和车辆等低速运动的运载体来说，捷联罗经初始对准过程中可以认为纬度变化不大，取为初始时刻的纬度值，均能够获得较好的初始对准效果。

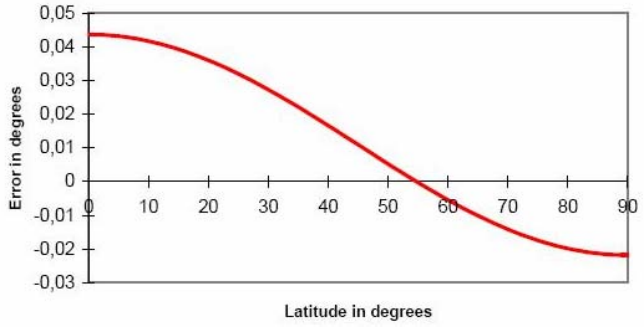


图 1 不同纬度处1º纬度误差引起的方位对准误差

3.1 捷联罗经动基座初始对准原理(The Principle of SINS Gyro-compass In-movement Alignment)

在捷联罗经初始对准中包含三个回路，分别为水平对准东向通道、北向通道和罗经方位通道。这里主要介绍东向通道，其它两个通道的原理类似。参见图2，在捷联惯导系统中以数学平台模拟平台惯导系统中的实体平台，如图中“数学平台”部分所示，$\widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n$ 为捷联姿态矩阵，起数学平台作用，$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{f}}_{sf}^b$ 分别是陀螺和加速度计的测量值；$\boldsymbol{v}_R=[v_{RE}\quad v_{RN}\quad v_{RU}]^{\mathrm{T}}$ 是外界辅助参考速度，一般情况下如多普勒测速仪等设备直接输出的是在 b 系下的速度 $\boldsymbol{v}_R^b$，须将它转化为 n 系下的参考速度 $\boldsymbol{v}_R=\widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n\boldsymbol{v}_R^b$；$\boldsymbol{\omega}_c=[\omega_{cx}\quad\omega_{cy}\quad\omega_{cz}]^{\mathrm{T}}$ 是施加给数学平台的控制角速率；$\widetilde{\boldsymbol{f}}_{sf}^b$ 经 $\widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n$ 变换后成为数学平台视加速度输出 $\widetilde{\boldsymbol{f}}_{sf}^n=[\widetilde{f}_{sfx}^n\quad\widetilde{f}_{sfy}^n\quad\widetilde{f}_{sfz}^n]^{\mathrm{T}}$。图2中“控制规律（东向通道）”部分采用三阶调平的水平对准方案，R 为平均地球半径，K_{x1}、K_{x2} 和 K_{x3} 为控制律的调节参数，可根据对准的精确性和快速性要求设计，在很多文献中均有详细介绍[1,2]，此处不再赘述。

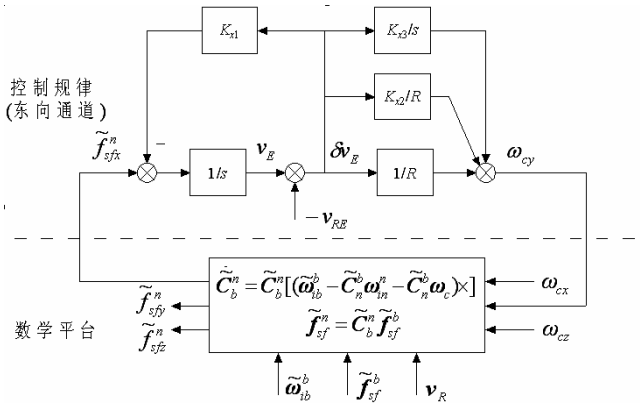


图 2 捷联罗经动基座初始对准东向通道

3.2 捷联罗经动基座初始对准方法(The Scheme of In-movement Alignment)

平台罗经初始对准一般分为两步，先是水平调平，然后是方位对准，同样的，捷联罗经也需要这两个过程。但是平台罗经初始对准之前一般通过外界装订粗略方位角，本文介绍勿需方位角装订的捷联罗经对准方法，将它划分为以下三个步骤。

（1）方位角未知情况下的水平对准

在方位角完全未知情况下，不妨将它的初始设置值假设为零，又因为舰船等运载体在初始对准过程中水平姿态角通常不大（如满足小于30º的要求），所以可以假设两个水平姿态角初始设置值也为零。先初始化捷联姿态矩阵，由东向和北向通道一起共同构成水平对准方案。由于方位角完全未知，方位误差角可能比较大，此时可将地球自转角速率等效为陀螺漂移，作为水平对准的干扰量，通过分析三阶水平对准回路易知，地球自转干扰不影响水平对准的精度，稳态精度仍然取决于加速度计零偏误差。另外，外界参考速度噪声往往比较大，通过水平对准后还可以获得比较平滑和准确的运载体速度。设水平对准结束时求得姿态矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_{h1})$ 和速度 $\boldsymbol{v}(t_{h1})$。

（2）粗略方位自对准

经过水平对准后，能够满足水平姿态误差比较小的要求，但是还应假设方位误差为大误差角。粗略方

Authorized licensed use limited to: NORTHWESTERN POLYTECHNIC UNIVERSITY. Downloaded on July 04,2010 at 13:42:56 UTC from IEEE Xplore. Restrictions apply.

位自对准中，将捷联惯导中陀螺和加速度计的采样数据复制成两份拷贝，并应用两种不同的算法进行解算。一种算法是，继续阶段（1）的水平对准，经过一段时间（如1～2分钟）至$t_{\phi z}$时刻，假设控制率中的运载体速度变为$\boldsymbol{v}(t_{\phi z})$；另一种算法是，在大方位误差角条件下进行捷联惯导速度解算，即

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{C}}}_b^n = \widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n[(\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b - \widetilde{\boldsymbol{C}}_n^b\boldsymbol{\omega}_{ie}^n)\times] \quad (9a)$$

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n\widetilde{\boldsymbol{f}}_{sf}^b \quad (9b)$$

其中选择姿态矩阵初始值为$\widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_{h1})$和速度初值为$\boldsymbol{v}(t_{h1})$，假设在$t_{\phi z}$时刻，姿态矩阵变为$\widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_{\phi z})$、惯导速度解算为$\boldsymbol{v}'(t_{\phi z})$。在上述两种算法中，可认为$\boldsymbol{v}(t_{\phi z})$比较准确，而$\boldsymbol{v}'(t_{\phi z})$的误差可能较大，其误差与方位误差角有关，下面再具体分析。

对大方位误差角条件下的捷联惯导非线性误差方程[7]作适当简化，即假设运载体加速度不大并且忽略水平姿态误差角等次要因素的影响后，得

$$\dot{\phi}_x = -\sin(\phi_z)\omega_{ie}\cos L \quad (10a)$$

$$\dot{\phi}_y = (1-\cos\phi_z)\omega_{ie}\cos L \quad (10b)$$

$$\delta\dot{v}_E = -g(\phi_y\cos\phi_z + \phi_x\sin\phi_z) \quad (10c)$$

$$\delta\dot{v}_N = g(\phi_x\cos\phi_z - \phi_y\sin\phi_z) \quad (10d)$$

将(10c)式和(10d)式再微分一次并将(10a)式和(10b)式代入，建立速度误差与大方位误差角ϕ_z之间的关系

$$\delta\ddot{v}_E = g\omega_{ie}\cos L(\cos\phi_z - 1) \quad (11a)$$

$$\delta\ddot{v}_N = -g\omega_{ie}\cos L\sin\phi_z \quad (11b)$$

记$\delta v_E(t_{\phi z}) = v_E'(t_{\phi z}) - v_E(t_{\phi z})$和$\delta v_N(t_{\phi z}) = v_N'(t_{\phi z}) - v_N(t_{\phi z})$，则可得

$$\cos\phi_z = 2\delta v_E(t_{\phi z})/(t_{\phi z}^2 g\omega_{ie}\cos L) + 1 \quad (12a)$$

$$\sin\phi_z = -2\delta v_N(t_{\phi z})/(t_{\phi z}^2 g\omega_{ie}\cos L) \quad (12b)$$

至此，构造修正矩阵$\boldsymbol{C}_{\phi z} = \begin{bmatrix} \cos\phi_z & -\sin\phi_z & 0 \\ \sin\phi_z & \cos\phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，对$\widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_{\phi z})$作一次修正，便实现了捷联罗经的粗略方位自对准，即

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n{}'(t_{\phi z}) = \widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_{\phi z})\boldsymbol{C}_{\phi z} \quad (13)$$

（3）罗经方位对准

具备水平和粗略方位对准后，便可利用罗经方位通道进行罗经方位对准，它与平台罗经方位对准方法类似，这里不再赘述。

3.3 动基座初始对准中的位置导航(Position Determining in the Alignment Course)

前面说过，在动基座初始对准过程中，由于方位角未知，无法进行正确的位置导航，虽然动基座对准过程中运载体运动引起的位置误差对捷联罗经初始对准影响不大，但是，如果要进行运载体定位的话，该误差往往不能忽略，例如运载体以5m/s的速度行驶，则10min的对准过程将可能造成3km的位置误差，因此有必要在初始对准之后再进行一次精确的位置导航解算，过程叙述如下：

（1）进行捷联罗经动基座初始对准，对准结束时获得姿态矩阵$\widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_e)$，并将从对准起始时刻$t_s$至结束时刻$t_e$的陀螺、加速度计和辅助参考速度采样数据存储下来；

（2）以$\widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_e)$为姿态矩阵初值，并不妨以$t_s$时刻的运载体位置为位置初值，进行逆向航位推算，从$t_e$时刻逆向导航解算至$t_s$时刻，获得$t_s$时刻姿态矩阵$\widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_s)$；

（3）以$\widetilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_s)$为姿态矩阵初值，并以$t_s$时刻的运载体位置为位置初值，进行正向航位推算，从$t_s$时刻导航解算至$t_e$时刻，便可得到$t_e$时刻的运载体位置，最终达到位置导航的目的。

利用以上三个步骤，即能实现动基座姿态矩阵初始对准，又能求得对准过程中的运载体位置。但是需要指出的是，该方法不能实时计算运载体在对准过程中的位置，而只能获得事后处理的位置。此外，还必须根据导航计算机数据处理能力的强弱，在t_e时刻之后继续实施一小段时间的采样数据存储，以备在导航计算机处理完过程（3）之后进行导航使用，也就是说，必须在t_e时刻后再经历一小段时间才能提供实时的导航信息。

4 车载初始对准试验(Vehicular In-movement Alignment Tests)

2007年7月16日—18日在西安市航天时代电子仪器公司第16研究所附近进行了动基座初始对准试验，试验设备主要包括：激光捷联惯组、里程计、高精度GPS接收机、载车、导航计算机及相关电源等，其中激光陀螺漂移误差约为0.007º/h，加速度计零偏误差约为5×10^{-5}g，里程计输出脉冲当量为0.08194m/脉冲。里程计的测量为动基座初始对准提供参考速度输入，利用GPS进行对准起始位置装订和作为对准结束时导航位置比较的参考，但在初始对准过程中间GPS不起作用。若要在载车运动中实时考察动基座初始对准的精度存在比较大的困难，因此，文中设计了如下的动基座初始对准试验和精度评估方案：

Authorized licensed use limited to: NORTHWESTERN POLYTECHNIC UNIVERSITY. Downloaded on July 04,2010 at 13:42:56 UTC from IEEE Xplore. Restrictions apply.

（1）捷联惯组预热准备好后，运行初始对准程序，接收GPS位置作为起始位置，开始存储陀螺、加速度计和里程计采样数据，并进入水平对准。

（2）启动载车，水平对准大约1min，接着进行1min粗略方位自对准，以此时的粗略姿态矩阵和初始位置为初值，并利用前面2min的存储数据作逆向航位推算至起始点，求得起始点粗略姿态矩阵；

（3）以起始点粗略姿态矩阵为初值进行罗经方位对准，整个对准过程中可不停车，载车行驶速度约为5～8m/s，总里程大约4km；

（4）行驶至10min时停车，对准程序完成罗经方位对准解算后，以10min时的姿态矩阵和初始位置为初值，并利用前面10min的存储数据再作逆向航位推算至起始点，求得起始点精确姿态矩阵；

（5）以起始点精确姿态矩阵和初始位置为初值，并利用存储数据作正向航位推算至当前点，记录下捷联惯导的方位角Ψ、航位推算的经度λ和纬度L，把它们当作捷联罗经初始对准的方位和位置结果，结束初始对准程序；

（6）保持载车不动，记录此时GPS输出的经度λ'和纬度L'，并利用常规对准方法进行一次5min静基座初始对准，记下对准方位角为Ψ'，将这些值作为捷联罗经初始对准的方位和位置比较参考基准。

总共进行了六组试验，结果如表1所示。在其它试验中已经测得该套惯导设备的静基座初始对准方位精度优于2′，因此可以认为表1中方位误差主要是由捷联罗经初始对准引起的，其均方差约0.112º（1σ）；此外，导航位置的经度和纬度误差也比较小，经度误差为1.67m，纬度误差为4.50m，相对于载车总行驶里程而言，相对位置误差约为0.1%。该试验表明，本文所提初始对准方法在完成捷联矩阵初始对准的同时，还具备了精确位置导航的能力。

表 1 初始对准试验结果

组别	方位对准及误差 / °			经度导航及误差			纬度导航及误差		
	Ψ	Ψ'	误差	λ/ °	λ' / °	误差/m	L / °	L' / °	误差/m
1	50.920	50.839	0.081	109.017576	109.017559	1.61	34.184918	34.184957	-4.30
2	263.816	263.727	0.089	108.984471	108.984491	-1.77	34.174686	34.174644	4.73
3	51.881	52.038	-0.157	109.017497	109.017532	-3.14	34.185006	34.184932	8.33
4	263.212	263.181	0.031	108.983486	108.983493	-0.62	34.174551	34.174536	1.69
5	50.888	51.016	-0.128	109.016814	109.016841	-2.47	34.184534	34.184473	6.85
6	265.135	265.052	0.083	108.982266	108.982284	-1.61	34.174467	34.174426	4.61
统计误差(1σ)			0.112			1.67			4.50

5 结论(Conclusion)

本文比较详细地推导了逆向导航算法。应用捷联罗经方法进行动基座初始对准，并借助于逆向导航算法，既能够完成初始对准又能够实现运载体运动的位置导航，为捷联惯导系统动基座初始对准提供了一个崭新的思路，特别在军事应用中具有重要的参考价值。此外，在罗经方位对准中，较大的初始方位误差角一般将导致罗经方位收敛过程中振荡次数较多，但是对准精度往往只取决于后期的振荡收敛精度，因此，在罗经方位对准的前期和后期还可以利用相同的采样数据序列，先进行降低初始方位误差处理，再进行具有精度决定性的方位对准，有利于进一步缩短初始对准时间。同样的道理，在应用最优估计方法的卡尔曼滤波算法中，滤波初值选择一般会影响滤波收敛速度，粗大的初始值会导致收敛变慢，所以在捷联惯导卡尔曼滤波精对准中也存在进一步缩短对准时间的余地。

参考文献(References)

[1] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[2] 万德钧, 房建成. 惯性导航初始对准[M]. 南京: 东南大学出版社, 1998.

[3] 严恭敏, 秦永元. 车载导航系统动态高精度初始对准技术[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(9): 1404-1407.

[4] MIAO L J, SHEN J, LIU W, et al. Initial Alignment Technique for SINS of Vehicles in the Moving State[J]. Journal of Beijing Institute of Technology. 2002, 11(3): 234-239.

[5] 练军想, 吴文启, 吴美平, 等. 车载SINS行进间初始对准方法[J]. 中国惯性技术学报, 2007, 15(2): 155-159.

[6] IXSea Ltd. OctansIII UG Part 2 Octans Surface UG MU-OCTIII-003-A.pdf [EB/DK], 2004,7.

[7] 王丹力, 张洪钺. 惯导系统初始对准的非线性滤波算法[J]. 中国惯性技术学报, 1999, 7(3): 17-21.

Authorized licensed use limited to: NORTHWESTERN POLYTECHNIC UNIVERSITY. Downloaded on July 04,2010 at 13:42:56 UTC from IEEE Xplore. Restrictions apply.

文章编号：1005-6734(2008)03-0253-12

简化 UKF 滤波在 SINS 大失准角初始对准中的应用

严恭敏[1]，严卫生[1,2]，徐德民[1,2]

（1. 西北工业大学 航海学院，西安 710072；2. 水下信息处理与控制国家级重点实验室，西安 710072）

摘要：基于欧拉平台误差角的概念提出了大失准角误差条件下的捷联惯导系统（SINS）非线性初始对准误差模型，该模型无法再用经典的加性噪声模型描述。为了降低滤波计算量，在系统模型噪声和量测噪声均为复杂加性噪声并且量测方程是线性方程时，推导了简化的 UKF（unscented Kalman filter）滤波方法，简化 UKF 滤波公式显示：除通过非线性状态方程使用 UT（unscented transformation）变换进行状态及其方差预测外，其它滤波步骤与标准 Kalman 滤波完全相同。最后，对静基座下 SINS 初始对准进行了仿真试验，结果表明大失准角条件下的 SINS 误差模型和简化 UKF 滤波估计方法是有效的。

关 键 词：UKF 滤波；捷联惯导系统；初始对准；大失准角；仿真

中图分类号：U666.1 **文献标志码**：A

Application of simplified UKF in SINS initial alignment for large misalignment angles

YAN Gong-min[1], YAN Wei-sheng[1,2], XU De-min[1,2]

(1. College of Marine, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. National Key Laboratory for Underwater Information Process & Control, Xi'an 710072, China)

Abstract: SINS nonlinear error model was deduced based on the concept of Euler platform error angles(EPEA) with large initial misalignment angles, and this nonlinear error model could no longer be presented by using the classical additive noise models. To reduce the calculation burden, a simplified UKF(unscented Kalman filter) filtering algorithm was derived under the situation that both process noise and measurement noise were complex additive noise with linear measurement equation. The simplified UKF algorithm is identical to that of classical Kalman filter except for the predicting of states and their covariance matrix by unscented transformation (UT) in nonlinear state model. In the end, SINS initial alignment simulation tests under large EPEA were executed, and the results verified the proposed SINS error model and the simplified UKF algorithm.

Key words: UKF; strapdown inertial navigation system; initial alignment; large misalignment angle; simulation test

误差传播模型和滤波算法是研究捷联惯导系统（SINS）初始对准中的两个重要问题。描述SINS算法的方程是一组非线性微分方程，其误差模型本质上也是非线性的。经典的基于Φ角法或ψ角法推导的线性微分方程误差模型是在小失准角条件下获得的，利用标准Kalman滤波最优估计方法能够有效解决小失准条件下的SINS初始对准问题[1]。随着对SINS技术要求的提高，小失准角误差模型和线性Kalman滤波的应用受到了很大的限制，近年来，大失准角SINS误差模型和非线性估计方法不断涌现。在误差模型研究方面大致可以分为两类：一类是研究大失准角下的非线性误差模型，以大方位失准角误差模型最具代表性[2-4]；另一类是通过近似或状态变换，推导线性化的大失准角误差模型。线性化是非常具有吸引力的，因为它可以直接采用经典Kalman估计进行处理，如基于加性四元数的SINS误差模型[5,6]，其中代表姿态的误差方程

收稿日期：2008-03-25；**修回日期**：2008-05-14

基金项目：中国博士后科学基金（20070420215）；水下信息处理与控制国家级重点实验室基金（9140C230206070C2306）

作者简介：严恭敏（1977—），男，博士后，从事惯性导航与组合导航系统理论研究。E-mail：yangongmin@163.com

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

是线性的，然而表示速度误差的误差方程仍旧是非线性的，能否将速度误差方程也线性化值得深入探讨。通常情况下模型线性化后都不可避免地增加了状态的维数，并且使得一些状态之间具有了约束性，这是它的一个缺点。在非线性滤波方面，扩展卡尔曼滤波（EKF）应用最为广泛。EKF滤波的基本原理是对非线性函数进行线性化近似，即忽略非线性函数Taylor展开式高阶项的影响，在使用EKF时必须知道非线性函数的具体展开式，由EKF还引伸出了高阶截断EKF、迭代EKF等改进算法。EKF滤波的出发点是近似非线性函数，但是一般近似非线性函数的概率密度分布比近似非线性函数更加容易。目前，基于近似概率密度分布的滤波估计方法比较流行，如粒子滤波（PF），它可以不必详细了解非线性函数的具体展开式，而直接通过粒子（样本点）求解非线性函数来演化概率密度分布。UKF（unscented Kalman filter）可以算是PF家族中的一种。UKF的独特之处在于采用确定性采样策略近似非线性分布，相对一般PF滤波来说UKF的粒子数比较少，具有计算量小的突出优点，更便于实用[7-10]。

本文使用欧拉平台误差角来表示从理论导航坐标系到计算导航坐标系之间的三个失准角，摒弃了经典小失准角误差模型中失准角之间与转动顺序无关的做法，认为欧拉平台误差角是讲究先后转动顺序的，它类似于 SINS 中三个欧拉姿态角的描述，在此基础上建立了大失准角误差条件下的 SINS 非线性误差模型。当系统模型噪声和量测噪声均为复杂加性噪声时，推导 UKF 滤波算法公式。一般文献中所指的加性噪声滤波模型描述如下：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \boldsymbol{w}_{k-1} \\ \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_k \end{cases} \tag{1}$$

暂且称之为简单加性噪声，而本文中所指的复杂加性噪声模型表示为：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{k-1})\boldsymbol{w}_{k-1} \\ \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{v}_k \end{cases} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{f}(\cdot)$、$\boldsymbol{g}(\cdot)$、$\boldsymbol{h}(\cdot)$、$\boldsymbol{j}(\cdot)$均可为非线性函数，$\boldsymbol{x}_k$、$\boldsymbol{z}_k$分别是状态和量测向量，$\boldsymbol{w}_k$、$\boldsymbol{v}_k$分别是状态和量测噪声向量，复杂加性噪声模型的特点是模型关于噪声是线性的。易知简单加性噪声是复杂加性噪声模型的特例，但后者使用范围更广。进一步地，当量测方程是线性方程时，推导了简化的 UKF 滤波方法，简化 UKF 滤波公式显示：除通过非线性状态方程使用 UT 变换进行状态及其方差预测外，其它滤波步骤与标准 Kalman 滤波完全相同，但是与常规 UKF 相比，简化 UKF 滤波有利于降低滤波计算量。最后，对静基座下 SINS 初始对准进行了仿真试验，结果表明大失准角条件下的 SINS 误差模型和 UKF 滤波估计方法是有效的。

1 SINS 非线性误差模型

记地心惯性坐标系为i系；记地球坐标系为e系；选取“东-北-天(E-N-U)”地理坐标系为导航坐标系，记为n系；“右-前-上”坐标系为捷联惯组坐标系，记为b系。n系先后依次经过三次欧拉角转动至b系，这三个欧拉角分别记为航向角$\psi\in(-\pi\ \ \pi]$、俯仰角$\theta\in[-\pi/2\ \ \pi/2]$和横滚角$\gamma\in(-\pi\ \ \pi]$；n系与b系之间的旋转变换关系可用姿态矩阵$\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$描述。

1.1 欧拉平台误差角微分方程

由于各种误差源的影响，实际上 SINS 模拟的数学平台与理想导航坐标系 n 系（即理想数学平台）之间存在转动误差，记实际数学平台为n'系，也可称之为计算平台坐标系。与 n 系至 b 系的转动过程类似，n 系先后依次经过三次转动可得n'系，假设这三次转动角分别为α_z、α_x和α_y，文中称它们为欧拉平台误差角，并且记矢量$\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_x\ \ \alpha_y\ \ \alpha_z]^{\mathrm{T}}$，则有坐标变换矩阵

$$\boldsymbol{C}_{\alpha_z}=\begin{bmatrix} c\alpha_z & s\alpha_z & 0 \\ -s\alpha_z & c\alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{\alpha_x}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_x & s\alpha_x \\ 0 & -s\alpha_x & c\alpha_x \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{C}_{\alpha_y}=\begin{bmatrix} c\alpha_y & 0 & -s\alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ s\alpha_y & 0 & c\alpha_y \end{bmatrix} \tag{3}$$

式（3）中使用了简写符号，$s\alpha_i$、$c\alpha_i$分别表示$\sin(\alpha_i)$和$\cos(\alpha_i)$（$i=x,y,z$），因此n系至n'系的变换矩阵为：

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}'}=\boldsymbol{C}_{\alpha_y}\boldsymbol{C}_{\alpha_x}\boldsymbol{C}_{\alpha_z}=\begin{bmatrix} c\alpha_y c\alpha_z - s\alpha_y s\alpha_x s\alpha_z & c\alpha_y s\alpha_z + s\alpha_y s\alpha_x c\alpha_z & -s\alpha_y c\alpha_x \\ -c\alpha_x s\alpha_z & c\alpha_x c\alpha_z & s\alpha_x \\ s\alpha_y c\alpha_z + c\alpha_y s\alpha_x s\alpha_z & s\alpha_y s\alpha_z - c\alpha_y s\alpha_x c\alpha_z & c\alpha_y c\alpha_x \end{bmatrix} \tag{4}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

若设 n′ 系相对于 n 系的角速度为 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nn'}}^{\mathrm{n'}}$，则可得 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nn'}}^{\mathrm{n'}}$ 与欧拉平台误差角 $\boldsymbol{\alpha}$ 之间的关系：

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nn'}}^{\mathrm{n'}}=\boldsymbol{C}_{\alpha_y}\boldsymbol{C}_{\alpha_x}\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\alpha}_z\end{bmatrix}+\boldsymbol{C}_{\alpha_y}\begin{bmatrix}\dot{\alpha}_x\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\dot{\alpha}_y\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}_{\omega}\begin{bmatrix}\dot{\alpha}_x\\\dot{\alpha}_y\\\dot{\alpha}_z\end{bmatrix}\tag{5}$$

从而由式（5）得欧拉平台误差角微分方程

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{C}_{\omega}^{-1}\boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'}\tag{6}$$

其中

$$\boldsymbol{C}_{\omega}=\begin{bmatrix}c\alpha_y & 0 & -s\alpha_y c\alpha_x\\0 & 1 & s\alpha_x\\s\alpha_y & 0 & c\alpha_y c\alpha_x\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}_{\omega}^{-1}=\frac{1}{c\alpha_x}\begin{bmatrix}c\alpha_y c\alpha_x & 0 & s\alpha_y c\alpha_x\\s\alpha_y s\alpha_x & c\alpha_x & -c\alpha_y s\alpha_x\\-s\alpha_y & 0 & c\alpha_y\end{bmatrix}\tag{7}$$

欧拉平台误差角微分方程式（6）描述了欧拉平台误差角与计算平台坐标系角运动之间的关系，下面将推导计算平台坐标系的角运动规律 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nn'}}^{\mathrm{n'}}$，从而建立起以欧拉平台误差角表示的 SINS 误差模型。

1.2　SINS 姿态误差方程

理论上，SINS 姿态矩阵微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}\times)\tag{8}$$

其中

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}\tag{9}$$

$(\boldsymbol{V}\times)$ 表示由矢量 $\boldsymbol{V}$ 构成的反对称矩阵，而实际上用于姿态更新的微分方程是带误差的，它可表示为

$$\dot{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}\times)\tag{10}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}=\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{b}}\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}=(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}}+\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}})-\boldsymbol{C}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{b}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}+\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}})\tag{11}$$

$\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}}$ 为陀螺测量误差，$\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}$ 为 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}$ 的计算误差。现定义姿态矩阵的计算误差 $\Delta\boldsymbol{C}$ 为

$$\Delta\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{n}})\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}\tag{12}$$

一方面，对 $\Delta\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$ 两边同时微分，并将式（8）和式（10）代入得

$$\Delta\dot{\boldsymbol{C}}=\dot{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}-\dot{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}\times)-\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}\times)\tag{13}$$

另一方面，对 $\Delta\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{n}})\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}$ 两边同时微分，并将式（10）代入得

$$\Delta\dot{\boldsymbol{C}}=-\dot{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{n}})\dot{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}=-\dot{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{n}})\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}\times)\tag{14}$$

令式（13）和式（14）右端相等，得

$$\dot{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}\times)-\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}\times)=0\tag{15}$$

再把矩阵微分方程 $\dot{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{n}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nn'}}^{\mathrm{n'}}\times)$ 代入式（15），并将其两边同时左乘 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n'}}$ 和右乘 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{b}}$，得

$$(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nn'}}^{\mathrm{n'}}\times)+\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}\times)\boldsymbol{C}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{b}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}\times)\boldsymbol{C}_{\mathrm{n'}}^{\mathrm{b}}=0\tag{16}$$

利用反对称阵相似变换以及反对称阵与失量之间的关系，矩阵等式（16）可等价成矢量等式

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nn'}}^{\mathrm{n'}}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}-\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}})=0\tag{17}$$

将式（9）和式（11）代入式（17），整理得

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nn'}}^{\mathrm{n'}}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n'}})\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n'}}\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}}\tag{18}$$

最后，将式（18）代入式（6）得以欧拉平台误差角表示的 SINS 非线性姿态误差方程

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{C}_{\omega}^{-1}\left[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n'}})\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n'}}\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n'}}\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}}\right]\tag{19}$$

显然，在一般情况下要将式（19）展开成分量的表达方式是比较复杂的。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

1.3 速度误差方程

理论上，SINS 速度微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}} - (2\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}}) \times \boldsymbol{v}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{g}^{\mathrm{n}} \tag{20}$$

而实际上含误差的导航解算速度微分方程为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'} \hat{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}} - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}} + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}}) \times \hat{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}} + \hat{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{n}} \tag{21}$$

式中设加性误差 $\hat{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{n}} + \delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{n}}$， $\hat{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}} + \delta\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}}$， $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}} + \delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}}$， $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}} + \delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}}$， $\hat{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{g}^{\mathrm{n}} + \delta\boldsymbol{g}^{\mathrm{n}}$，其中 $\delta\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}}$ 为加速度计测量误差。直接将式（21）减去式（20），整理得 SINS 速度误差方程

$$\delta\dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}} = \left[\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}'})^{\mathrm{T}}\right] \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'} \hat{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}} + (\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}'})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'} \delta\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}} - (2\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}} + \delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}}) \times (\hat{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}} - \delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{n}}) - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}} + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}}) \times \delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{n}} + \delta\boldsymbol{g}^{\mathrm{n}} \tag{22}$$

在上述误差分析过程中，利用到

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}} = [0 \quad \omega_{\mathrm{ie}} \cos L \quad \omega_{\mathrm{ie}} \sin L]^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}} = \left[-\frac{v_N^n}{R_M + h} \quad \frac{v_E^n}{R_N + h} \quad \frac{v_E^n}{R_N + h} \tan L\right]^{\mathrm{T}} \tag{23}$$

其中，ω_{ie} 表示地球自转角速率大小，L、λ 和 h 分别表示惯导纬度、经度和高度，R_M 和 R_N 分别表示当地地球的子午圈和卯酉圈半径。设 $\hat{L} = L + \delta L$，$\hat{h} = h + \delta h$ 且 δL 和 δh 都是小量误差，则采用微分方法可近似求得 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}}$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}}$ 的计算误差：

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\omega_{\mathrm{ie}} \sin \hat{L}\, \delta L \\ \omega_{\mathrm{ie}} \cos \hat{L}\, \delta L \end{bmatrix}, \qquad \delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}} = \begin{bmatrix} -\delta v_N^{\mathrm{n}} / (\hat{R}_M + \hat{h}) \\ \delta v_E^{\mathrm{n}} / (\hat{R}_N + \hat{h}) \\ (\tan \hat{L}\, \delta v_E^{\mathrm{n}} + \hat{v}_E^{\mathrm{n}} \sec^2 \hat{L}\, \delta L) / (\hat{R}_N + \hat{h}) \end{bmatrix} \tag{24}$$

并且有 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}}$ 和 $\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}} = \delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}} + \delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}}$。

1.4 静基座初始对准滤波模型

假设陀螺测量误差 $\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}}$ 主要为常值漂移误差 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{b}}$ 和零均值高斯白噪声 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{b}}$，加速度计测量误差 $\delta\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}}$ 主要为常值偏置误差 $\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{b}}$ 和零均值高斯白噪声 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}$，忽略重力误差项 $\delta\boldsymbol{g}^{\mathrm{n}}$，静基座下有 $\hat{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}} = \delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{n}}$ 成立，则初始对准滤波模型的状态方程可由以下四个矢量方程组成

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{C}_{\omega}^{-1} \left[(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}'}) \hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}'} \delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}} - \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{b}} \right] + \boldsymbol{C}_{\omega}^{-1} \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'} \boldsymbol{w}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{b}} \\ \delta\dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}} = \left[\boldsymbol{I} - (\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}'})^{\mathrm{T}} \right] \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'} \hat{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}} + (\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}'})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'} \boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{b}} - (2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}} + \hat{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{en}}^{\mathrm{n}}) \times \delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{n}} + (\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}'})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'} \boldsymbol{w}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{b}} = \boldsymbol{0} \\ \dot{\boldsymbol{\nabla}}^{\mathrm{b}} = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{25}$$

其中，$\boldsymbol{0}$ 为适当维数的零向量或矩阵（下同）。容易看出式（25）中含欧拉平台误差角的三角函数与噪声之间乘积项，理论上这两式不属于简单加性噪声的误差模型式（1），但是它们关于噪声项是线性的，因此必须使用本文提出的复杂加性噪声模型 UKF 进行滤波。显然，要求得式（25）中前两个失量方程的具体展开式是比较复杂的，求取它们的 Jacobian 矩阵就更加困难了，但是这并不妨碍在初始对准中应用 UKF 滤波算法。

令状态向量 $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} \quad (\delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{n}})^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，噪声向量 $\boldsymbol{w} = [(\boldsymbol{w}_{\mathrm{g}}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{w}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}})^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}]^{\mathrm{T}}$，建立滤波状态模型，并直接以 SINS 速度误差 $\boldsymbol{z} = \delta\boldsymbol{v}^{\mathrm{n}}$ 作为观测量建立观测方程如下

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} \end{cases} \tag{26}$$

$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 和 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 的具体表达式参考式（25），$\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{0}]$，$\boldsymbol{v}$ 为测量噪声。

如果假设欧拉平台误差角中 α_x 和 α_y 是小量，而 α_z 可以是任意值，则近似有 $s\alpha_x \approx \alpha_x$、$c\alpha_x \approx 1$、$s\alpha_y \approx \alpha_y$、$c\alpha_y \approx 1$，便可将误差模型式（25）简化为大方位失准角下的误差模型。如果进一步假设 α_z 也是小角度，则该模型就完全等价于经典的小失准角误差模型。关于这两个简化模型的结果就不再一一列出来了，但是作为滤波效果的对比，后面还将对它们进行仿真。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2　Kalman滤波和UKF滤波

标准Kalman滤波是一种线性最小方差估计，使用状态方程描述被估计量的变化规律，状态方程由噪声驱动，它的状态估计算法是递推的，采用“预测—修正”的线性算法框架。UKF滤波也采用与标准Kalman滤波一样的算法结构。所不同的是，在Kalman滤波中可以直接通过线性方程确定状态统计量的转移，而UKF不行，后者必须借助于计算采样点来演化状态分布特性的转移。

2.1　标准Kalman滤波

离散线性系统状态方程和量测方程可用如下公式描述

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k|k-1}\boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{w}_{k-1} \\ \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k \end{cases} \tag{27}$$

式中 $\boldsymbol{x}_k$、$\boldsymbol{z}_k$ 分别为状态向量和量测向量，$\boldsymbol{\Phi}_{k|k-1}$、$\boldsymbol{\Gamma}_k$、$\boldsymbol{H}_k$ 分别为状态转移矩阵、噪声分配矩阵和量测矩阵，$\boldsymbol{w}_k$、$\boldsymbol{v}_k$ 分别为系统噪声和量测噪声且 $E\left[\boldsymbol{w}_k\right]=\boldsymbol{0}$，$E\left[\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{w}_j^{\mathrm{T}}\right]=\delta_{kj}\boldsymbol{Q}_k$，$E\left[\boldsymbol{v}_k\right]=\boldsymbol{0}$，$E\left[\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\right]=\delta_{kj}\boldsymbol{R}_k$，$E\left[\boldsymbol{w}_k\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\right]=\boldsymbol{0}$，$\delta_{kj}$ 是Dirac函数。利用量测 $\boldsymbol{z}_k$ 获得状态 $\boldsymbol{x}_k$ 最优估计值 $\hat{\boldsymbol{x}}_k$ 的标准Kalman滤波递推过程由以下五个步骤构成：①状态一步预测；②一步预测均方差阵；③滤波增益；④状态最优估计；⑤状态估计均方差阵等。其公式如下[1]：

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = \boldsymbol{\Phi}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{P}_{k|k-1} = \boldsymbol{\Phi}_{k|k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k|k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k\right)^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right) \\ \boldsymbol{P}_k = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k\right)\boldsymbol{P}_{k|k-1} \end{cases} \tag{28}$$

若记量测预测为 $\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1} = \boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$，状态预测误差与量测预测误差之间协方差为 $\boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k} = E\left[(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}-\boldsymbol{x}_k)(\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}-\boldsymbol{z}_k)^{\mathrm{T}}\right]$，量测预测误差均方差为 $\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k} = E\left[(\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}-\boldsymbol{z}_k)(\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}-\boldsymbol{z}_k)^{\mathrm{T}}\right]$，则有

$$\boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k} = E\left[(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}-\boldsymbol{x}_k)(\boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{v}_k)^{\mathrm{T}}\right] = E\left[(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}-\boldsymbol{x}_k)(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}-\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k} &= E\left[(\boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{v}_k)(\boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}-\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{v}_k)^{\mathrm{T}}\right] = \\ &\boldsymbol{H}_k E\left[(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}-\boldsymbol{x}_k)(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}-\boldsymbol{x}_k)^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} + E\left[\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k^{\mathrm{T}}\right] = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k \end{aligned} \tag{30}$$

将式（29）和式（30）代入式（28）中的滤波增益计算公式，所以 $\boldsymbol{K}_k$ 也可以表示成

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k}\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}^{-1} \tag{31}$$

由式（31）两边右乘 $\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}$ 再转置得：$(\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k}^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$。由于 $\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}$ 和 $\boldsymbol{P}_{k|k-1}$ 都是对称矩阵，所以有 $\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k|k-1}$，将其代入式（28）中的状态估计均方差阵 $\boldsymbol{P}_k$ 式得

$$\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_{k|k-1} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}} \tag{32}$$

因此，Kalman滤波递推公式也可写成

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = \boldsymbol{\Phi}_{k|k-1}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \\ \boldsymbol{P}_{k|k-1} = \boldsymbol{\Phi}_{k|k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k|k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k} = \boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}, \qquad \boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k} = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k \\ \boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k}\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1} = \boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}, \qquad \hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{z}_k - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right) \\ \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_{k|k-1} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{33}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2.2 简化UKF滤波

UKF 滤波以 UT 变换为基础，精心选取有限个所谓 Sigma 采样点来近似系统状态的先验统计特性，再直接通过非线性方程演化系统状态的后验分布特性。在 UKF 滤波中，一般情况下必须对系统过程噪声和量测噪声进行状态增广，但是当系统噪声和量测噪声均为加性噪声时，可以不作增广处理，这有利于减小滤波计算量。现将基于复杂噪声式（2）所表示的模型滤波过程叙述如下，具体推导参见附录。

1）初始化状态变量及其均方差

$$\hat{\boldsymbol{x}}_0 = E[\boldsymbol{x}_0], \qquad \boldsymbol{P}_0 = E\left[(\hat{\boldsymbol{x}}_0 - \boldsymbol{x}_0)(\hat{\boldsymbol{x}}_0 - \boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}\right] \tag{34}$$

2）时间更新

$$\begin{cases} \boldsymbol{\chi}_{k-1} = \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \quad [\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}]_L + \gamma\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}} \quad [\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}]_L - \gamma\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}}\right] \\ \boldsymbol{\chi}^*_{i,k|k-1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}) \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \boldsymbol{\chi}^*_{i,k|k-1} \\ \boldsymbol{P}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\boldsymbol{\chi}^*_{i,k|k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\chi}^*_{i,k|k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\chi}_{k|k-1} = \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} \quad [\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}]_L + \gamma\sqrt{\boldsymbol{P}_{k|k-1}} \quad [\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}]_L - \gamma\sqrt{\boldsymbol{P}_{k|k-1}}\right] \\ \boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}) \\ \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} \end{cases} \tag{35}$$

3）量测更新

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k}\boldsymbol{P}^{-1}_{\hat{z}_k\hat{z}_k} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{z}_k - \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right) \\ \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_{k|k-1} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{36}$$

其中，$[\boldsymbol{x}_k]_L$ 表示每一个列向量均为 $\boldsymbol{x}_k$ 的一个含 L 列的矩阵，其它参数计算如下

$$\begin{cases} \lambda = \alpha^2(L+\kappa) - L \\ \gamma = \sqrt{L+\lambda} \\ W_0^{(m)} = \lambda/(L+\lambda), \qquad W_0^{(c)} = \lambda/(L+\lambda) + (1-\alpha^2+\beta) \\ W_i^{(m)} = W_i^{(c)} = 1/[2(L+\lambda)], \qquad (i = 1,2,...,2L) \end{cases} \tag{37}$$

式中，L 是状态 $\boldsymbol{x}_k$ 的维数，α 用于确定 Sigma 点在其均值附近的分布情况（往往取为一个小的正值，如 $1\mathrm{e}-4 \leqslant \alpha \leqslant 1$），$\kappa$ 是一比例因子（一般在状态估计时设为 0，在参数估计时取为 $3-L$），β 是另一个比例因子（用于合并状态分布的先验知识，对于高斯分布其最优值为 2），$\sqrt{\boldsymbol{P}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的平方根矩阵（如满足矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}$ 的下三角 Cholesky 分解矩阵 $\boldsymbol{A}$）。

在静基座初始对准滤波模型式（26）中测量方程为线性，可对 UKF 滤波算法进行进一步简化，以下给出简化的简要说明及结果。在式（35）中 Sigma 采样点 $\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}$ 满足方程

$$\sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} (\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}_{k|k-1} \tag{38}$$

当系统的测量方程为线性方程 $\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k$ 时，从式（35）可得

$$\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}, \qquad \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1} = \boldsymbol{H}_k\sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)}\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1} = \boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1},$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

因此有

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)}(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}=\\&\sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)}\left[\boldsymbol{H}_k(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\right]\left[\boldsymbol{H}_k(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\right]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{39}$$

将式（39）代入式（36）中 $\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}$，并注意到 $\boldsymbol{j}(\bullet)$ 是单位矩阵，得

$$\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_k\tag{40}$$

同理可将 $\boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k}$ 式等价为

$$\boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k}=\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\tag{41}$$

至此，当过程噪声为复杂加性噪声且测量方程是线性时，得简化 UKF 滤波算法

$$\begin{cases}\boldsymbol{\chi}_{k-1}=\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\quad[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}]_L+\gamma\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}}\quad[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}]_L-\gamma\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}}\right]\\ \boldsymbol{\chi}^*_{i,k|k-1}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1})\\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}=\sum_{i=0}^{2L}W_i^{(m)}\boldsymbol{\chi}^*_{i,k|k-1}\\ \boldsymbol{P}_{k|k-1}=\sum_{i=0}^{2L}W_i^{(c)}(\boldsymbol{\chi}^*_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\chi}^*_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k}=\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k|k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_k\\ \boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k}\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}^{-1}\\ \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}=\boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1},\qquad \hat{\boldsymbol{x}}_k=\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}+\boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{z}_k-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right)\\ \boldsymbol{P}_k=\boldsymbol{P}_{k|k-1}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}\end{cases}\tag{42}$$

可见，除使用 UT 变换进行状态及其方差预测外，其它算法步骤与标准 Kalman 滤波公式（33）完全相同。简化 UKF 滤波算法式（42）避免了重采样、多次求解量测预测方程、计算量测预测方差等一系列繁杂过程。值得指出的是，文中分析 UKF 滤波简化过程采用的采样策略是对称 Sigma 采样，当然这一分析过程也适用于单形采样，后一采样策略还能进一步缩减滤波计算量。

3　仿 真

进行了静基座初始对准仿真，初始失准角 $\boldsymbol{\alpha}(0)$ 选择了三种比较典型的情形，它们分别是：①$\boldsymbol{\alpha}(0)=[30\quad 10\quad 170]^{\mathrm{T}}$°；②$\boldsymbol{\alpha}(0)=[0.3\quad 0.1\quad 170]^{\mathrm{T}}$°；③$\boldsymbol{\alpha}(0)=[0.3\quad 0.1\quad 1.7]^{\mathrm{T}}$°。再利用三种滤波方法进行失准角估计仿真，它们分别是：a）大失准角 UKF 滤波；b）大方位失准角 UKF 滤波；c）小失准角标准 Kalman 滤波。仿真过程中不进行反馈修正，对准误差的仿真结果如图 1～3 所示，其中实线、虚线、点划线分别是滤波方法 a）、b）和 c）下的失准角估计误差，但是情形①中方法 b）和 c）估计无效、情形②中方法 c）估计无效，图中未给出这三种曲线。这些典型的仿真结果说明了：利用大失准误差模型的UKF滤波方法对各种失准角下的初始对准估计有效，大方位失准角误差模型的 UKF 滤波只适用于水平失准角较小的情

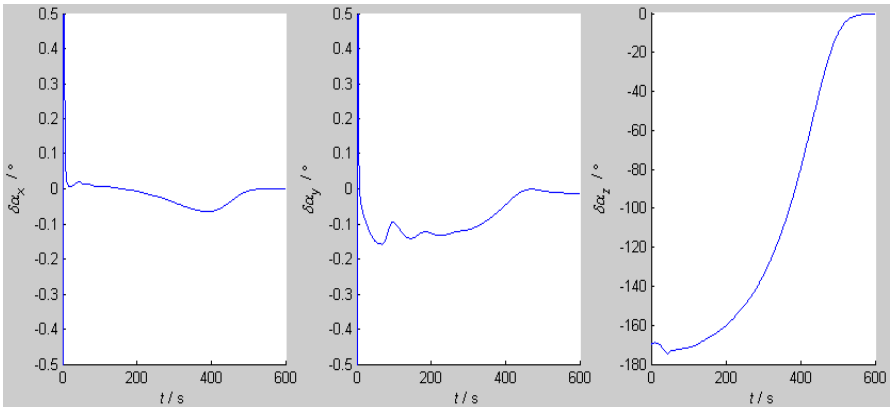


图 1　大失准角对准误差（$\boldsymbol{\alpha}(0)=[30\quad 10\quad 170]^{\mathrm{T}}$(°)）

Fig.1 Simulation errors under large misalignment angles($\boldsymbol{\alpha}(0)=[30\quad 10\quad 170]^{\mathrm{T}}$(°))

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

形，而标准 Kalman 滤波中要求三个失准角都比较小。从图 1～3 还可以看出，初始失准角越大，滤波收敛时间越长，并且一般还存在滤波收敛精度越差的现象，因此，对准前装订比较准确的初始姿态角，或者对准过程中采用反馈修正方法不断减小失准角误差，对初始对准都是有益的。

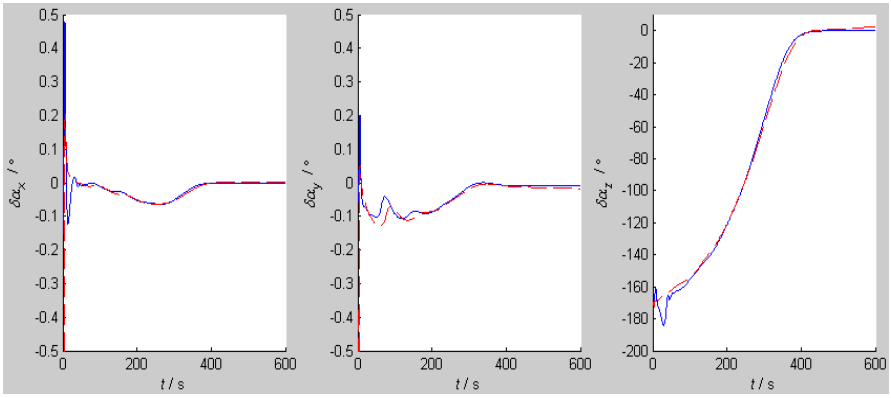


图 2 大方位失准角对准误差（$\boldsymbol{\alpha}(0)=[0.3 \quad 0.1 \quad 170]^{\mathrm{T}}$ (°)）

Fig.2 Simulation errors under large header misalignment angle($\boldsymbol{\alpha}(0)=[0.3 \quad 0.1 \quad 170]^{\mathrm{T}}$ (°))

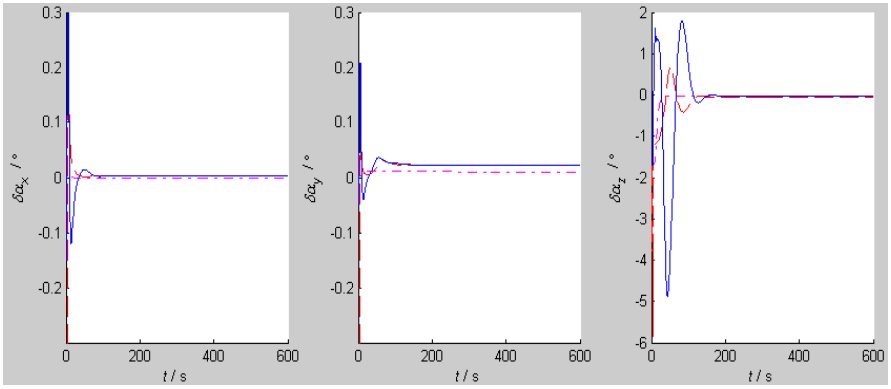


图 3 小失准角对准误差（$\boldsymbol{\alpha}(0)=[0.3 \quad 0.1 \quad 1.7]^{\mathrm{T}}$ (°)）

Fig.3 Simulation errors under small misalignment angles($\boldsymbol{\alpha}(0)=[0.3 \quad 0.1 \quad 1.7]^{\mathrm{T}}$ (°))

此外，通过更多的仿真，作者总结出以下几点经验和措施，可以考虑用来在大失准角条件下提高初始对准性能：

1）通常水平失准角估计速度比较快，而方位失准角慢，采用遗忘滤波算法有利于避免状态估计方差阵和增益矩阵的退化，提高方位收敛速度；

2）滤波过程中当失准角降低至比较小时，从大失准角 UKF 滤波方式转到小失准角 Kalman 滤波方式能够降低计算量，并且不损失对准精度；

3）对于一般非线性系统，目前还很难从理论上证明 UKF 滤波的有效性和收敛性，而主要依靠仿真和试验验证。如果在大失准角条件下使用 UKF 滤波的主要目的在于迅速辨识粗略失准角的话，在 UKF 滤波模型中就可以不将惯性传感器误差纳入滤波模型，降低维数不仅能能够减小计算量，还有利于减小 UKF 滤波发散的机会。

4 结 论

本文基于欧拉平台误差角的概念提出了大失准角条件下的 SINS 非线性初始对准误差模型，在系统噪声和量测噪声均为复杂加性噪声并且量测方程为线性时，推导了简化的 UKF 滤波方法。静基座下的初始对准仿真结果表明所提 SINS 误差模型和 UKF 滤波估计算法是正确和有效的。显然，如果状态方程是线性的而测量方程为非线性的，也具有相应的简化 UKF 滤波方法，具体可参见文献[11]。为了减小计算量和保证 UKF 稳定性，建议在大失准条件下可不必将惯性传感器误差纳入滤波模型。UKF 滤波的主要目的是为了降低失准角误差，当通过反馈修正使失准角比较小后，采用经典 Kalman 滤波更加有效。

附录：基于复杂加性噪声的简化 UKF 滤波

考虑复杂加性噪声非线性系统滤波模型：

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_{k-1})\boldsymbol{w}_{k-1} \\ \boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}_k)\boldsymbol{v}_k \end{cases} \tag{A1}$$

其中 $\boldsymbol{f}(\bullet)$、$\boldsymbol{g}(\bullet)$、$\boldsymbol{h}(\bullet)$、$\boldsymbol{j}(\bullet)$ 均可为非线性函数，$\boldsymbol{x}_k$ 和 $\boldsymbol{z}_k$ 分别是 L^x 维状态向量和 L^z 维量测向量，$\boldsymbol{w}_k$ 和 $\boldsymbol{v}_k$ 分别是 L^w 维和 L^v 维零均值噪声向量，且记 $L^a = L^x + L^w$ 和 $L^b = L^x + L^v$。

设矩阵平方根分解 $\boldsymbol{P} = \sqrt{\boldsymbol{P}}\sqrt{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{Q} = \sqrt{\boldsymbol{Q}}\sqrt{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}$，则在矩阵运算中容易验证下式成立：

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{P}^a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{\boldsymbol{P}}&0\\ 0&\sqrt{\boldsymbol{Q}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}&0\\ 0&\sqrt{\boldsymbol{Q}}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{\boldsymbol{P}}&0\\ 0&\sqrt{\boldsymbol{Q}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{\boldsymbol{P}}&0\\ 0&\sqrt{\boldsymbol{Q}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{A2}$$

因此有

$$\sqrt{\boldsymbol{P}^a}=\begin{bmatrix}\sqrt{\boldsymbol{P}}&0\\ 0&\sqrt{\boldsymbol{Q}}\end{bmatrix} \tag{A3}$$

UKF 滤波采用与标准 Kalman 滤波一样的“预测—修正”算法框架，在 UKF 预测过程中包含利用 UT 变换进行状态预测和量测预测两个预测过程，本附录主要介绍复杂加性噪声非线性系统滤波的这两个过程的简化算法公式。

首先，介绍采用 UT 变换对（A1）中状态方程进行状态预测。将状态噪声增广为状态向量，令增广状态 $\boldsymbol{x}_k^a$ 及其方差阵 $\boldsymbol{P}_k^a$ 分别为

$$\boldsymbol{x}_k^a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k\\ \boldsymbol{w}_k\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}_k^a=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_k&0\\ 0&\boldsymbol{Q}_k\end{bmatrix} \tag{A4}$$

根据 $k-1$ 时刻状态估计值 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$、状态噪声 $\boldsymbol{w}_{k-1}$ 及它们方差阵设计 $2L^a+1$ 个 Sigma 对称采样点

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_{k-1}^a=&\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^a\quad \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^a\right]_{L^a}+\gamma^a\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}^a}\quad \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}^a\right]_{L^a}-\gamma^a\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}^a}\right]=\\ &\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}&\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right]_{L^x}+\gamma^a\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}}&\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right]_{L^w}&\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right]_{L^x}-\gamma^a\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}}&\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right]_{L^w}\\ 0&0&\gamma^a\sqrt{\boldsymbol{Q}_{k-1}}&0&-\gamma^a\sqrt{\boldsymbol{Q}_{k-1}}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{A5}$$

其中 $\gamma^a=\sqrt{L^a+\lambda^a}$，$\left[\boldsymbol{x}_k\right]_L$ 表示每一个列向量均为 $\boldsymbol{x}_k$ 的一个含 L 列的矩阵。若不考虑列向量的排列顺序，则有

$$\boldsymbol{\chi}_{k-1}^a=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}&\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right]_{L^x}+\gamma^a\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}}&\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right]_{L^x}-\gamma^a\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}}&\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right]_{L^w}&\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right]_{L^w}\\ 0&0&0&\gamma^a\sqrt{\boldsymbol{Q}_{k-1}}&-\gamma^a\sqrt{\boldsymbol{Q}_{k-1}}\end{bmatrix} \tag{A6}$$

记 $\boldsymbol{\chi}_{k-1}^x$、$\boldsymbol{\chi}_{k-1}^w$ 分别是 $\boldsymbol{\chi}_{k-1}^a$ 中从 1 到 L^x 行、从 L^x+1 到 L^a 行的分块矩阵，即 $\boldsymbol{\chi}_{k-1}^a=\left[(\boldsymbol{\chi}_{k-1}^x)^{\mathrm{T}}\quad(\boldsymbol{\chi}_{k-1}^w)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$。

将 Sigma 采样点式（A6）代入模型式（A1）中的状态方程，计算一步预测

$$\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^x)+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^x)\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^w=\begin{cases}\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}),\ i=0\\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^x),\ i=1,2,...,2L^x\\ \boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})+\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^w,\ i=2L^x+1,2L^x+2,...,2L^a\end{cases} \tag{A7}$$

由 $\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x}$ 求得状态一步预测的均值 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$ 为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}=&\sum_{i=0}^{2L^a}W_i^{a(m)}\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x}=\\ &\frac{\lambda^a}{L^a+\lambda^a}\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})+\frac{1}{2(L^a+\lambda^a)}\left\{\sum_{i=1}^{2L^x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^x)+\sum_{i=2L^x+1}^{2L^a}\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})+\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^w\right]\right\}=\\ &\frac{\lambda^a+L^w}{L^a+\lambda^a}\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})+\frac{1}{2(L^a+\lambda^a)}\sum_{i=1}^{2L^x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^x)=\\ &\frac{\lambda^x}{L^x+\lambda^x}\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})+\frac{1}{2(L^x+\lambda^x)}\sum_{i=1}^{2L^x}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^x)=\sum_{i=0}^{2L^x}W_i^{x(m)}\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x}\end{aligned} \tag{A8}$$

其中假设 $L^w+\lambda^a=\lambda^x$，易知 $L^a+\lambda^a=L^x+\lambda^x$，$W_i^{a(m)}$ 是根据 L^a 和 λ^a 计算的均值比例系数，而 $W_i^{x(m)}$ 是根据 L^x 和 λ^x 计算的均值比例系数。再由一步预测 $\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x$ 及其均值计算一步预测均方差阵 $\boldsymbol{P}_{k|k-1}$ 为

$$\boldsymbol{P}_{k|k-1}=\sum_{i=0}^{2L^a}W_i^{a(c)}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}=$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\left[\frac{\lambda^a}{L^a+\lambda^a}+(1-\alpha^2+\beta)\right]\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}}+$$

$$\frac{1}{2(L^a+\lambda^a)}\left\{\sum_{i=1}^{2L^x}\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{x})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{x})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}}+\right.$$

$$\left.\sum_{i=2L^x+1}^{L^a}\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})+\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{w}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})+\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{w}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}}\right\}=$$

$$\left[\frac{\lambda^a}{L^a+\lambda^a}+(1-\alpha^2+\beta)\right]\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}}+$$

$$\frac{1}{2(L^a+\lambda^a)}\left\{\sum_{i=1}^{2L^x}\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{x})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{x})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}}+\right.$$

$$\sum_{i=2L^x+1}^{2L^a}\left\{\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}}+\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{w\,\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})^{\mathrm{T}}\right.$$

$$\left.\left.+\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{w}\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{w}\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{w\,\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})^{\mathrm{T}}\right\}\right\}=$$

$$\left[\frac{\lambda^a+L^w}{L^a+\lambda^a}+(1-\alpha^2+\beta)\right]\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}}+$$

$$\frac{1}{2(L^a+\lambda^a)}\left\{\sum_{i=1}^{2L^x}\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{x})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{x})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}}+\sum_{i=2L^x+1}^{2L^a}\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{w}\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{w\,\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})^{\mathrm{T}}\right\}=$$

$$\left[\frac{\lambda^x}{L^x+\lambda^x}+(1-\alpha^2+\beta)\right]\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{f}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}}+$$

$$\frac{1}{2(L^x+\lambda^x)}\sum_{i=1}^{2L^x}\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{x})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{x})-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}}+\frac{2(\gamma^a)^2}{2(L^a+\lambda^a)}\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})^{\mathrm{T}}=$$

$$\sum_{i=0}^{2L^x}W_i^{x(c)}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})^{\mathrm{T}} \tag{A9}$$

其中，$W_i^{a(c)}$ 是根据 L^a 和 λ^a 计算的方差比例系数，$W_i^{x(c)}$ 是根据 L^x 和 λ^x 计算的方差比例系数。接下来，再采用 UT 变换对（A1）中测量方程进行量测预测，将量测噪声增广为状态变量，令增广状态 $\boldsymbol{x}_k^b$ 及其方差 $\boldsymbol{P}_k^b$ 分别为

$$\boldsymbol{x}_k^b=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_k\\ \boldsymbol{v}_k\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{P}_k^b=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_k & 0\\ 0 & \boldsymbol{R}_k\end{bmatrix} \tag{A10}$$

参考式（A6），根据 $k-1$ 时刻状态预测均值 $\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}$、量测噪声 $\boldsymbol{v}_k$ 及方差阵 $\boldsymbol{P}_{k|k-1}$、$\boldsymbol{R}_k$，重新设计 $2L^b+1$ 个 Sigma 采样点（重采样）如下

$$\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{b}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} & \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]_{L^x}+\gamma^b\sqrt{\boldsymbol{P}_{k|k-1}} & \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]_{L^x}-\gamma^b\sqrt{\boldsymbol{P}_{k|k-1}} & \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]_{L^v} & \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]_{L^v}\\ 0 & 0 & 0 & \gamma^b\sqrt{\boldsymbol{R}_k} & -\gamma^b\sqrt{\boldsymbol{R}_k}\end{bmatrix} \tag{A11}$$

其中，$\gamma^b=\sqrt{L^b+\lambda^b}$，记 $\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{x}$、$\boldsymbol{\chi}_{k}^{v}$ 分别是 $\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{b}$ 中从 1 到 L^x 行、从 L^x+1 到 L^b 行的分块矩阵，即 $\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{b}=\left[\left(\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{x}\right)^{\mathrm{T}}\quad\left(\boldsymbol{\chi}_{k}^{v}\right)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$。

由式（A1）中测量模型计算 Sigma 采样点的量测一步预测：

$$\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{x})+\boldsymbol{j}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{x})\cdot\boldsymbol{\chi}_{i,k}^{v}=\begin{cases}\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}),\ \ i=0\\ \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{x}),\ \ i=1,2,..,2L^x\\ \boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})+\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k}^{v},\ \ i=2L^x+1,2L^x+2,..,2L^b\end{cases} \tag{A12}$$

求量测一步预测均值 $\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}$ 为

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1} &= \sum_{i=0}^{2L^b} W_i^{b(m)} \boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} = \\
&\frac{\lambda^b}{L^b+\lambda^b}\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}) + \frac{1}{2(L^b+\lambda^b)}\left\{\sum_{i=1}^{2L^x}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x) + \sum_{i=2L^x+1}^{2L^b}\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}) + \boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^v\right]\right\} = \\
&\frac{\lambda^b+L^v}{L^b+\lambda^b}\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}) + \frac{1}{2(L^b+\lambda^b)}\sum_{i=1}^{2L^x}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x) = \\
&\frac{\lambda^x}{L^x+\lambda^x}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{0,k|k-1}^x) + \frac{1}{2(L^x+\lambda^x)}\sum_{i=1}^{2L^x}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x) = \sum_{i=0}^{2L^x} W_i^{x(m)}\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}
\end{aligned} \tag{A13}$$

其中假设 $L^v+\lambda^b=\lambda^x$，并易知 $L^b+\lambda^b=L^x+\lambda^x$，再求量测一步预测方差阵 $\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k}$ 和状态预测与量测预测之间协方差阵 $\boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k}$ 为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_{\hat{z}_k\hat{z}_k} &= \sum_{i=0}^{2L^b} W_i^{b(c)}(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}} = \\
&\left[\frac{\lambda^b}{L^b+\lambda^b}+(1-\alpha^2+\beta)\right]\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} + \\
&+\frac{1}{2(L^b+\lambda^b)}\left\{\sum_{i=1}^{2L^x}\left[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x)-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x)-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} + \right. \\
&\left.\sum_{i=2L^x+1}^{2L^b}\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})+\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k}^v-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})+\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k}^v-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}}\right\} = \\
&\left[\frac{\lambda^b}{L^b+\lambda^b}+(1-\alpha^2+\beta)\right]\left[\boldsymbol{h}(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} + \\
&\frac{1}{2(L^b+\lambda^b)}\left\{\sum_{i=1}^{2L^x}\left[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x)-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x)-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} + \right. \\
&\sum_{i=2L^x+1}^{2L^b}\left\{\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} + \left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_k\right]\boldsymbol{\chi}_{i,k}^{v\,\mathrm{T}}\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}} + \right. \\
&\left.\left.\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k}^v\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k}^v\boldsymbol{\chi}_{i,k}^{v\,\mathrm{T}}\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}\right\}\right\} = \\
&\left[\frac{\lambda^b+L^v}{L^b+\lambda^b}+(1-\alpha^2+\beta)\right]\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} + \\
&\frac{1}{2(L^b+\lambda^b)}\left\{\sum_{i=1}^{2L^x}\left[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x)-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x)-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k}^v\boldsymbol{\chi}_{i,k}^{v\,\mathrm{T}}\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}\right\}\right\} = \\
&\left[\frac{\lambda^x}{L^x+\lambda^x}+(1-\alpha^2+\beta)\right]\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} + \\
&\frac{1}{2(L^x+\lambda^x)}\sum_{i=1}^{2L^x}\left[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x)-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x)-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} + \frac{2(\gamma^b)^2}{2(L^b+\lambda^b)}\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k}^v\boldsymbol{\chi}_{i,k}^{v\,\mathrm{T}}\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}} = \\
&\sum_{i=0}^{2L^x} W_i^{x(c)}(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{A14}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_{\hat{x}_k\hat{z}_k} &= \sum_{i=0}^{2L^b} W_i^{b(c)}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}} = \\
&\left[\frac{\lambda^b}{L^b+\lambda^b}+(1-\alpha^2+\beta)\right]\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2(L^b+\lambda^b)}\left\{\sum_{i=1}^{2L^x}\left[\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\cdot\right. \\
&\left.\left[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x)-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} + \sum_{i=2L^x+1}^{2L^b}\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})+\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\boldsymbol{\chi}_{i,k}^v-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}}\right\} = \\
&\left[\frac{\lambda^b+L^v}{L^b+\lambda^b}+(1-\alpha^2+\beta)\right]\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2(L^b+\lambda^b)}\sum_{i=1}^{2L^x}\left[\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]\left[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x)-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}\right]^{\mathrm{T}} = \\
&\sum_{i=0}^{2L^x} W_i^{x(c)}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^x-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{A15}$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

至此，总结前面的状态预测与量测预测计算公式，减少 Sigma 采样点个数，即分别以 $\boldsymbol{\chi}_{k-1}^{x}$、$\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{x}$ 代替 $\boldsymbol{\chi}_{k-1}^{a}$ 和 $\boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{b}$，重写基于复杂加性噪声非线性系统滤波模型的 UKF 状态预测和量测预测过程如下：

$$\begin{cases} \boldsymbol{\chi}_{k-1}^{x}=\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} \quad \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right]+\gamma^{x}\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}} \quad \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right]-\gamma^{x}\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}}\right] \\ \boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\chi}_{i,k-1}^{x}),\ \ i=0,1,...,2L^{x} \\ \hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}=\sum_{i=0}^{2L^{x}}W_{i}^{x(m)}\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x} \\ \boldsymbol{P}_{k|k-1}=\sum_{i=0}^{2L^{x}}W_{i}^{x(c)}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{*x}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{g}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1})^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{A16}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\chi}_{k|k-1}^{x}=\left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1} \quad \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]+\gamma^{x}\sqrt{\boldsymbol{P}_{k|k-1}} \quad \left[\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1}\right]-\gamma^{x}\sqrt{\boldsymbol{P}_{k|k-1}}\right] \\ \boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{x}),\ \ i=0,1,...,2L^{x} \\ \hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1}=\sum_{i=0}^{2L^{x}}W_{i}^{x(m)}\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1} \\ \boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{z}}_{k}\hat{\boldsymbol{z}}_{k}}=\sum_{i=0}^{2L^{x}}W_{i}^{x(c)}(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})\boldsymbol{R}_{k}\boldsymbol{j}(\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{P}_{\hat{\boldsymbol{x}}_{k}\hat{\boldsymbol{z}}_{k}}=\sum_{i=0}^{2L^{x}}W_{i}^{(c)}(\boldsymbol{\chi}_{i,k|k-1}^{x}-\hat{\boldsymbol{x}}_{k|k-1})(\boldsymbol{\eta}_{i,k|k-1}-\hat{\boldsymbol{z}}_{k|k-1})^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{A17}$$

其中，$\gamma^{x}=\sqrt{L^{x}+\lambda^{x}}$，剩余的 UKF 修正过程与标准 Kalman 滤波相同，这里不再赘述。显然，当 $\boldsymbol{w}_{k}$、$\boldsymbol{v}_{k}$ 分别是与 $\boldsymbol{x}_{k}$ 和 $\boldsymbol{z}_{k}$ 维数相同的噪声，并且 $\boldsymbol{g}(\bullet)$ 和 $\boldsymbol{j}(\bullet)$ 是常值单位矩阵时，容易看出上述滤波预测过程就与简单加性噪声的 UKF 滤波完全一致了。

参考文献(References):

[1] 秦永元，张洪钺，汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安：西北工业大学出版社，1998.
QIN Yong-yuan, ZHANG Hong-yue, WANG Shu-hua. Kalman filter and the theory of integrated navigation[M]. Xi'an, China: Northwestern Polytechnical University Press, 1998.

[2] Dmitriyev S P, Stepanov O A, Shepel S V. Nonlinear filtering methods application in INS alignment[J]. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems, 1997, 33(1): 260−271.

[3] Hong H S, Lee J G, Park C G. In-flight alignment of SDINS under large initial heading error[C]//AIAA-2001-4183: 1−6.

[4] 王丹力，张洪钺. 惯导系统初始对准的非线性滤波算法[J]. 中国惯性技术学报，1999，7(3)：17−21.
WANG Dan-li, ZHANG Hong-yue. Nonlinear filtering algorithm for INS initial alignment[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 1999, 7(3): 17−21.

[5] Yu M J, Park H W, Jeon C B. Equivalent nonlinear error models of strapdown inertial navigation system[C]//AIAA-97-3563: 581−587.

[6] 李东明. 捷联式惯导系统初始对准方法研究[D]. 哈尔滨：哈尔滨工程大学博士学位论文，2006.
LI Dong-min. Study on initial alignment methods of strapdown inertial navigation system[D]. Harbin, China: Ph. D. Dissertation, Harbin Engineering University, 2006.

[7] 周凤歧，孙东，周军. 基于非线性滤波技术的多航天器编队飞行相对导航[J]. 宇航学报，2005，26(2)：212−216.
ZHOU Feng-qi, SUN Dong, ZHOU Jun. Relative navigation based on nonlinear filtering for multiple spacecraft formation flying [J]. Journal of Astronautics, 2005, 26(2): 212−216.

[8] Julier S J, Uhlmann J K, Durrant-Whyte H F. A new approach for filtering nonlinear systems[C]//Proc. Am. Contr. Conf.. Seattle,WA, 1995: 1628−1632.

[9] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proc. of the IEEE Aerospace and Electronic Systems, 2004, 92(3): 401−422.

[10] 潘泉，杨峰，叶亮，等. 一类非线性滤波器——UKF 综述[J]. 控制与决策，2005，20(5)：481−490.
PAN Quan, YANG Feng, YE Liang, et al. Survey of a kind of nonlinear filters — UKF[J]. Control and Decision, 2005, 20(5): 481−490.

[11] 刘旭，张其善，杨东凯. 一种用于 GPS/DR 组合定位的非线性滤波算法[J]. 北京航空航天大学学报，2007，33(3)：184−187.
LIU Xu, ZHANG Qi-shan, YANG Dong-kai. Nonlinear filter algorithm for GPS/DR integrated positioning[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2007, 33(3): 184−187.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

文章编号：1005-6734(2008)04-0379-07

经典圆锥误差补偿算法中剩余误差估计的局限性研究

严恭敏[1]，严卫生[1,2]，徐德民[1,2]

（1. 西北工业大学航海学院，西安 710072；2. 水下信息处理与控制国家级重点实验室，西安 710072）

摘要：在经典圆锥误差补偿系数和剩余误差估计公式推导过程中，特别在半锥角有限小、圆锥运动频率较低和选用多子样算法时，经典的剩余误差估计方法会出现严重偏差。在不能视半锥角为无限小量情况下，文中利用推导方法提出一种新的剩余误差估计的参考公式，即圆锥误差补偿极限精度公式。利用仿真方法验证了等效旋转矢量误差的周期项对圆锥常值漂移误差有影响。研究表明，在一定的半锥角和圆锥频率的工程应用环境下，当极限精度发挥作用时，提高圆锥误差补偿精度的唯一途径是缩短补偿周期，而不像经典的结论那样——通过提高子样数几乎能无限提高圆锥误差补偿精度。

关 键 词：圆锥误差补偿；等效旋转矢量；四元数；角增量；捷联惯导系统

中图分类号：U666.1 **文献标志码：**A

Limitations of error estimation for classic coning compensation algorithm

YAN Gong-min[1], YAN Wei-sheng[1,2], XU De-min[1,2]

(1. College of Marine, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. National Key Laboratory for Underwater Information Process & Control, Xi'an 710072, China)

Abstract: In the deducing of the classic coning compensation algorithm coefficients and their residual error estimation formulas, the classic error estimation formula could cause serious errors in the case of insufficient small coning half-angle amplitude, low coning frequency and multi-samples algorithm. So a new error estimation formula, i.e. accuracy limitation formula of coning compensation was deduced even if the coning angle is not infinitesimal. Moreover, simulation tests verify that the periodic components of equivalent rotation vector affect coning compensation errors. The studies reveal that if the accuracy limitation formula acts on coning compensation algorithm under a large attitude updating period, the approach of improving coning compensation accuracy is to shorten the equivalent rotation vector calculation period, while the classic means is just by increasing the number of samples.

Key words: coning compensation; equivalent rotation vector; quaternion; angular increment; SINS

捷联惯导系统中陀螺仪与运载体固联，直接感测运载体的角运动，在恶劣角动态环境下，捷联算法中可能存在严重的圆锥效应误差。自1971年Bortz提出了等效旋转矢量微分方程后，国内外学者对圆锥误差补偿算法进行了大量的研究[1-7]。经典圆锥误差补偿的基本思路是，比较标准圆锥运动条件下的理论更新等效旋转矢量与由陀螺角增量采样构造的计算更新等效旋转矢量，求得等效旋转矢量误差，再以该误差的非周期项最小为准则，确定角增量构造算法的各项系数，如Jordan的二子样法，Miller的三子样算法和Lee的四子样算法。在总结以往算法的基础上，Jiang提出了以角增量构造圆锥误差补偿量的通用表达式[3]，Park提出了在各种子样下求解圆锥误差补偿系数和剩余误差估计的通用公式[4]。至此，可以说圆锥误差补偿算法得到了比较完满的解决，遗留的只不过是一些边角问题的修补了，就国内来说，相关研究文献虽然众多，

收稿日期：2008-05-31；**修回日期：**2008-07-16

基金项目：中国博士后科学基金（20070420215）；水下信息处理与控制国家级重点实验室基金（9140C230206070C2306）

作者简介：严恭敏（1977—），男，博士后，主要从事陆用定位定向系统、水下航行器自主导航技术与组合导航系统理论研究。E-mail：yangongmin@163.com

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

但是不少均处于跟踪性研究或重复性研究的水平。尔后，针对某些特定应用场合，仍不断有研究者提出重新确定优化系数的方法，如陀螺采样为角速率或角速率+角增量，激光捷联惯导系统中激光陀螺高频采样需经数字低通滤波，广义圆锥运动环境等情形[8-13]。

在实际应用中，Park圆锥误差补偿的剩余误差估计公式存在不足之处，其原因主要有两点：① 在经典圆锥误差补偿系数推导过程中，必须假设圆锥运动的半锥角为小量，但实际上并不能认为它是无穷小量（如1° ≈0.017 rad量级），因此，特别是在半锥角较大且子样数较高时，剩余误差估计公式偏差严重；② 在经典圆锥误差中，以等效旋转矢量误差的非周期项最小为准则确定补偿系数，而仿真表明，若等效旋转矢量误差的周期项存在误差也会引起常值漂移误差。由于未考虑到上述两个因素影响，而仅以Park的剩余误差估计公式作为衡量标准，致使多数文献研究结果都高估了它们的圆锥误差补偿算法精度。这些精度高估了的算法，其实际工程应用价值受到限制。本文所要研究的就是，利用近似推导和仿真的方法阐明前述两个因素对圆锥误差补偿算法中剩余误差估计的影响，为剩余误差估计提供一种新的更精确的参考。

1 经典圆锥运动的描述

设动坐标系 b 系相对参考坐标系 r 系绕 $o_r x_r$ 轴作圆锥运动，半锥角为 α，锥运动频率为 f（$\Omega = 2\pi f$），并且初始 $t = t_0 = 0$ 时刻 b 系相对于 r 系的变换四元数为

$$\boldsymbol{Q}(t_0) = \left[\cos\frac{\alpha}{2} \quad 0 \quad \sin\frac{\alpha}{2}\cos\Omega t_0 \quad \sin\frac{\alpha}{2}\sin\Omega t_0\right]^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

而 b 系在 $t > 0$ 时刻的运动参数可分别用等效旋转矢量 $\boldsymbol{\Phi}(t)$、变换四元数 $\boldsymbol{Q}(t)$ 或角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 描述为

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \left[0 \quad \alpha\cos\Omega t \quad \alpha\sin\Omega t\right]^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{Q}(t) = \left[\cos\frac{\alpha}{2} \quad 0 \quad \sin\frac{\alpha}{2}\cos\Omega t \quad \sin\frac{\alpha}{2}\sin\Omega t\right]^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \left[-2\Omega\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad -\Omega\sin\alpha\sin\Omega t \quad \Omega\sin\alpha\cos\Omega t\right]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

上述三个公式是同一运动的三种不同数学表达方式，它们之间存在一定的关系。注意到角速度式（4）中 x 轴分量存在一个常值小量，而文献[3][4]将该分量视为 0，是不正确的。

记 b 系从 t_{m-1} 时刻至 t_m 时刻（$t_m - t_{m-1} = T$）相对变化的等效旋转矢量为 $\boldsymbol{\Phi}(t_{m-1}, t_m)$，与其对应的变换四元数为 $\boldsymbol{q}(t_{m-1}, t_m)$。由于等效旋转矢量一般不满足简单的可加性或可乘性，即一般有 $\boldsymbol{\Phi}(t_m) \neq \boldsymbol{\Phi}(t_{m-1}) + \boldsymbol{\Phi}(t_{m-1}, t_m)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}(t_m) \neq \boldsymbol{\Phi}(t_{m-1}) \times \boldsymbol{\Phi}(t_{m-1}, t_m)$，因此，在圆锥运动条件下，欲求得 $\boldsymbol{\Phi}(t_{m-1}, t_m)$，可先通过求得 $\boldsymbol{q}(t_{m-1}, t_m)$。其步骤如下：

由变换四元数更新方程

$$\boldsymbol{Q}(t_m) = \boldsymbol{Q}(t_{m-1})\boldsymbol{q}(t_{m-1}, t_m) \tag{5}$$

解得

$$\boldsymbol{q}(t_{m-1}, t_m) = \boldsymbol{Q}^*(t_{m-1})\boldsymbol{Q}(t_m) = \begin{bmatrix} 1 - 2(\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\lambda_N}{2})^2 \\ -\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\lambda_N \\ -\sin\alpha\sin\dfrac{\lambda_N}{2}\sin[\Omega(t_{m-1} + \dfrac{T}{2})] \\ \sin\alpha\sin\dfrac{\lambda_N}{2}\cos[\Omega(t_{m-1} + \dfrac{T}{2})] \end{bmatrix} \tag{6}$$

其中记 $\lambda_N = \Omega T$。再根据变换四元数 $\boldsymbol{q}(t_{m-1}, t_m)$ 与等效旋转矢量 $\boldsymbol{\Phi}(t_{m-1}, t_m)$ 之间的关系式（7）：

$$\boldsymbol{q}(t_{m-1}, t_m) = \cos\frac{\Phi_{\mathrm{T}}}{2} + \boldsymbol{\Phi}(t_{m-1}, t_m)\frac{\sin(\Phi_{\mathrm{T}}/2)}{\Phi_{\mathrm{T}}} \tag{7}$$

其中，$\Phi_{\mathrm{T}} = \left|\boldsymbol{\Phi}(t_{m-1}, t_m)\right|$，并且记 $\xi = \Phi_{\mathrm{T}} / \sin(\Phi_{\mathrm{T}}/2)$，比较式（6）和式（7）的后三分量（矢量部分），得更新等效旋转

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

矢量的理论值

$$\boldsymbol{\Phi}(t_{m-1},t_m)=\xi\cdot\begin{bmatrix}-\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\lambda_N\\ -\sin\alpha\sin\dfrac{\lambda_N}{2}\sin[\Omega(t_{m-1}+\dfrac{T}{2})]\\ \sin\alpha\sin\dfrac{\lambda_N}{2}\cos[\Omega(t_{m-1}+\dfrac{T}{2})]\end{bmatrix}\tag{8}$$

如果将式（8）两边同时取模再平方，整理可得

$$\sin^2\frac{\Phi_{\mathrm{T}}}{2}=\sin^4\frac{\alpha}{2}\sin^2\lambda_N+\sin^2\alpha\sin^2\frac{\lambda_N}{2}\tag{9}$$

假设从 t_{m-1} 时刻至 t_m 时刻对圆锥运动进行了 N 次等间隔角增量采样，采样周期 $h=T/N$，并记 $\lambda=\Omega h$（即 $\lambda_N=N\lambda$），则有各子样角增量 $\Delta\boldsymbol{\theta}_m(i)$ 和总角增量 $\Delta\boldsymbol{\theta}_m$ 表达公式

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_m(i)=\int_{t_{m-1}+(i-1)h}^{t_{m-1}+ih}\boldsymbol{\omega}(t)\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\lambda\\ -2\sin\alpha\sin\dfrac{\lambda}{2}\sin[\Omega(t_{m-1}+ih-\dfrac{h}{2})]\\ 2\sin\alpha\sin\dfrac{\lambda}{2}\cos[\Omega(t_{m-1}+ih-\dfrac{h}{2})]\end{bmatrix}\tag{10}$$

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_m=\int_{t_{m-1}}^{t_m}\boldsymbol{\omega}(t)\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{N}\Delta\boldsymbol{\theta}_m(i)=\begin{bmatrix}-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\lambda_N\\ -2\sin\alpha\sin\dfrac{\lambda_N}{2}\sin[\Omega(t_{m-1}+\dfrac{T}{2})]\\ 2\sin\alpha\sin\dfrac{\lambda_N}{2}\cos[\Omega(t_{m-1}+\dfrac{T}{2})]\end{bmatrix}\tag{11}$$

其中 $i=1,2,3,\cdots,N$。上述分析中，式（8）表示理想圆锥运动在 $t_m-t_{m-1}=T$ 时间段内的等效旋转矢量理论值，而式（11）表示期间陀螺输出的总角增量，显然，难以用简单表达式准确建立起式（8）与式（11）的关系。

2　圆锥误差补偿算法

这里简要介绍一下 Park 圆锥误差补偿系数与剩余误差估计通用公式的求解过程。

假设半锥角 α 为正值小量，则在式（9）中 $\sin^4\dfrac{\alpha}{2}$ 与 $\sin^2\alpha$ 相比是高阶小量，忽略前者的影响，近似有 $\sin\dfrac{\Phi_{\mathrm{T}}}{2}\approx\sqrt{\sin^2\alpha\sin^2\dfrac{\lambda_N}{2}}=\sin\alpha\sin\dfrac{\lambda_N}{2}$，再使用泰勒级数展开其中的 $\sin\dfrac{\Phi_{\mathrm{T}}}{2}$ 和 $\sin\alpha$，并且只保留一阶项，近似可得 $\dfrac{\Phi_{\mathrm{T}}}{2}\approx\alpha\sin\dfrac{\lambda_N}{2}$，所以有

$$\frac{\sin(\Phi_{\mathrm{T}}/2)}{\Phi_{\mathrm{T}}/2}\approx\frac{\sin\alpha\sin(\lambda_N/2)}{\alpha\sin(\lambda_N/2)}\approx1,\quad\text{即}\quad\xi=\frac{\Phi_{\mathrm{T}}}{\sin(\Phi_{\mathrm{T}}/2)}\approx2\tag{12}$$

因此，更新等效旋转矢量的理论值式（8）近似为

$$\boldsymbol{\Phi}_m\approx\begin{bmatrix}-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\lambda_N\\ -2\sin\alpha\sin\dfrac{\lambda_N}{2}\sin[\Omega(t_{m-1}+\dfrac{T}{2})]\\ 2\sin\alpha\sin\dfrac{\lambda_N}{2}\cos[\Omega(t_{m-1}+\dfrac{T}{2})]\end{bmatrix}\tag{13}$$

其中简记 $\boldsymbol{\Phi}(t_{m-1},t_m)$ 为 $\boldsymbol{\Phi}_m$。比较式（11）和式（13）可见，它们只在 x 轴分量上不同，如果直接以陀螺总角增量 $\Delta\boldsymbol{\theta}_m$ 代替等效旋转矢量 $\boldsymbol{\Phi}_m$ 进行捷联惯导解算，在每个姿态更新 T 时段内都将产生误差（即圆锥效应误差）：

$$\delta\Phi_{mx}=\Phi_{mx}-\Delta\theta_{mx}=2\sin^2\frac{\alpha}{2}(\lambda_N-\sin\lambda_N)\tag{14}$$

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

经典圆锥误差补偿算法的研究目标是，在每个姿态更新周期 T 内进行多次采样，获得子样 $\Delta\boldsymbol{\theta}_m(i)$，再通过 $\Delta\boldsymbol{\theta}_m(i)$ 逼近和消除圆锥误差 $\delta\boldsymbol{\Phi}_{mx}$。

首先，利用泰勒级数展开 $\delta\boldsymbol{\Phi}_{mx}$ 得

$$\delta\Phi_{mx}=4\sin^2\frac{\alpha}{2}[\frac{1}{2}(\lambda_N-\sin\lambda_N)]=4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sum\nolimits_{i=1}^{\infty}c_i\lambda^{2i+1} \tag{15}$$

式中，$c_i=(-1)^{i+1}\cdot\dfrac{N^{(2i+1)}}{2\times(2i+1)!}$。

其次，在 Jiang 圆锥误差补偿通用表达式中，以单周期多子样圆锥补偿为例，圆锥误差补偿通式为

$$\delta\hat{\boldsymbol{\Phi}}_m=[\sum_{i=1}^{N-1}k_{N-k}\Delta\boldsymbol{\theta}_m(i)]\times\Delta\boldsymbol{\theta}_m(N) \tag{16}$$

其中

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_m(i)\times\Delta\boldsymbol{\theta}_m(j)=\begin{bmatrix}4\sin^2\alpha\sin^2\dfrac{\lambda}{2}\sin[(i-j)\lambda]\\ -8\lambda\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\dfrac{\lambda}{2}\sin[\Omega t_{m-1}+(i+j-1)\dfrac{\lambda}{2}]\sin[(i-j)\dfrac{\lambda}{2}]\\ 8\lambda\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha\sin\dfrac{\lambda}{2}\cos[\Omega t_{m-1}+(i+j-1)\dfrac{\lambda}{2}]\sin[(i-j)\dfrac{\lambda}{2}]\end{bmatrix} \tag{17}$$

而 $k_i(i=1,2,3,\cdots,N-1)$ 为待定系数。将式（17）代入式（16），展开并整理得 $\delta\hat{\boldsymbol{\Phi}}_m$ 的 x 轴分量 $\delta\hat{\Phi}_{mx}$ 为

$$\begin{aligned}\delta\hat{\Phi}_{mx}&=4\sin^2\alpha\sin^2\frac{\lambda}{2}\sum\nolimits_{l=1}^{N-1}k_l\sin(l\lambda)=\\&2\sin^2\alpha(1-\cos\lambda)\sum\nolimits_{l=1}^{N-1}k_l\sin(l\lambda)=\sin^2(\alpha)\sum\nolimits_{i=1}^{\infty}\sum\nolimits_{j=1}^{N-1}A_{ij}k_i\lambda^{2i+1}\end{aligned} \tag{18}$$

其中 $A_{ij}=(-1)^{i+1}\cdot\dfrac{(j+1)^{2i+1}-2j^{2i+1}+(j-1)^{2i+1}}{(2i+1)!}$。最后，考虑到 α 为小量，近似有

$$4\sin^2\frac{\alpha}{2}\approx\sin^2\alpha \tag{19}$$

在经典圆锥误差中，只考虑等效旋转矢量误差的非周期项，而忽略其它两个分量影响，因此若令 $\delta\Phi_{mx}=\delta\hat{\Phi}_{mx}$，则有

$$\sum\nolimits_{i=1}^{\infty}c_i\lambda^{2i+1}=\sum\nolimits_{i=1}^{\infty}\sum\nolimits_{j=1}^{N-1}A_{ij}k_i\lambda^{2i+1} \tag{20}$$

在每个 N 子样情形下，令式（20）中关于 λ 的前 $N-1$ 项对应系数相等，便可解得待定系数 k_i，N 为1～5时的各系数结果如表1所示。此外，设 N 子样提供的有效补偿值 $\delta\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{mx}$ 与真实值 $\delta\boldsymbol{\Phi}_{mx}$ 之间的误差为 ε_N，此即圆锥误差补偿算法的剩余误差，则 ε_N 的估计公式为

表1 圆锥误差补偿算法系数与漂移

Tab.1 Coning compensation algorithm coefficients and error estimations

子样数 N	k_1	k_2	k_3	k_4	ε_N
1					$1/12\times\alpha^2\lambda_N^3$
2	2/3				$1/960\times\alpha^2\lambda_N^5$
3	27/20	9/20			$1/204120\times\alpha^2\lambda_N^7$
4	214/105	92/105	54/105		$1/82575360\times\alpha^2\lambda_N^9$
5	1375/504	650/504	525/504	250/504	$1/54140625000\times\alpha^2\lambda_N^{11}$

$$\varepsilon_N=\delta\Phi_{mx}-\delta\hat{\Phi}_{mx}=\frac{N\times N!}{2^{N+1}\prod_{k=1}^{N+1}(2k-1)}\alpha^2\lambda_N^{2N+1} \tag{21}$$

各子样下的 ε_N 估计式亦可参见表1最后一列。

3 经典剩余误差估计的局限性

从上一节圆锥误差补偿算法求解过程中可以看出，其中作了两点近似或假设，首先是假设半锥角 α 是小量，体现在

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式（12）和式（19）；其次认为式（16）中各子样叉乘后的 y 和 z 轴分量不会引起姿态更新常值漂移误差。以下详细分析这两因素对经典圆锥误差补偿算法中剩余误差估计的影响，证明传统剩余误差估计过于理性化了。

3.1　半锥角 α 的影响

为了推导方便，这里除了假设 α 是小量外，还假设 λ_N 也是小量（而实际上补偿算法中只要求角增量采样满足采样定理，即 $\lambda_N = N\cdot\Omega h < N\pi$，$\lambda_N$ 不一定是小量），用泰勒级数展开式（9），保留适当阶次的近似得

$$(\frac{\Phi_{\mathrm{T}}}{2})^2 \approx [(\frac{\alpha}{2})^2\lambda_N]^2 + [(\alpha - \frac{1}{3!}\alpha^3)\frac{\lambda_N}{2}]^2 \tag{22}$$

展开并整理得

$$\Phi_{\mathrm{T}}^2 \approx 4\alpha^2\lambda_N^2[\frac{1}{16}\alpha^2 + \frac{1}{4}(1-\frac{1}{6}\alpha^2)^2] \approx \alpha^2\lambda_N^2(1-\frac{1}{12}\alpha^2) \tag{23}$$

因此
$$\xi = \frac{\Phi_{\mathrm{T}}}{\sin(\Phi_{\mathrm{T}}/2)} \approx \frac{\Phi_{\mathrm{T}}}{(\Phi_{\mathrm{T}}/2) - 1/3!\times(\Phi_{\mathrm{T}}/2)^3} \approx 2(1+\frac{1}{24}{\Phi_{\mathrm{T}}}^2) = 2[1+\frac{1}{24}\alpha^2\lambda_N^2(1-\frac{1}{12}\alpha^2)] \tag{24}$$

不妨退一步假设式（20）能严格成立，即在经典圆锥误差补偿算法中当子样数无穷多时，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N-1} A_{ij}k_j\lambda^{(2i+1)} = \frac{1}{2}(\lambda_N - \sin\lambda_N)$$

计算如下式定义的误差

$$\begin{aligned}
\tilde{\varepsilon} = \delta\Phi_{mx} - \delta\hat{\Phi}_{mx} &= \sin^2\frac{\alpha}{2}(2\lambda_N - \xi\sin\lambda_N) - \sin^2(\alpha)\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N-1}A_{ij}k_j\lambda^{(2i+1)} = \\
&\sin^2\frac{\alpha}{2}(2\lambda_N - \xi\sin\lambda_N) - \frac{1}{2}\sin^2(\alpha)(\lambda_N - \sin\lambda_N) = \\
&(2\sin^2\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin^2\alpha)(\lambda_N - \sin\lambda_N) - (\xi-2)\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\lambda_N = \\
&(\frac{1}{4}\cos 2\alpha - \cos\alpha + \frac{3}{4})(\lambda_N - \sin\lambda_N) - \frac{1}{2}(\xi-2)(1-\cos\alpha)\sin\lambda_N
\end{aligned} \tag{25}$$

这便是当半锥角 α 为非无穷小量时可能引起的误差，它反映出了经典圆锥补偿算法所无法超越的极限精度。

为了获得 α 与误差 $\tilde{\varepsilon}$ 之间的更为简洁关系式，将式（25）用泰勒级数展开，并将式（24）代入，近似得

$$\tilde{\varepsilon}' \approx (\frac{1}{8}\alpha^4 - \frac{1}{48}\alpha^6 + \ldots)(\frac{1}{6}{\lambda_N}^3 - \frac{1}{120}{\lambda_N}^5 + \ldots) - \frac{1}{12}\alpha^2{\lambda_N}^2(\frac{1}{4}\alpha^2 - \frac{1}{24}\alpha^4 + \ldots)(\lambda_N - \frac{1}{6}{\lambda_N}^3 + \ldots) \approx \frac{7}{2880}\alpha^4{\lambda_N}^5 \tag{26}$$

例如，取圆锥误差补偿周期 T =0.01 s，半锥角 α =0.1°、1°、10° 三种情况。当锥运动频率 f 从 1 Hz 到 50 Hz 时（虽然推导式（24）过程中假设了 λ_N 为小量，但是仿真时将其拓展到了较大值的情形），各种剩余误差估计曲线如图 1 所示。从图 1 中可以看出，$\tilde{\varepsilon}$ 与 $\tilde{\varepsilon}'$ 比较接近，表明推导式（26）的简化过程是合理正确的，然而特别在子样数比较大并且圆锥频率比较低时，经典剩余误差估计曲线 ε_N 高于极限精度 $\tilde{\varepsilon}$ 好几个数量级，从前面分析过程可知，此时的 ε_N 估计是不准确的，或者说，经典剩余误差估计过于理想化了，它只能在半锥角无穷小时成立，因而在实际工程中应用价值受到限制。显而易见，在一定半锥角和圆锥频率条件下，由于极限精度的存在，当极限精度产生限制作用时，提高圆锥误差补偿精度的唯一途径是缩短圆锥补偿周期，而不能简单地通过增加子样数来实现。

3.2　等效旋转矢量周期项误差的影响

近似理论等效旋转矢量式（13）中的 $\boldsymbol{\Phi}_m$ 与陀螺总角增量式（11）中的 $\Delta\boldsymbol{\theta}_m$ 在 y 和 z 轴分量上完全一致，但是从子样叉乘式（17）可以看出，经过圆锥补偿后，不管是与式（13）相比还是与式（8）相比，计算等效旋转矢量 $\Delta\boldsymbol{\theta}_m + \delta\hat{\boldsymbol{\Phi}}_m$ 在 y 和 z 轴上都存在周期性误差，因而将在这两个轴上引起周期性姿态误差。仿真发现，除 y 和 z 轴上周期性误差外，在 x 轴上还会出现常值漂移误差，欲通过公式推导的方法分析计算等效旋转矢量周期性误差对圆锥误差补偿中常值漂移的影响存在很大的困难，因此，本文只能采用仿真方法来说明其影响。

在一个圆锥补偿周期内，理论的等效旋转矢量为式（8）中的 $\boldsymbol{\Phi}(t_{m-1}, t_m)$，而通过角增量采样进行圆锥误差补偿后

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

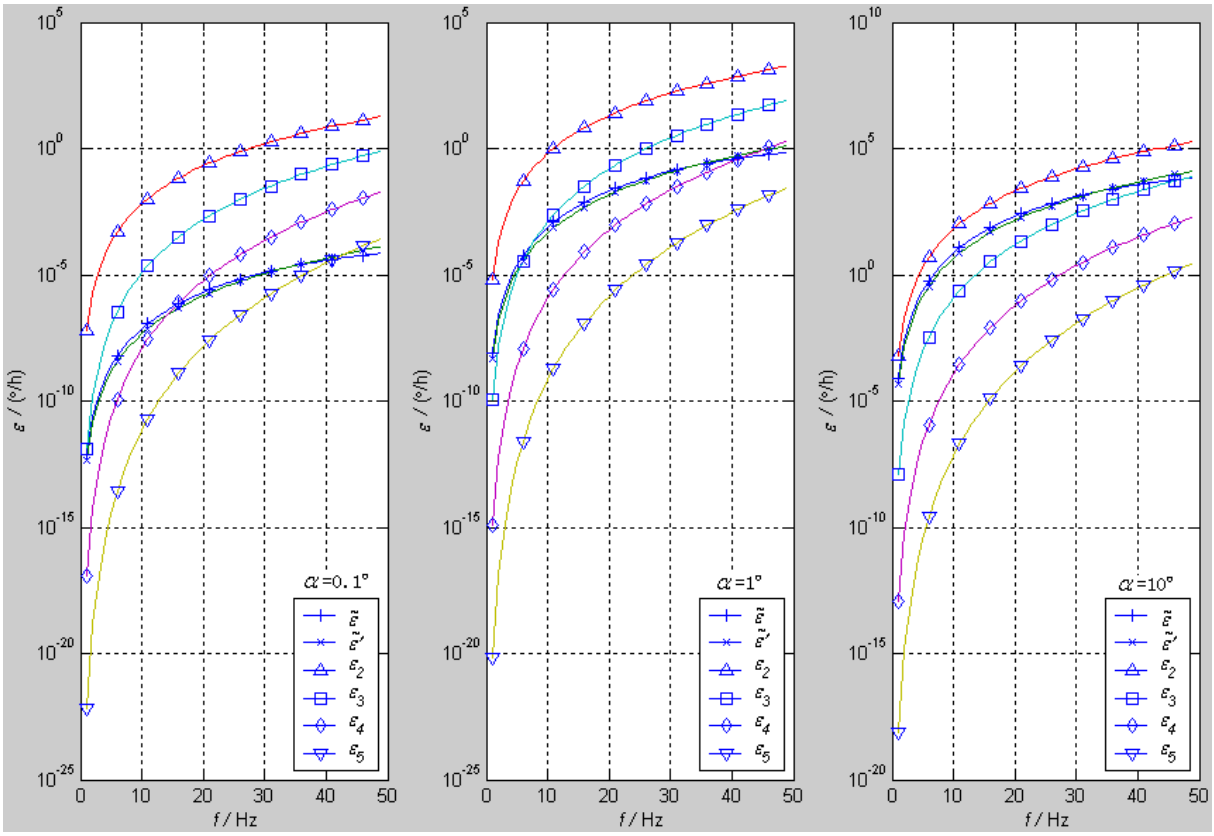


图 1 不同半锥角下剩余误差估计曲线

Fig.1 Coning compensation algorithm errors vs coning angular amplitudes

的计算等效旋转矢量为

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t_{m-1},t_m)=\Delta\boldsymbol{\theta}_m+\delta\hat{\boldsymbol{\Phi}}_m \tag{27}$$

仿真时对 $\boldsymbol{\Phi}(t_{m-1},t_m)$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t_{m-1},t_m)$ 的各分量进行重新组合，构造两种新的等效旋转矢量如下：

$$\boldsymbol{\Phi}'(t_{m-1},t_m)=\begin{bmatrix}\Phi_x(t_{m-1},t_m)\\ \hat{\Phi}_y(t_{m-1},t_m)\\ \hat{\Phi}_z(t_{m-1},t_m)\end{bmatrix},\qquad \hat{\boldsymbol{\Phi}}'(t_{m-1},t_m)=\begin{bmatrix}\hat{\Phi}_x(t_{m-1},t_m)\\ \Phi_y(t_{m-1},t_m)\\ \Phi_z(t_{m-1},t_m)\end{bmatrix} \tag{28}$$

也就是说，$\boldsymbol{\Phi}'(t_{m-1},t_m)$ 的 x 轴分量是理论值，y 和 z 轴分量是利用圆锥误差补偿方法构造的；而 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}'(t_{m-1},t_m)$ 的 x 轴分量是利用圆锥误差补偿方法构造的，y 和 z 轴分量是理论值。若按经典圆锥误差补偿估计理论作判断，以 $\boldsymbol{\Phi}'(t_{m-1},t_m)$ 进行姿态更新不会在 x 轴产生常值漂移误差，而 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}'(t_{m-1},t_m)$ 造成的漂移与 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t_{m-1},t_m)$ 是相同的。但是，实际仿真剩余误差曲线如图 2 所示，其中 T =0.01 s，半锥角 α =1°，圆锥误差补偿选择为三子样算法，锥运动频率 f 从 1 Hz 到 50 Hz 变化，利用 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}(t_{m-1},t_m)$ 、$\boldsymbol{\Phi}'(t_{m-1},t_m)$ 、$\hat{\boldsymbol{\Phi}}'(t_{m-1},t_m)$ 进行姿态更新对应的剩余误差曲线分别为 $\hat{\varepsilon}_3$ 、ε_3' 和 $\hat{\varepsilon}_3'$ 。从图 2 中可以看出，当圆锥频率比较小时，即使等效旋转矢量 $\boldsymbol{\Phi}'(t_{m-1},t_m)$ 的 x 轴设成理论值，其剩余误差 ε_3' 与真实仿真误差 $\hat{\varepsilon}_3$ 一致，但比经典估计值 ε_3 大得多，反而是 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}'(t_{m-1},t_m)$ 对应的误差

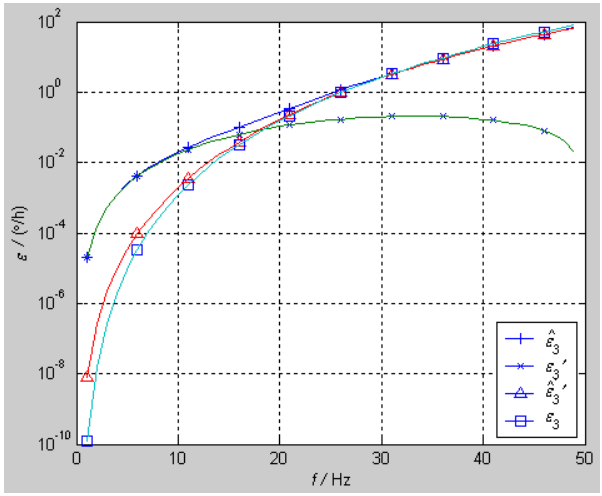


图 2 不同等效旋转矢量构造方式下剩余误差估计曲线

Fig.2 Coning compensation algorithm errors under various equivalent rotation vectors

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\hat{\varepsilon}_3'$ 与 ε_3 更为接近。当锥运动频率增大时，ε_3' 误差相对较小，表明 $\boldsymbol{\Phi}'(t_{m-1},t_m)$ 对高频段的适应性好。仿真结果充分说明了等效旋转矢量周期项误差对圆锥误差补偿是有影响的。

4 结 论

在经典圆锥误差补偿算法中，以等效旋转矢量误差的非周期项最小为准则确定补偿系数。本文进一步考虑了半锥角非无限小量的影响，提出了一种新的圆锥漂移剩余误差估计参考公式。仿真结果表明，等效旋转矢量误差的周期项也影响圆锥漂移误差的估计。本文的研究显示了传统的剩余误差估计公式过于理想化，随着子样数和半锥角的增大估计偏差越大，应当慎用。事实上，在工程应用中研究过高的算法精度意义不大，天文观测表明，太阳绕银河系中心的转动角速率量级约为0.005 (″)/a≈1.6×10^{-10}(°)/h，因此若选择太阳系为准惯性坐标系则意味着算法精度不必高于10^{-10}(°)/h量级。此外，只有高精度的陀螺仪才需要高精度的捷联姿态算法与之匹配，实际系统中恶劣的角运动环境往往对高精度陀螺造成很大负面影响，作者认为构建平台惯导系统反而比捷联系统性价比更高，前者能有效隔离角运动的不利影响，充分发挥陀螺的高精度性能优势，相比而言平，实体平台结构的复杂性在整个系统中就不显突出了，目前，世界上实用的最高精度惯导系统/稳定平台无一例外的都采用平台系统结构。利用对偶性原理，可将圆锥误差补偿研究成果推广至划船误差补偿；同理可知，经典的划船误差算法研究中也存在精度高估的问题。

参考文献(References)：

[1] Bortz J E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971, 7(1): 61−66.

[2] Miller R B. A new strapdown attitude algorithm[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1983, 6(4): 287−291.

[3] Jiang Y F, Lin Y P. Improved strap-down coning algorithm[J]. IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, 1992, 28(2): 484−490.

[4] Park C G, KimK J , Lee J G, et al. Formalized approach to obtaining optimal coefficients for coning algorithms[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(1): 165−168.

[5] Ignagni M B. Efficient class of optimized coning compensation algorithms[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1996, 16(2): 424−429.

[6] 王养柱，崔中兴. 捷联惯导系统圆锥补偿算法优化设计[J]. 中国惯性技术学报，2000，8(1)：7−10.
WANG Yang-zhu, CUI Zhong-xing. Optimal design for coning algorithms of SINS[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2000, 8(1): 7−10.

[7] 曾庆化，刘建业，赵伟. 激光捷联惯导系统角增量输入姿态算法[J]. 南京航空航天大学学报，2007，39(2)：143−148.
ZENG Qing-hua, LIU Jian-ye, ZHAO Wei, Attitude algorithm with incremental angle of RLG SINS [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, 2007, 39(2): 143−148.

[8] Mark J G, Tazartes D A. Tuning of coning algorithms to gyro data frequency response characteristics[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(4): 641−647.

[9] 潘献飞，吴文启，吴美平. 考虑机抖激光陀螺信号滤波特性的圆锥算法修正[J]. 中国惯性技术学报，2007，15(3)：259−264.
PAN Xian-fei, WU Mei-ping, WU Wen-qi. Correction of coning algorithms considering the RLG signal filter characteristics [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2007, 15(3): 259−264.

[10] 潘献飞，吴文启，吴美平，等. 一种对估定频率运动优化的圆锥算法[J]. 中国惯性技术学报，2008，16(1)：20−23.
PAN Xian-fei, WU Mei-ping, WU Wen-qi, et al. Optimization coning algorithms to the fixed frequency motion[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(1): 20−23.

[11] 祝燕华，刘建业，曾庆化，等. 等效旋转矢量系数优化的参数解析法[J]. 中国惯性技术学报，2008，16(1)：49−53.
ZHU Yan-hua, LIU Jian-ye, ZENG Qing-hua, et al. Parameter analysis method for optimizing rotation vector[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008,16(1): 49−53.

[12] 魏小莹，林玉荣，邓正隆. 光纤陀螺捷联姿态算法的改进研究[J]. 中国惯性技术学报，2005，13(2)：70−74.
WEI Xiao-ying, LIN Yu-rong, DENG Zheng-long. Improved attitude algorithm of strapdown system based on FOG[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2005, 13(2): 70−74.

[13] 黄昊，邓正隆. 旋转矢量航姿算法的一种新的表达式[J]. 宇航学报，2001，22(3)：92−98.
HUANG Hao, DENG Zheng-long. A new expression for rotation vector attitude algorithm[J]. Journal of Astronautics, 2001, 22(3): 92−98.

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

文章编号:1001-506X(2009)03-0634-04

一种适用于 SINS 动基座初始对准的新算法

严恭敏[1],秦永元[2],卫育新[3],张立川[1],徐德民[1,4],严卫生[1,4]
(1. 西北工业大学航海学院,陕西 西安 710072;2. 西北工业大学自动化学院,
陕西 西安 710072;3. 航天时代电子仪器公司第 16 研究所,陕西 西安 710100;
4. 水下信息处理与控制国家级重点实验室,陕西 西安 710072)

摘 要:在运载体运动情况下,提出了一种适用于捷联惯导系统(SINS)初始对准的新算法,该算法以惯性空间为过渡参考基准,即建立了初始时刻惯性坐标系(i_0 系)和初始时刻捷联惯组惯性坐标系(i_{b0} 系)两个惯性坐标系。将捷联惯组坐标系(b 系)与导航坐标系(n 系)之间的初始对准姿态矩阵的实现分解为三步骤:(1) 通过地理位置和初始对准时间求解 i_0 系至 n 系的变换矩阵;(2) 通过惯导比力方程变形,引入测速仪速度辅助,求解从 i_{b0} 系至 i_0 系的常值变换矩阵;(3) 使用姿态更新算法实时计算 b 相对于 i_{b0} 系的变换矩阵。最后,载车运动环境下的初始对准试验结果表明航向角对准精度达到了 0.1°(1σ)。

关键词:捷联惯导系统;运动基座;初始对准;惯性坐标系;载车试验
中图分类号:V 249.3 **文献标志码**:A

New initial alignment algorithm for SINS on moving base

YAN Gong-min[1], QIN Yong-yuan[2], WEI Yu-xin[3],
ZHANG Li-chuan[1], XU De-min[1,4], YAN Wei-sheng[1,4]
(1. Coll. of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an 710072, China;
2. Dept. of Automation Control, Northwestern Polytechnical Univ., Xi'an 710072, China;
3. The 16th Inst., China Aerospace Times Electronics Corporation, Xi'an 710100, China;
4. National Key Lab. for Underwater Information Process & Control, Xi'an 710072, China)

Abstract: On the moving base, a new initial alignment algorithm for strapdown inertial navigation system (SINS) is proposed. In this algorithm, two special inertial frames, the initial-time inertial frame (i_0 frame) and the initial-time SINS body inertial frame (i_{b0} frame), are defined and are selected as transition reference frames. The calculation of initial alignment direction cosine matrix (DCM) between SINS body frame (b frame) and navigation reference frame (n frame) is expanded into three parts: (1) the DCM between i_0 frame and n frame is easily obtained via local geographical coordinates and initial alignment time; (2) by expressing SINS specific force equation in b frame and by the aid of external velocity log, the constant DCM from i_{b0} frame to i_0 frame is achieved; (3) attitude updating using gyro samples gets the DCM between b frame and i_{b0} frame. In the end, some vehicular tests are carried out on the moving base and the accuracy of azimuth reaches about 0.1°(1σ).

Keywords: SINS; moving base; initial alignment; inertial frame; vehicular test

0 引 言

捷联惯导系统初始对准通常可分为粗对准和精对准两个阶段。在精对准阶段,通过失准角误差模型,利用导航速度误差估计并校正失准角,获得准确的姿态矩阵。建立失准角误差模型可以是线性的,也可以是非线性的,失准角的估计方法多种多样[1-4]。但是这些估计方法都是假设在具备初始粗略姿态矩阵的基础上进行的。初始粗略姿态矩阵的获取可以人工装订或由捷联惯组利用对地球自转角速率和重力加速度的测量自主确定。由于地球自转角速率很小,自主确定初始姿态矩阵时,在运载体晃动干扰或者运动环境下,传统初始粗对准误差很大,甚至不可用。如何使捷

收稿日期:2007-09-05; **修回日期**:2008-01-28。
基金项目:水下信息处理与控制国家级重点实验室基金(9140C230206070C2306);中国博士后科学基金(20070420215)资助课题
作者简介:严恭敏(1977-),男,博士后,主要研究方向为捷联惯导技术与组合导航系统理论研究。E-mail:yangongmin@163.com

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

联惯导系统在晃动或运动条件下完成初始对准,是一个非常值得研究的课题[5-7],特别在文献[5]中提出了舰船在系泊状态下的初始对准算法,方法比较巧妙。本文在文献[5]的基础上,进一步考虑了运载体线运动的影响,提出一种初始对准新算法,算法以惯性空间为参考基准,并通过外测速度辅助,从而使捷联惯导系统具备在动基座条件下实现初始对准的能力。最后,进行了载车运动环境下的试验验证,试验结果表明了所提算法的正确性。

1　坐标系定义

文中所涉及到的坐标系概略介绍如下:

(1) 地心惯性坐标系(i 系):ox_i 轴在赤道平面内且指向春分点,oz_i 轴指向地球自转方向,三轴构成右手坐标系;

(2) 地球坐标系(e 系):ox_e 轴在赤道平面内且指向中央子午线,oz_e 轴沿地球自转方向,三轴构成右手坐标系;

(3) 选取"东 - 北 - 天"坐标系为导航坐标系(n 系);

(4) 定义"右 - 前 - 上"坐标系为捷联惯组坐标系(b 系);

(5) 初始时刻惯性坐标系(i_0 系):在初始对准起始时刻(即当 $t = t_0 = 0$ 时),ox_{i0} 轴在当地子午面内且平行于赤道平面,oz_{i0} 轴指向地球自转方向,三轴构成右手坐标系,初始对准开始后 i_0 系三轴方向相对惯性空间保持不动;

(6) 初始时刻地球坐标系(e_0 系):原点为地球中心,ox_{e0} 轴在赤道平面内且指向当地子午线,oz_{e0} 沿地球自转方向,三轴构成右手坐标系;

(7) 初始时刻导航坐标系(n_0 系):把初始对准开始时刻的导航坐标系定义为 n_0 系,它相对地球表面固定不动,即不随捷联惯组在地球表面运动而运动;

(8) 初始时刻捷联惯组惯性坐标系(i_{b0} 系):在 t_0 时刻 i_{b0} 系重合于 b 系,初始对准开始后 i_{b0} 系不随捷联惯组转动,即在惯性空间中保持指向不变。

2　静基座下传统解析式初始对准算法

捷联惯组静止时,加速度计的比力输出 f_{sf}^b 测量的是重力加速度矢量 g 在 b 系中的投影 $-\mathrm{g}^b$,陀螺角速度输出 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 测量的是地球自转角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_{ie}$ 在 b 系中的投影 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^b$。当对准地点的地理位置准确已知时,物理量 g 和 $\boldsymbol{\omega}_{ie}$ 在 n 系中的投影 g^n 和 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ 也是已知的。由姿态矩阵 C_b^n 可建立如下两个转换关系式

$$-\mathrm{f}_{sf}^b = \mathrm{C}_n^b \mathrm{g}^n \text{ 和 } \boldsymbol{\omega}_{ib}^b = \mathrm{C}_n^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \tag{1}$$

式中,$\mathrm{g}^n = [0 \quad 0 \quad -g]^{\mathrm{T}}$,$g$ 为重力加速度大小;$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = [0 \quad \omega_{ie}\cos L \quad \omega_{ie}\sin L]^{\mathrm{T}}$,$L$ 为当地纬度,ω_{ie} 为地球自转角速率。通过式(2)可求得初始对准姿态矩阵 C_b^n。

$$\mathrm{C}_b^n = \begin{bmatrix} (\mathrm{g}^n)^{\mathrm{T}} \\ (\mathrm{g}^n \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^n)^{\mathrm{T}} \\ (\mathrm{g}^n \times \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathrm{g}^n)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (-\mathrm{f}_{sf}^b)^{\mathrm{T}} \\ (-\mathrm{f}_{sf}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b)^{\mathrm{T}} \\ (\mathrm{f}_{sf}^b \times \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times \mathrm{f}_{sf}^b)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{2}$$

由于加速度计和陀螺测量存在噪声,通常采用一段时间内测量值取平均和姿态矩阵最优正交化等方法提高初始对准精度。可以证明上述对准方法达到了捷联惯导系统静基座初始对准的极限精度[8-9]。

3　动基座初始对准算法

初始对准姿态矩阵 C_b^n 可用如下两个矩阵相乘形式表述

$$\mathrm{C}_b^n = \mathrm{C}_{i_0}^n \mathrm{C}_b^{i_0} \tag{3}$$

式中

$$\mathrm{C}_{i_0}^n = \mathrm{C}_{n_0}^n \mathrm{C}_{e_0}^{n_0} \mathrm{C}_{i_0}^{e_0} = \mathrm{C}_e^n (\mathrm{C}_e^{n_0})^{\mathrm{T}} \mathrm{C}_{e_0}^{n_0} \mathrm{C}_{i_0}^{e_0} \tag{4}$$

其中,C_e^n、$\mathrm{C}_e^{n_0}$ 和 $\mathrm{C}_{e_0}^{n_0}$ 可由运载体所在点的经度和纬度求得,$\mathrm{C}_{i_0}^{e_0}$ 可由初始对准时间 t 实时确定,即

$$\mathrm{C}_e^n = \begin{bmatrix} -\sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ -\sin L\cos\lambda & -\sin L\sin\lambda & \cos L \\ \cos L\cos\lambda & \cos L\sin\lambda & \sin L \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C}_e^{n_0} = \begin{bmatrix} -\sin\lambda_0 & \cos\lambda_0 & 0 \\ -\sin L_0\cos\lambda_0 & -\sin L_0\sin\lambda_0 & \cos L_0 \\ \cos L_0\cos\lambda_0 & \cos L_0\sin\lambda_0 & \sin L_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C}_{e_0}^{n_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sin L_0 & 0 & \cos L_0 \\ \cos L_0 & 0 & \sin L_0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C}_{i_0}^{e_0} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_{ie}t) & \sin(\omega_{ie}t) & 0 \\ -\sin(\omega_{ie}t) & \cos(\omega_{ie}t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

式中,λ_0 和 L_0 分别为对准起始 t_0 时刻捷联惯组的经度和纬度,λ 和 L 分别为初始对准 t 时刻的实时经度和纬度,将式(5)代入式(4),经过合并整理,容易得

$$\mathrm{C}_{i_0}^n = \begin{bmatrix} -\sin(\delta\lambda + \omega_{ie}t) & \cos(\delta\lambda + \omega_{ie}t) & 0 \\ -\sin L\cos(\delta\lambda + \omega_{ie}t) & -\sin L\sin(\delta\lambda + \omega_{ie}t) & \cos L \\ \cos L\cos(\delta\lambda + \omega_{ie}t) & \cos L\sin(\delta\lambda + \omega_{ie}t) & \sin L \end{bmatrix} \tag{6}$$

式中,$\delta\lambda = \lambda - \lambda_0$。求得矩阵 $\mathrm{C}_{i_0}^n$ 之后,姿态矩阵 C_b^n 的实现就

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

转换为求解 $C_b^{i_0}$ 了，$C_b^{i_{t0}}$ 表示捷联惯组相对于初始时刻惯性空间的变换矩阵。至此，将相对于导航坐标系的初始对准姿态矩阵 C_b^n 求解问题转化为了以惯性空间为参考基准的变换矩阵 $C_b^{i_{t0}}$ 求解问题。进一步的，可将 $C_b^{i_0}$ 拆写成

$$C_b^{i_0} = C_{i_{t0}}^{i_0} C_b^{i_{t0}} \tag{7}$$

在式(7)中，利用陀螺输出的角运动信息，通过捷联惯导姿态更新算法式(8)可以很容易求得矩阵 $C_b^{i_{t0}}$，即

$$\dot{C}_b^{i_{t0}} = C_b^{i_{t0}} (\omega_{0b}^b \times) \tag{8}$$

式中，$(\omega_{0b}^b \times)$ 表示由陀螺测量输出 $\omega_{0b}^b = \omega_b^b$ 构成的反对称矩阵，并且有矩阵初值 $C_b^{i_{t0}}(t_0) = I_{3\times 3}$。

求解式(7)的关键在于求解变换矩阵 $C_{i_{t0}}^{i_0}$，易知它是一个常值阵，可由捷联惯导比力方程式(9)通过适当的变形后求得。

$$\dot{v}^n = f_{sf}^n - (\omega_{in}^n + \omega_{ie}^n) \times v^n + g^n \tag{9}$$

以下详细叙述变换矩阵 $C_{i_{t0}}^{i_0}$ 的求解过程。首先，将惯导比力方程式(9)改写成

$$\dot{v}^n + (\omega_{in}^n + \omega_{ie}^n) \times v^n - f_{sf}^n = g^n \tag{10}$$

由等式 $v^n = C_b^n v^b$ 两边求导，并考虑到 $\dot{C}_b^n = C_b^n (\omega_{nb}^b \times)$，得 $\dot{v}^n = C_b^n (\dot{v}^b + \omega_{nb}^b \times v^b)$。因此，可将式(10)写成

$$C_b^n (\dot{v}^b + \omega_{nb}^b \times v^b) + C_b^n [(\omega_{in}^b + \omega_{ie}^b) \times v^b] - C_b^n f_{sf}^b = g^n \tag{11}$$

化简为

$$C_b^n [\dot{v}^b + (\omega_{ib}^b + \omega_{ie}^b) \times v^b - f_{sf}^b] = g^n \tag{12}$$

或者

$$\dot{v}^b + (\omega_{ib}^b + \omega_{ie}^b) \times v^b - f_{sf}^b = g^b \tag{13}$$

易见式(10)和式(13)在形式上是完全相同的。将式(12)两边左乘以 $C_n^{i_{t0}}$，即在 i_{t0} 系上投影得

$$C_b^{i_{t0}} (\dot{v}^b + \omega_{ib}^b \times v^b + \omega_{ie}^b \times v^b - f_{sf}^b) = C_{i_0}^{i_{t0}} C_n^{i_0} g^n \tag{14}$$

式中，v^b 是捷联惯组对地速度在 b 系上的投影，可借助于外界测速仪测量再经过适当杆臂补偿后获得。值得指出的是，在初始对准完成之前 ω_{ie}^b 是未知的，当运载体速度为 10 m/s时，式(14)中 $\omega_{ie}^b \times v^b$ 的量级最大约为 7.3×10^{-5} g，大致与惯性级加速度计测量误差同量级；另外，在矩阵 $C_n^{i_0}$ 中，初始对准时若捷联惯组发生移动且无法获取实时的位置信息，则只能近似以初始经纬度代替之，即以 $C_{i_0}^{i_0}$ 代替 $C_n^{i_0}$。通过上述两点简化后，式(14)转化为

$$C_b^{i_{t0}} (\dot{v}^b + \omega_{ib}^b \times v^b - f_{sf}^b) \approx C_{i_0}^{i_{t0}} C_{n_0}^{i_0} g^n \tag{15}$$

为了降低测速仪和加速度计测量干扰的影响，将上式两边积分得

$$v_t^{i_{t0}} = C_{i_0}^{i_{t0}} u_t^{i_0} \tag{16}$$

式中，记 $v_t^{i_{t0}} = \int_0^t C_b^{i_{t0}} (\dot{v}^b + \omega_{ib}^b \times v^b - f_{sf}^b) \mathrm{d}t$，$u_t^{i_0} = \int_0^t C_{n_0}^{i_0} g^n \mathrm{d}t$，这两个积分式均很容易求得，这里不再赘述。在式(16)中，分别取 $t = t_l$ 和 $t = t_m$ 两个不同时刻，则有 $v_{t_l}^{i_{t0}} = C_{i_0}^{i_{t0}} u_{t_l}^{i_0}$ 和 $v_{t_m}^{i_{t0}} = C_{i_0}^{i_{t0}} u_{t_m}^{i_0}$，再利用同式(2)一样的算法可立即求得常值矩阵 $C_{i_{t0}}^{i_0}$，即

$$C_{i_{t0}}^{i_0} = \begin{bmatrix} (u_{t_l}^{i_0})^{\mathrm{T}} \\ (u_{t_l}^{i_0} \times u_{t_m}^{i_0})^{\mathrm{T}} \\ (u_{t_l}^{i_0} \times u_{t_m}^{i_0} \times u_{t_l}^{i_0})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} (v_{t_l}^{i_{t0}})^{\mathrm{T}} \\ (v_{t_l}^{i_{t0}} \times v_{t_m}^{i_{t0}})^{\mathrm{T}} \\ (v_{t_l}^{i_{t0}} \times v_{t_m}^{i_{t0}} \times v_{t_l}^{i_{t0}})^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{17}$$

综上所述，动基座初始对准算法中将初始对准姿态矩阵 C_b^n 的实现分解成 $C_{i_0}^n$、$C_b^{i_{t0}}$ 和 $C_{i_{t0}}^{i_0}$ 三部分，它们均以惯性坐标系作为参考基准，因此能有效解决角运动和线运动的影响。

4 载车试验

2007 年 7 月 16 日—18 日在西安市航天时代电子仪器公司第 16 研究所附近进行了动基座初始对准试验，试验设备主要包括：激光捷联惯组、里程计、GPS 接收机、载车、导航计算机及相关电源等，其中激光陀螺漂移约为 0.007 °/h，加速度计零偏约为 5×10^{-5} g，里程计输出脉冲当量为 0.081 94 m/脉冲，GPS 定位精度约为 10 m。里程计测量经过适当处理后为动基座初始对准提供速度输入，利用 GPS 位置信息装订对准的初始位置。若要在载车运动中实时考察动基座初始对准的精度存在比较大的困难，因此，文中设计了如下的动基座初始对准试验方案：

(1) 捷联惯组预热准备好后，启动载车进入行驶状态；

(2) 在载车运动条件下运行动基座初始对准程序，对准过程中载车不停，平均行驶速度约为 5 m/s，初始对准至大约 10 min 时结束对准；

(3) 动基座初始对准结束后，立即以对准结果建立初始姿态矩阵进行纯惯性导航，进入姿态跟踪，再在短时间内停止载车，保持载车不动，记录下捷联惯组的俯仰角 θ_1、横滚角 γ_1 和航向角 ψ_1，把它们当作动基座初始对准的结果；

(4) 保持载车不动，在载车静止条件下进行一次 5 min 静基座初始对准，记录静基座初始对准结果 θ_2、γ_2 和 ψ_2，以其作为动基座对准的比较参考。

共进行了六组试验，结果如表 1 所示。在其它试验中已经测得该套惯组的静基座初始对准航向精度优于 2′，因此可以认为表 1 中航向角误差 $\psi_1 - \psi_2$ 项主要是由动基座初始对准引起的，经计算 $\psi_1 - \psi_2$ 的均方差约为 0.1°(1σ)。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 1　初始对准试验结果

组别	动基座对准/°			静基座对准/°			误差/°		
	θ_1	γ_1	ψ_1	θ_2	γ_2	ψ_2	$\theta_1-\theta_2$	$\gamma_1-\gamma_2$	$\psi_1-\psi_2$
1	-0.791	0.989	50.924	-0.765	0.988	50.839	-0.026	0.001	0.085
2	-0.651	1.296	263.884	-0.625	1.282	263.727	-0.026	0.014	0.157
3	-0.908	0.589	51.985	-0.926	0.551	52.038	0.018	0.038	-0.053
4	-0.010	0.808	263.359	0.019	0.805	263.181	-0.029	0.003	0.178
5	-0.753	0.589	50.934	-0.730	0.597	51.016	-0.023	-0.080	-0.082
6	0.641	0.803	265.131	0.634	0.780	265.052	0.007	0.023	0.079

5　结束语

为了消除运载体运动带来的角速度和加速度影响,动基座初始对准算法以惯性空间为参考基准,将初始对准姿态矩阵 C_b^n 的实现分解成 $C_{i_0}^n$、$C_{b^{i_{t0}}}^{i_{t0}}$ 和常值矩阵 $C_{i_{t0}}^{i_0}$ 三部分:$C_{i_0}^n$ 可由运载体地理位置和初始对准时间确定;利用陀螺测量输出求解矩阵 $C_b^{i_{t0}}$;经过惯导比力方程的变换,利用测速仪测量、加速度计输出和重力加速度在 i_{t0} 系和 i_0 系间的变换关系求取 $C_{i_{t0}}^{i_0}$。载车试验表明文中提出的动基座捷联惯导系统初始对准算法具有较高的对准精度。

参考文献:

[1] 程向红,郑梅. 捷联惯导系统初始对准中 Kalman 参数优化方法[J]. 中国惯性技术学报, 2006,14(4):12-17.

[2] 丁杨斌,王新龙,王缜,等. Unscented 卡尔曼滤波在 SINS 静基座大方位失准角初始对准中的应用研究[J]. 宇航学报, 2006, 27(6):1201-1204.

[3] 杨亚非,谭久彬,邓正隆. 惯导系统初始对准技术综述[J]. 中国惯性技术学报, 2002,10(2): 68-72.

[4] 朱绍箕. 惯导系统动基座对准技术评述[J]. 战术导弹控制技术, 2004,3:46-49.

[5] 秦永元,严恭敏,顾冬晴,等. 摇摆基座上基于 g 信息的捷联惯导粗对准研究[J]. 西北工业大学学报, 2005,23(5):681-684.

[6] Miao Lingjuan, Shen Jun, Liu Wei, et al. Initial alignment technique for SINS of vehicles in the moving state[J]. *Journal of Beijing Institute of Technology*, 2002,11(3):234-239.

[7] 严恭敏,秦永元,马建萍. 车载导航系统动态高精度初始对准技术[J]. 系统工程与电子技术, 2006,28(9): 1404-1407. (Yan Gongmin, Qin Yongyuan, Ma Jianping. High precision dynamic initial alignment technique for vehicular vehicular navigation system[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2006, 28(9): 1404-1407.)

[8] Jiang Y F. Error analysis of analytic coarse alignment methods [J]. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 1998, 34(1):334-337.

[9] 陈令刚,刘建业,孙永荣,等. 微小型捷联惯导系统解析式对准方法研究[J]. 航天控制, 2005, 23(4):9-12.

(上接第 628 页)

4、7 看出,初始静态时 6 态 EKF 对陀螺零偏和姿态角的估计很好,但转动时受机动加速度的影响明显,其中横滚角误差最大达到 30°;由图 2、3、5、8 看出,无论在动静态,9 态 EKF 对载体机动加速度估计效果显著,同时对由于安装误差等因素引起的转动时陀螺零偏的变化也进行了很好的估计,由此得到的俯仰、横滚和航向角与纯捷联算法相比,横滚角和俯仰角在小于 1 度的范围内波动,精度更高。由于转台在突起和突停时加速度变化剧烈,导致短时内 9 态 EKF 姿态误差较大,但在实际情况加速度不会如此剧烈变化,姿态误差相应会较小。

5　结束语

低精度航姿系统在无人机、直升机等军用领域和车辆导航等民用领域内应用前景广泛,现有的滤波方法在载体长时间机动时不能保持一定的姿态精度。本文对载体机动加速度采用当前统计模型,提出了以姿态角误差、陀螺零偏误差和机动加速度误差为状态变量的 9 态扩展卡尔曼滤波器,观测量为载体系内三轴加速度误差和三轴磁场误差。转台离心实验表明,在向心加速度达到 0.6 g 时,6 态 EKF 姿态已经发散,而 9 态 EKF 仍能迅速将姿态精度保持在 1° 以内,这对于低精度航姿系统在长时间、大机动条件下的应用具有较好的实际意义。

参考文献:

[1] Zhu Rong, Sun Dong, Zhou Zhaoying, et al. A linear fusion algorithm for attitude determination using low cost MEMS-based sensors[J]. *Measurement*, 2007, 40(3):322-328.

[2] Gao Zhongyu, Niu Xiaoji, Guo Meifeng. Quaternion-based kalman filter for micro-machined strapdown attitude heading reference system [J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2002, 15(3):1-5.

[3] Wang Mei, Yang Yunchun, Ronald R H, et al. Adaptive filter for a miniature MEMS based attitude and heading reference system[C]. *Record-IEEE PLANS, Position, Location and Navigation Symposium, Piscataway, NJ, IEEE*, 2004: 193-200.

[4] 徐玉,李平,韩波. 一种面向机动的低成本姿态测量系统[J]. 传感技术学报, 2007,20(10): 2272-2275.

[5] Zhou Hongren, Kumar K S P. A current statistical model and adaptive algorithm for estimating maneuvering targets [J]. *AIAA, Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1984, 7(5):596-602.

[6] Farrell J A, Barth M. The global positioning system and inertial navigation[M]. *McGraw-Hill*, 1999: 199-202.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

一种在较大初始数学平台误差角下提高 AUV导航精度的新方法

严恭敏[1], 严卫生[1,2], 徐德民[1,2]
(1. 西北工业大学 航海学院, 陕西 西安 710072; 2. 水下信息处理与控制国家级重点实验室, 陕西 西安 710072)

摘 要:如果发射冲击很大或者初始对准时间很短,可能导致自主水下航行器(AUV)中捷联惯导系统(SINS)的初始平台误差角比较大,特别是方位误差角大时,它成为影响 AUV自主导航精度的重要因素。发射后利用捷联惯性测量组件(SIMU)和多普勒测速仪(DVL)的采样输出,同时实施航位推算(DR)和捷联罗经对准(GA)2种算法。当 GA在短时间内水平调平后,直接修正 DR的水平姿态角;当 GA方位对准基本收敛后,计算 GA方位与 DR方位之间的方位误差,并借助于航迹相似性原理修正 DR的方位角和位置,从而提高后续阶段的 AUV导航精度。仿真结果表明,该方法可以修正由初始平台误差角造成的定位误差,但对与 DVL有关的定位误差无效,修正后 AUV定位误差下降到不修正的 19.8%。

关键词:自主水下航行器;捷联惯导系统;多普勒测速仪;航位推算;捷联罗经初始对准
中图分类号: V249.3 **文献标识码**: A **文章编号**: 1673-1948(2009)02-0020-05

A Method to Improve AUV Navigation Accuracy Under Considerable Initial Alignment Errors

YAN Gong-min[1], *YAN Wei-sheng*[1,2], *XU De-min*[1,2]
(1. College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 2. National Key Laboratory for Underwater Information Process and Control, Xi'an 710072, China)

Abstract: For strapdown inertial navigation system (SINS) in autonomous underwater vehicle (AUV), launch shock or insufficient alignment time may result in considerable initial misalignment errors, and the azimuth misalignment error is a major factor to reduce AUV position accuracy. In this paper, dead-reckoning (DR) and strapdown gyro-compass alignment (GA) algorithms are synchronously executed soon after AUV launch using raw data from strapdown inertial measurement unit (SIMU) and Doppler velocity log (DVL). After a short-time of GA level tuning stage, DR level attitudes are corrected to diminish level errors, but DR azimuth is corrected only when GA is convergent during the azimuth adjustment stage. Azimuth error between GA and DR is calculated, and DR position errors can be estimated by the similarity theory of DR course and AUV actual course. Hence, AUV navigation accuracy can be improved. The simulation results show that the proposed method can perfectly correct position errors due to initial misalignment errors, but excluding position errors caused by DVL scale error. In the simulation case, AUV position errors diminish to 19.8% after error compensation.

Key Words: autonomous underwater vihicle (AUV); strapdown inertial navigation system (SINS); Doppler velocity log (DVL); dead-reckoning (DR); gyro-compass initial alignment

收稿日期: 2008-10-28; **修回日期**: 2008-12-07.
基金项目: 中国博士后科学基金 (20070420215), 国防科技重点实验室基金资助项目.
作者简介: 严恭敏 (1977-), 男, 博士后, 主要从事陆用定位定向系统及水下航行器自主导航技术与组合导航系统理论研究.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

0　引言

自主水下航行器（Autonomous Underwater Vehicle, AUV）作为海洋探索和海洋资源开发的重要工具，在军用和民用领域都具有广泛的应用前景，并引起越来越多的关注。

精确导航定位技术是发展远航程 AUV的一项关键技术。惯导系统因其自主性好和导航信息全面等优点，特别是随着捷联惯性技术的发展，使得捷联惯导系统（Strapdown Inertial Navigation System, SINS）成为 AUV导航设备的首选[1~3]，但是其缺点是纯惯导系统的导航误差是随时间而不断积累的。多普勒测速仪（Doppler Velocity Log, DVL）的速度测量误差不随时间增长，它与 SINS之间具有一定的互补性。因此，常用 SINS/DVL/深度传感器组合实现 AUV自主导航，其中深度传感器用来准确测定深度信息。例如，法国 Phins光纤陀螺捷联惯导系统是专为水下航行器设计的先进的导航系统，其导航精度高，可提供航行器方位、姿态、速度及位置等信息，系统还设有 DVL、深度传感器、水下声学定位系统及 GPS等接口，具备多种组合导航方式[4]。

SINS初始对准是实现精确导航的前提，初始对准的 2个重要性能指标是精确性和快速性。如果采用鱼雷发射管的高压空气发射 AUV，发射过程中将可能产生高达十几个 g（重力加速度）长达数百毫秒的强烈冲击，这对 AUV上捷联惯性测量组件（Strapdown Inertial Measurement Unit, SIMU）来说是一个严峻的考验。如果 SINS抗冲击性能不够理想，则即使在发射之前进行了精确对准，发射后也可能出现比较大的数学平台误差（例如 1°误差），特别是方位误差对导航过程中的 AUV定位精度影响比较大，在这种情况下发射之前的精确对准是徒劳的。另外，如果能使 AUV在没有进行精确对准的情况下发射也具备较高的导航精度，将有效缩短初始对准时间，提高 AUV发射系统的机动能力。

为了在较大初始数学平台误差角下提高 AUV的自主导航精度，本文提出了一种解决方法，它的基本原理叙述如下。

如图 1所示，在 AUV发射后进入导航过程中将 SIMU的采样输出数据分成 2份拷贝，其中一份数据拷贝与 DVL组成航位推算（Dead Reckoning, DR）算法，它以刚发射后的数学平台作为初始姿态矩阵进行航位推算，计算 AUV实时姿态矩阵 $\tilde{\boldsymbol{C}}_b^n$，速度 $\tilde{\boldsymbol{v}}^n$ 和位移 $\tilde{\boldsymbol{p}}$，虽然它们含有不小的误差，但是仍然可为动基座捷联罗经初始对准（Gyrocompass Alignment, GA）提供具有一定精度的参考速度；另一份数据拷贝用于动基座捷联罗经初始对准，它也同样以刚发射后的数学平台作为初始姿态矩阵，而参考速度来自于航位推算。由于发射后的平台方位误差比较大，它在 AUV的航位推算过程中始终存在，假设该误差是常值 ϕ_U。当捷联罗经方位对准收敛后，从航位推算姿态矩阵 $\tilde{\boldsymbol{C}}_b^n$ 和罗经对准矩阵 $\boldsymbol{C}_b^n$ 的比较中可以得出方位误差 ϕ_U。由航位推算航迹与真实航迹相似性原理可知，航位推算的位移误差 $\delta\mathrm{p}$ 与方位误差 ϕ_U 及 AUV航行位移都有关，因此，可以由 ϕ_U 和 $\tilde{\boldsymbol{p}}$ 获得 $\delta\mathrm{p}$ 的估计值 $\delta\hat{\mathrm{p}}$，再实施航位推算位移修正，达到提高 AUV自主导航精度的目的。上述分析过程中，与航位推算、罗经对准及位置修正等有关的算法都将在下文中予以详细介绍。

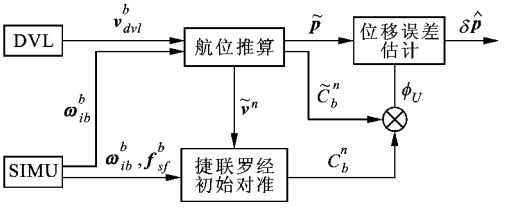


图 1　AUV航位推算位移误差估计基本原理图

Fig. 1　Basic principle of AUV DR error estimation

1　航位推算算法及其误差分析

记地心惯性坐标系为 *i*系；记地球坐标系为 *e*系；选取“东-北-天（E-N-U）”地理坐标系为导航坐标系，记为 *n*系，“右-前-上”坐标系为捷联惯导坐标系（或 AUV坐标系），记为 *b*系。

1.1　航位推算算法

由 DVL与 SIMU中的陀螺采样输出结合可构成航位推算算法，假设 DVL输出速度为 v_{dvl}^b，它是相对于 *b*系投影的速度矢量，则以 v_{dvl}^b 推导的航位推算算法可写成[5]

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\dot{C}_b^n = C_b^n \Omega_{nb}^n \quad (1)$$

$$\dot{v}^n = C_b^n v_{dvl}^b \quad (2)$$

$$\dot{L} = \frac{v_N^n}{R_M + h}, \quad \dot{\lambda} = \frac{v_E^n \sec L}{R_N + h}, \quad \dot{h} = v_U^n \quad (3)$$

式中:$\Omega_{nb}^b = (\omega_{nb}^b \times)$,

$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - (C_b^n)^T(\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n)$,

$\omega_{ie}^n = [0 \quad \omega_{ie}\cos L \quad \omega_{ie}\sin L]^T$,

$\omega_{en}^n = [\frac{-v_N^n}{R_M + h} \quad \frac{v_E^n}{R_N + h} \quad \frac{v_E^n \tan L}{R_N + h}]^T$,

ω_{ib}^b ——陀螺角速度测量,

ω_{ie} ——地球自转角速率大小,

$(\cdot \times)$ ——由向量 $\cdot$ 构成的反对称矩阵;

C_b^n ——航位推算的姿态矩阵;

v^n ——航位推算的速度,$v^n = [v_E^n \quad v_N^n \quad v_U^n]^T$;

L ——航位推算的纬度;

λ ——航位推算的经度;

h ——航位推算的深度;

R_M ——当地地球子午圈半径;

R_N ——当地地球卯酉圈半径。

1.2 航位推算误差分析

如果 AUV航行速度不大 (如 < 40 ～ 50 kn),航位推算的平台误差角 $\phi = [\phi_E \quad \phi_N \quad \phi_U]^T$变化规律可近似为[5]

$$\dot{\phi} = -\omega_{ie}^n \times \phi - C_b^n \varepsilon^b \quad (4)$$

其中,ε^b 为陀螺漂移误差。

更进一步,在陀螺漂移误差不大 (如 0.01 °/h量级)、水平平台误差角 ϕ_E 和 ϕ_N 较小 (如 5′)、而天向平台误差角 ϕ_U 较大 (如 1°) 的条件下,可以在相当长一段时间内将 ϕ_U 看作是常值,在本文后面的仿真中还将看到这种假设是可行的。

假设 AUV航行范围有限 (如在几十海里范围内) 并且忽略深度变化的影响,可近似将 AUV看成在某个平面内运动,如图 2所示。图中,AUV从 P_0 点航行至 P_1 点,但是在 P_1 点时航位推算位置指示为 P_1' 点,也就是说,P是真实位移而 P′是导航位移,令 $\delta P = P' - P$ 为导航位移误差。再假设 AUV平台方位误差 ϕ_U 和 DVL标度因数误差 δK_{dvl} 为均常值,则可推导得航位推算航迹与真实航迹是相似的[6],用矢量之间关系可描述为

$$\delta P = P \times [0 \quad 0 \quad \phi_U]^T + P \cdot \delta K_{dvl} \quad (5)$$

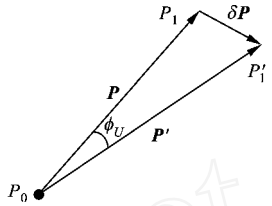


图 2 航位推算及其误差

Fig. 2 DR and its errors

式 (5) 说明导航位移误差由 2项组成,与 ϕ_U 有关的第 1项垂直于 P,而与 δK_{dvl} 有关的第 2项平行于 P。因此,若 δK_{dvl} 未知时只能忽略其影响,并以 P′代替 P,由 ϕ_U 近似估计 δP,得

$$\delta P = P' \times [0 \quad 0 \quad \phi_U]^T \quad (6)$$

最后,使用 δP对 P′航位推算位移进行修正,即可提高 AUV自主导航精度,修正公式如下

$$P = P' - \delta P \quad (7)$$

2 捷联罗经动基座初始对准原理

本节分析动基座捷联罗经初始对准的基本原理,并指出利用航位推算速度作为参考速度时,速度误差对对准精度影响很小,同时,捷联罗经对准对纬度误差也不敏感,因此,罗经对准能够实现比较精确的 AUV方位对准,为估计航位推算方位误差角 ϕ_U 提供了保证。

2.1 动基座捷联罗经初始对准原理

在捷联罗经初始对准中包含 3个回路,分别为水平对准东向通道、北向通道和罗经方位通道。下面主要介绍东向通道,其他 2个通道的原理类似。

在捷联惯导系统中以数学平台模拟平台惯导系统中的实体平台,如图 3中“数学平台”部分所示。C_b^n为捷联姿态矩阵,起数学平台作用;ω_{ib}^b和 f_{sf}^b 分别是陀螺和加速度计的测量;$v_R = [v_{RE} \quad v_{RN} \quad v_{RU}]^T$是外界辅助参考速度,由航位推算系统提供;$\omega_c = [\omega_{cx} \quad \omega_{cy} \quad \omega_{cz}]^T$是施加给数学平台的控制角速率;$f_{sf}^b$经 C_b^n变换后成为数学平台视加速度输出 $f_{sf}^n = [f_{sfx}^n \quad f_{sfy}^n \quad f_{sfz}^n]^T$。

图 3中“控制规律 (东向通道)”部分采用 3阶调平的水平对准方案,R为平均地球半径,K_{x1},K_{x2}和 K_{x3}为控制律的调节参数,可根据对准的精确性和快速性要求设计,它在很多文献中均有介绍[7],

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

此处不再赘述。

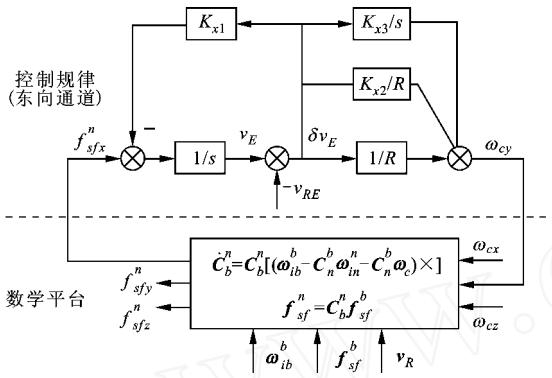


图 3　动基座捷联罗经初始对准东向通道

Fig 3　East control loop for strapdown gyro-compass initial alignment

2 2　参考速度误差对罗经对准的影响

AUV航行的东向速度误差不影响方位对准精度,而北向速度误差分量 δ_{V_N} 影响罗经方位对准精度 ϕ_U,它们之间的关系可以用公式表示成[8]

$$\phi_U = \frac{\delta_{V_N}}{5\pi}\sec L \qquad (8)$$

其中: δ_{V_N} 单位为 kn; ϕ_U 单位为 °。

当 ϕ_U 取 0.1 °×sec$L$ 时,则 δ_{V_N} = 0.1 ×5π ≈ 1.57 kn。

假设 AUV航行速度为 20 kn, DVL相对测速误差为 0.5%,并且航位推算的方位误差为 1 °,则参考速度的最大估计误差为 20 ×[0.5% + sin(1 °)] ≈ 0.45 kn,其可能造成的罗经方位对准误差为 0.45/(5π) ×sec$L$ ≈ 0.03 °×sec$L$,这对于惯性级导航系统而言,参考速度造成的罗经方位对准误差基本可以忽略不计。

2 3　纬度误差对罗经对准的影响

相同的纬度误差造成的罗经方位对准误差随所处纬度的不同而不同,图 4显示的是在 1 °纬度误差下所处纬度与方位误差之间的关系[9]。例如,在纬度 30 °处,假设罗经初始对准过程中纬度误差为 0.1 °,通过图中曲线查得,横坐标 30 °时对应的纵坐标约为 0.03 °,因而可求得纬度误差 0.1 °引起的方位对准误差为 0.1 ×0.03 °×sec (30 °) = 0.003 5 °,如此小的误差完全可以忽略不计。因此,可以直接将航位推算出的纬度作为捷联罗经初始对准的纬度来使用,能够获得较好的初始对准效果。

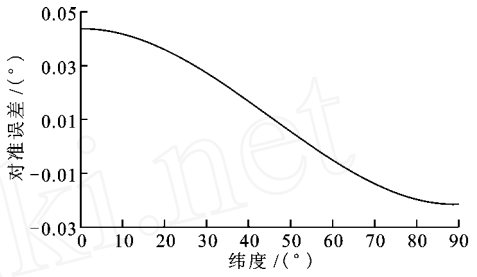


图 4　不同纬度处 1 °纬度误差引起的方位对准误差

Fig 4　Azimuth alignment error induced by one degree of latitude at different latitude positions

3　仿真与分析

设 AUV初始位置为东经 100 °、北纬 20 °,朝北偏东 45 °直线航行(即初始方位角 ψ = 45 °),航行速度为 20 kn,共航行 30 min至位置 P点,真实航迹如图 5中曲线“+”所示,真实方位如图 6中曲线“+”所示。假设 SIMU中陀螺漂移为 0.01 °/h、加速度计零偏为 50 ug, DVL标度因数误差为 0.3%,初始数学平台水平和方位误差角均为 1 °,进行 AUV动基座捷联罗经对准和航位推算仿真,再实施航位推算位置修正,仿真结果分析如下。

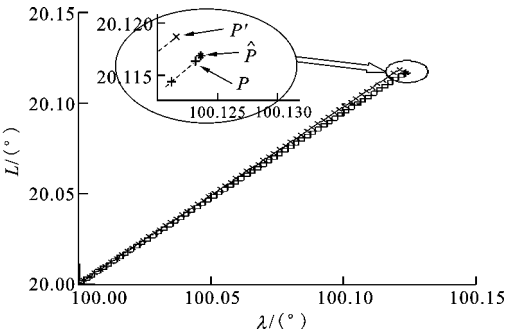


图 5　AUV航迹

Fig 5　AUV trajectory

在捷联罗经对准算法中,先进行 120 s水平调平,再进行罗经方位对准至 30 min,罗经方位收敛情况如图 6中曲线“*”所示,从图中可以看出,15 min后罗经方位对准误差基本小于 0.1 °。在航位推算算法中,由于初始平台水平误差角比较大,而罗经对准水平调平中水平误差角很容易收敛,因此,在 120 s时可用罗经对准的水平姿态角修正

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

航位推算的水平姿态角,使得航位推算中的水平姿态误差角为小角度,降低对方位误差角的耦合影响。航位推算的方位角如图 6中曲线“ ×”所示,可见方位角基本保持 44 °不变。

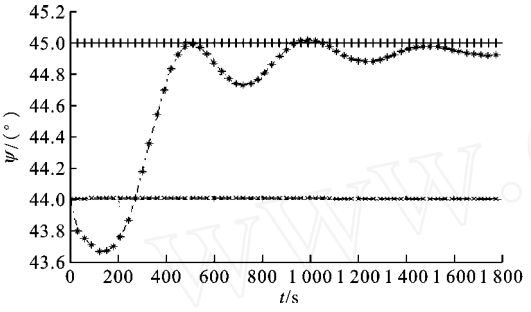


图 6 AUV方位角

Fig. 6 Azimuth angle of AUV

航位推算航迹如图 5中曲线“ ×”所示,从中可以看出,随着航行位移增大航位推算航迹逐渐偏离真实航迹,在图 5左上方为 30 min时的位置放大图,其中 P点为真实位移, P′点为航位推算位移(它与 P点经度误差 - 6.4″,纬度误差 8.5″,绝对距离误差 322.4 m), P″点为利用公式(7)修正后的位移(它与 P点经度误差 0.8″,纬度误差 1.9″,绝对距离误差 63.7 m), P″点基本在真实航迹的延长线上,这表明了与航位推算方位误差有关的位置误差得到了修正,而无法补偿由 DVL标度因数误差引起的位置误差。总之,经过修正后 AUV导航位置误差降低到了原来的 63.7 m/322.4 m≈ 19.8%。

4 结论

针对 AUV的 SINS/DVL组合导航系统,在初始平台误差角比较大的情况下,提出了同时实施航位推算和捷联罗经对准 2种算法的方法,利用罗经对准估计出初始方位误差角,再修正航位推算位置误差,从而提高了 AUV的导航精度。需要指出的是,该方法只有在捷联惯导系统上才能实现,因为 SINS采用的是“数学平台”,使得航位推算“数学平台”和罗经对准“数学平台”两者在导航过程中可以同时存在,且互不干扰;而在平台惯导系统中,采用的是实体平台,往往要利用导航速度和位置等信息对平台施加控制,迫使平台按指定的规律运动(如平台罗经对准),在使用平台罗经对准算法控制平台运动时必然阻碍了航位推算算法的使用,所以也就难以利用本文的方法了。

参考文献:

[1] 张秦南. 基于激光陀螺的鱼雷惯导系统技术研究[J]. 舰船科学技术, 2003, 25(3): 38-40.

[2] 王立文,李立新. 捷联惯导系统快速测漂技术研究[J]. 鱼雷技术, 2001, 9(4): 17-20.

[3] 金文凯. 激光陀螺与鱼雷捷联惯导[J]. 鱼雷技术, 1999, 7(1): 1-5.

[4] iXSea Ltd. PHINS UG Part1 Intro MU-PHINS-002-C. pdf[EB/DK], 2004, 12.

[5] 严恭敏. 车载自主定位定向系统研究[D]. 西安:西北工业大学, 2006.

[6] 严恭敏,秦永元,杨波. 车载航位推算系统误差补偿技术研究[J]. 西北工业大学学报, 2006, 24(1): 26-30.

[7] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京:科学出版社, 2006.

[8] ISO 8728-1998, Ships and Marine Technology-Marine gyro-compasses[S].

[9] iXSea Ltd. OctansIII UG Part 2 Octans Surface UG MU-OCTIII-003-A. pdf[EB/DK], 2004, 7: 21-23.

(责任编辑 杨力军)

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

文章编号: 1002-0640(2009)07-0053-04

捷联惯组与炮管之间安装误差角的标定方法*

严恭敏[1], 严卫生[1,2], 徐德民[1,2], 蒋 浩[3]
(1. 西北工业大学航海学院, 陕西 西安 710072, 2. 水下信息处理与控制国家级重点实验室, 陕西 西安 710072,
3. 重庆航天新世纪卫星应用技术有限责任公司, 重庆 401122)

摘 要: 为了保证捷联惯导系统能够正确给出炮管高低角和方位角, 必须对捷联惯组和炮管之间的安装误差角进行标定。介绍了利用经纬仪进行安装误差角标定的原理和方法, 还提出另外两种计算安装误差角方法, 包括利用欧拉角微分方程进行近似积分方法和利用主惯导与子惯导间的传递对准方法。经对比上述三种方法是等效的, 其共同特点是炮管必须作高低角运动, 并且要求在运动前后横滚角变化很小。最后, 通过调炮试验验证了标定方法的可行性。

关键词: 捷联惯导系统, 战车, 安装误差, 标定, 调炮试验
中图分类号: V 249.3 **文献标识码**: A

Misalignment Angle Calibration between SMU and Gun Barrel

YAN Gong-min[1], YAN Wei-sheng[1,2], XU De-min[1,2], JIANG Hao[1,2]
(1. *College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an* 710072, *China*,
2. *National Key Laboratory for Underwater Information Process & Control, Xi'an* 710072, *China*,
3. *Chongqing Aerospace New Century Satellite Application Technology Co. Ltd, Chongqing* 401122, *China*)

Abstract: In order to providing elevation and azimuth for gun barrel via strapdown inertial navigation system (SINS), the misalignment angle calibration between strapdown inertial measurement unit (SMU) and gun barrel is necessary. Using theodolite goniometer, the principle for misalignment angle calibration is introduced, and two more methods are also proposed to process the gun slaving test data, which include the approximate integral of the Euler angle differential equation method and the transfer alignment method between main SINS and slave SINS. The above three calibration methods are proved to be identical. In these methods, an elevation angle movement for gun barrel is demanded but with very small roll angle changed, and it canl be well satisfied in the gun salving test. Finally, the gun slaving test results prove that the proposed calibration methods are correct and feasible.

Key words: strapdown inertial navigation system, tank, misalignment, calibration, gun slaving test

引 言

为增强车载武器系统的快速机动性, 现代先进的陆地作战车辆, 如坦克炮、自行火炮和远程火箭炮等, 一般都配备有定位定向系统。在行车过程中, 由定位定向系统引导车辆行驶, 并实时完成阵地测量; 而在作战时, 定位定向系统可以为车载武器的火控系统提供位置信息、高低角和方位角等信息。武器发射时, 往往伴随着强烈的振动和冲击, 这对战车上各种设备是一个严峻的考验。随着捷联惯导SINS技术的不断成熟, 尤其是SINS具有准备时间短和抗强振动冲击强等优点, 使其特别适合于陆用战车导航系统。例如, 国内某型号自行榴弹炮装甲车系统, 采用了SINS, 其固定安装在炮管根部, 在行军时, 炮管收起放置在固定的支架上, SINS与里程计和气压高度计组合作为导航系统, 对车辆进行实时定位定向; 而发射武器时, 战车停止并固定在阵地上, 火控系统根据输入的目标信息SINS给出炮管的高低角和方位角, 控制炮管转动, 快速实现自动瞄准。实时

收稿日期: 2008-05-30 修回日期: 2008-07-09
* 基金项目: 水下信息处理与控制国家重点实验室基金资助项目(9140C230206070C2306)
作者简介: 严恭敏(1977-), 男, 福建建瓯人, 博士后, 主要从事陆用定位定向系统、水下航行器自主导航技术与组合导航系统理论研究。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

阵地测量和自动瞄准极大增强了武器系统的作战威力。

由于机械加工误差和安装误差的影响,导致捷联惯组SMU和炮管之间方位不一致。为了确保SINS能够正确给出炮管的高低角和方位角,必须对SMU和炮管之间的安装误差角进行标定和补偿。本文介绍利用经纬仪测量进行安装误差角标定的原理和方法,还提出了两种等效的计算安装误差角算法,最后通过调炮试验验证标定方法的可行性。

1 炮管高低角和方位角测量原理

炮管高低角和方位角测量示意图如图1所示。战车停止在基本水平的地面上,炮台可在任意方位上转动,炮管能在炮台上作俯仰转动。SMU按一定的方位要求固定安装在炮管根部位置,假设SMU和炮管之间的安装误差角是小角度。在炮管上作两个标记点a和b,使连线ab与炮管射向方向平行。架设两台经纬仪A和B,为了减小测量误差,使经纬仪A和B连线水平投影线基本平行与炮管ab的水平投影线。计算炮管高低角和方位角的过程叙述如下。

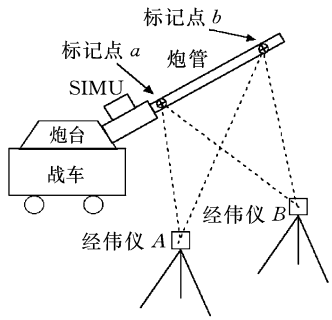


图1 炮管方位测量示意图

令经纬仪B点在过经纬仪A点的水平面上的投影为B',以A点为原点,AB为ox轴,过A点的竖直向上轴为oz轴,建立右手直角坐标系,如图2所示。假设由经纬仪A测得经纬仪B相对于A的高低角为θ_B,测得标记点a的高低角为θ_a;由经纬仪A对标记点a和经纬仪B进行方位夹角测量,标记点a与经纬仪B之间的方位夹角为Ψ_{Aa}。同理,由经纬仪B测量,可得a的高低角为θ_{Ba},标记点a与经纬仪A之间的方位夹角为Ψ_{Ba}。不妨假设AB长度为单位1,以下求标记点a的坐标$a(x_a, y_a, z_a)$。

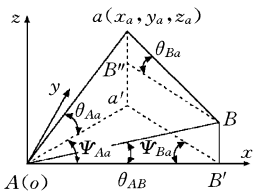


图2 标记点坐标计算示意图

假设标记点a在xoy水平面上投影点为a',则在$\Delta AB'a'$中,由两角和一边(即Ψ_{Aa}、Ψ_{Ba}和AB')利用正弦定理可求得边长Aa',即

$$\frac{Aa'}{\sin\Psi_{Ba}}=\frac{1}{\sin(\pi-\Psi_{Ba}-\Psi_{Aa})}\Rightarrow Aa'=\frac{\sin\Psi_{Ba}}{\sin(\Psi_{Ba}+\Psi_{Aa})} \tag{1}$$

接下来,由边长Aa'与Ψ_{Aa}求得标记点a的水平坐标,并由边长Aa'与高低角θ_a求得a的垂直坐标,即

$$x_a=Aa'\cos\Psi_{Aa},\ y_a=Aa'\sin\Psi_{Aa},\ z_a=Aa'\tan\theta_a \tag{2}$$

将式(1)代入式(2)立即求得标记点a的三维坐标$a(x_a, y_a, z_a)$。

同理,可求得标记点b的三维坐标$b(x_b, y_b, z_b)$。至此,由a和b点坐标可计算得炮管的高低角θ_p和相对方位角Ψ_p(其中θ_p是相对水平面的高低角,而Ψ_p是炮管水平投影线$a'b'$与经纬仪水平投影线AB之间的夹角)

$$\theta_p=\arctan\frac{z_b-z_a}{\sqrt{(x_b-x_a)^2+(y_b-y_a)^2}},\ \Psi_p=\arctan\frac{y_b-y_a}{x_b-x_a} \tag{3}$$

如果经纬仪水平投影线与北向夹角Ψ_{AB}已知,则可得炮管相对于北向方位角真值(方位角真值以北偏东为正)

$$\Psi=\Psi_{AB}-\Psi_p \tag{4}$$

顺便指出,由经纬仪无法测出炮管的滚动角。

2 安装误差角标定方法

2.1 标定原理

选取东—北—天(E-N-U)地理坐标系为SINS导航参考坐标系,记为n系;SMU坐标系记为b系。n系依次经过3个欧拉角转动,即航向角Ψ、俯仰角θ和横滚角γ,可得到b系,这种转动关系用捷联姿态矩阵描述为

$$C_b^n=\begin{bmatrix}\cos\gamma\cos\Psi+\sin\gamma\sin\Psi\sin\theta & \sin\Psi\cos\theta & \sin\gamma\cos\Psi-\cos\gamma\sin\Psi\sin\theta\\ -\cos\gamma\sin\Psi+\sin\gamma\cos\Psi\sin\theta & \cos\Psi\cos\theta & -\sin\gamma\sin\Psi-\cos\gamma\cos\Psi\sin\theta\\ -\sin\gamma\cos\theta & \sin\theta & \cos\gamma\cos\theta\end{bmatrix} \tag{5}$$

由姿态矩阵求航向角Ψ和俯仰角θ的计算公式为

$$\theta=\arcsin T_{32},\ \Psi_m=\arctan(T_{12}/T_{22}) \tag{6}$$

其中T_{ij}表示姿态矩阵C_b^n的第i行第j列元素,Ψ_m表示航向角的主值。

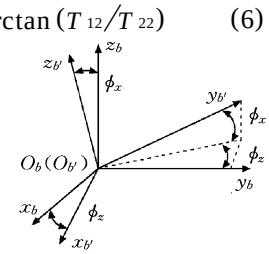


图3 捷联惯组与炮管之间安装误差角

记炮管坐标系为b系,由于炮管滚动角不影响炮弹射击精度,可以认为SMU与炮管之间的滚动角是一致的,无须标定。假设SMU与炮管之间存在方位安装误差角ϕ_z和俯仰安装误差

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

角ϕ_x, 它们均是小角度, 参见图3, 类似于捷联姿态矩阵的求法, 可得SMU 与炮管之间的安装误差矩阵为

$$C_b^b = \begin{bmatrix} \cos\phi_z & \sin\phi_z\cos\phi_x & -\sin\phi_z\sin\phi_x \\ -\sin\phi_z & \cos\phi_z\cos\phi_x & -\cos\phi_z\sin\phi_x \\ 0 & \sin\phi_x & \cos\phi_x \end{bmatrix} \tag{7}$$

由C_b^n 与C_b^b 相乘, 暂且称之为炮管姿态矩阵, 即

$$C_b^n = C_b^n C_b^b \tag{8}$$

展开C_b^n, 取其中的部分相关元素得

$$T'_{12} = (\cos\gamma\cos\Psi + \sin\gamma\sin\Psi\sin\theta)\sin\phi_z\cos\phi_x + \sin\Psi\cos\theta\cos\phi_z\cos\phi_x + (\sin\gamma\cos\Psi - \cos\gamma\sin\Psi\sin\theta)\sin\phi_x \tag{9}$$

$$T'_{22} = (-\cos\gamma\sin\Psi + \sin\gamma\cos\Psi\sin\theta)\sin\phi_z\cos\phi_x + \cos\Psi\cos\theta\cos\phi_z\cos\phi_x + (-\sin\gamma\sin\Psi - \cos\gamma\cos\Psi\sin\theta)\sin\phi_x \tag{10}$$

$$T'_{32} = -\sin\gamma\cos\theta\sin\phi_z\cos\phi_x + \sin\theta\cos\phi_z\cos\phi_x + \cos\gamma\cos\theta\sin\phi_x \tag{11}$$

其中T'_{ij}表示炮管姿态矩阵C_b^n的第i 行第j 列元素。当战车基本水平停放并且炮管未抬高时, SMU 输出横滚角和俯仰角均很小, 由式(11)近似计算得炮管高低角

$$\theta_1 = \arcsin T'_{32} \approx \arcsin(\sin\theta + \sin\phi_x) \approx \theta + \phi_x \tag{12}$$

因此, 在战车基本水平停放并且炮管未抬高时, 测得SMU 与炮管之间的俯仰安装误差角ϕ_x为

$$\phi_x = \theta_1 - \theta \tag{13}$$

战车基本水平停放, 炮管在高低方向转动, 可保证SMU 横滚角γ很小, 如果俯仰角$0 \le \theta \le 60°$即$\cos\theta \ge 0.5$, 由式(9)近似得

$$T'_{12} \approx \phi_z\cos\Psi + \sin\Psi\cos\theta\cos\phi_x - \sin\Psi\sin\theta\sin\phi_x = \phi_z\cos\Psi + \sin\Psi\cos(\theta + \phi_x) = \left[\frac{\phi_z}{\cos(\theta+\phi_x)}\cos\Psi + \sin\Psi\right]\cos(\theta+\phi_x) \tag{14}$$

由于ϕ_z和ϕ_x均是小角度且$0 \le \theta \le 60°$, 所以有$\cos(\theta+\phi_x) \approx \cos\theta$和$\phi_z << \cos\theta$, 进一步可将式(14)近似为

$$T'_{12} \approx \left(\sin\frac{\phi_z}{\cos\theta}\cos\Psi + \cos\frac{\phi_z}{\cos\theta}\sin\Psi\right)\cos\theta = \sin\left(\frac{\phi_z}{\cos\theta} + \Psi\right)\cos\theta \tag{15}$$

同理, 由式(10)可近似得

$$T'_{22} \approx -\phi_z\sin\Psi + \cos\Psi\cos\theta\cos\phi_x - \cos\Psi\sin\theta\sin\phi_x = -\phi_z\sin\Psi + \cos\Psi\cos\theta = \cos\left(\frac{\phi_z}{\cos\theta} + \Psi\right)\cos\theta \tag{16}$$

比较T'_{12}与T_{12}、T'_{22}与T_{22}, 易知炮管方位角真值Ψ'与SMU 航向角Ψ之间的差为

$$\Psi' - \Psi = \frac{\phi_z}{\cos\theta} \tag{17}$$

2.2 标定步骤

由于经纬仪测量的是炮管相对于经纬仪水平连线AB 的夹角, 而不是炮管相对北向的方位角真值, 因此在未知北向角Ψ_{AB}的情况下, 从一次测量中无法求出方位安装误差角, 必须利用多次测量来实现, 安装误差角标定具体步骤如下:

首先, 战车基本水平停放, 将炮管基本置于水平位置, 由SINS 自对准后测得姿态角分别为θ_0、γ_0和Ψ_0(γ_0很小), 再由经纬仪测得炮管高低角和方位角真值分别为θ_{p0}和Ψ'_0(相对方位角为Ψ_{p0}), 从θ_0和θ_{p0}中计算炮管与SINS 之间俯仰安装误差角

$$\phi_x = \theta_{p0} - \theta_0 \tag{18}$$

接下来, 抬高炮管高低角至一定值(如60°), 假设此时SMU 分别为θ_1、γ_1和Ψ_1(此时γ_1依然很小), 而由经纬仪测得炮管高低角和方位角真值分别为θ_{p1}和Ψ'_1(相对方位角Ψ_{p1}), 由方位真值Ψ'_0、Ψ'_1和SMU 输出Ψ_0、Ψ_1、θ_0、θ_1作如式(19)计算

$$(\Psi'_1 - \Psi_1) - (\Psi'_0 - \Psi_0) = \frac{\phi_z}{\cos\theta_1} - \frac{\phi_z}{\cos\theta_0} \approx \phi_z\sec\theta_1 - \phi_z \tag{19}$$

即

$$(\Psi'_1 - \Psi'_0) - (\Psi_1 - \Psi_0) = \phi_z(\sec\theta_1 - 1) \tag{20}$$

在炮管抬高前后, 记经纬仪两次方位测量值变化量$\Delta\Psi_p = \Psi'_1 - \Psi'_0 = \Psi_{p1} - \Psi_{p0}$, SINS 航向角输出变化量$\Delta\Psi = \Psi_1 - \Psi_0$, 则最终可得炮管与SMU 之间方位安装误差角计算公式

$$\phi_z = \frac{\Delta\Psi_p - \Delta\Psi}{\sec\theta_1 - 1} \tag{21}$$

从上述标定过程可以看出, 方位安装误差角的计算与经纬仪北向角Ψ_{AB}无关, 也与SINS 的对准精度关系不大。

3 其他数据处理方法推导

3.1 欧拉角微分方程法

假设SMU 转动角速度为ω_{nb}^b, 欧拉角微分方程描述了3 个转动欧拉角(姿态角)与角速度之间的关系, 即

$$\dot{\Omega} = C_\omega^\Omega W_{nb}^b \tag{22}$$

式(22)中$\Omega = \begin{bmatrix} \theta \\ \gamma \\ \Psi \end{bmatrix}$,

$$C_\omega^\Omega = \frac{1}{\cos\theta}\begin{bmatrix} \cos\gamma\cos\theta & 0 & \sin\gamma\cos\theta \\ \sin\gamma\sin\theta & \cos\theta & -\cos\gamma\sin\theta \\ \sin\gamma & 0 & -\cos\gamma \end{bmatrix}$$

如果把ω_{nb}^b看作是SMU 相对于炮管的转动, 将式(22)积分, 并在转动小范围内认为C_ω^Ω是常量矩阵, 得

$$\delta\Omega = C_\omega^\Omega\Phi \tag{23}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中 $\delta\Omega=[\theta-\theta',\gamma-\gamma',\Psi-\Psi']^T$, $\Phi=[\phi_x,\phi_y,\phi_z]^T$。容易看出,当横滚角为零时,展开式(23)并可立即得到式(13)和式(17)。该推导方法也证明了式(12)～式(17)简化过程是合理的。

3.2 姿态角匹配传递对准法

记主惯导坐标系为 m 系(文中选为炮管坐标系 b 系),子惯导坐标系为 s 系(文中选为SMU 坐标系 b 系),在SMU 与炮管之间安装误差角标定时,忽略主惯导与子惯导间的连接挠曲变形误差,姿态角匹配传递对准测量方程可简化为

$$z=\varphi\ C_{bm}^{n}\mu^{bf}+\nu_\varphi \tag{24}$$

其中测量向量 z 是这样构造的:

令
$$Z=C_{bm}^{n}(C_{bs}^{n})^{T} \tag{25}$$

则
$$z=0.5\times[Z_{32}-Z_{23},Z_{13}-Z_{31},Z_{21}-Z_{12}]^T \tag{26}$$

式(26)中,φ是子惯导姿态误差,短时间内可以看作是常值;μ^{bf}是子惯导与主惯导之间的安装误差角,相当于式(23)中的Φ;C_{bm}^{n}是主惯导的姿态矩阵;C_{bs}^{n}是子惯导的姿态矩阵;ν_φ是测量噪声;Z_{ij}是矩阵Z的第i行第j列元素。

当横滚角接近于零,且忽略横滚安装误差角和测量噪声时,展开式(24)取第一和第三分量得

$$z_x=\varphi_E-\mu_x^{bf}\cos\Psi+\mu_z^{bf}\sin\Psi\sin\theta \tag{25}$$

$$z_z=\varphi_U-\mu_z^{bf}\cos\theta \tag{26}$$

在式(27)、式(28)中共有4个未知量,容易看出,如果通过改变炮管俯仰角构造两组方程,就可求得安装误差角 μ_x^{bf} 和 μ_z^{bf},即 ϕ_x 和 ϕ_z。

4 调炮试验

SMU 与炮管之间安装误差角标定试验数据及其处理结果见表1,标定过程为:

1) 进行SNS 初始自对准,对准后调节惯导俯仰角基本水平,航向角为1 500 mil(1 mil= $2\pi/6\,000$);

2) 抬高炮管至惯导俯仰角输出800 mil,而保持航向角基本不变;

3) 炮管绕方位转动至惯导航向输出1 800 mil,而保持高低角基本不变;

4) 降低炮管高低角使惯导俯仰角水平,而保持航向角不变;

5) 炮管绕方位转动恢复至1)位置。

在上述每一步骤中都利用经纬仪对炮管进行高低角和方位角测量,并假设经纬仪在位置1)测得炮管方位角为0,其他步骤中方位角测量均是相对于位置1)而言的。

由表1中第1组数据,利用式(13)计算得俯仰安装误差角 $\phi_x=-0.7\ \text{mil}-0.1\ \text{mil}=-0.8\ \text{mil}$;由第1和第2组数据,利用式(21)计算得方位安装误差角 $\phi_z=[(-1.6\ \text{mil}-0)-(1\,500.1\ \text{mil}-1\,500\ \text{mil})]/[\sec(800\ \text{mil})-1]=-3.44\ \text{mil}$。应用上述安装误差角修正SNS 输出,得炮管的高低角和方向角估计值,结果如表1中 $\hat{\theta}_p$ 和 $\hat{\Psi}_p$ 列所示;估计结果再与经纬仪测量比较,比较误差如 $\Delta\theta$ 和 $\Delta\Psi$ 列所示,误差计算方法为 $\Delta\theta=\hat{\theta}_p-\theta_p$、$\Delta\Psi=\hat{\Psi}_p-\Psi_p-1\,496.6$ ~~m in,~~ 从误差中可看出,SNS 输出经安装误差修正后能够获得炮管的高低角绝对值和方位角相对变化值,最大误差为0.2 mil,满足调炮精度要求。

表1 安装误差角标定试验

组别	SNS 输出(mil)		经纬仪测量(mil)		炮管高低角和方向角估计(mil)			
	θ	Ψ	θ_p	Ψ_p	$\hat{\theta}_p$	$\Delta\theta$	$\hat{\Psi}_p$	$\Delta\Psi$
1	0.1	1 500	-0.7	0	-0.7	0	1 496.6	0
2	800	1 500.1	799.4	-1.6	799.2	-0.2	1 495	0
3	800.2	1 800	799.6	298.3	799.4	-0.2	1 794.9	0
4	-0.1	1 798.5	-0.9	298.7	-0.9	0	1 795.1	-0.2
5	-0.7	1 500	-1.4	-0.1	-1.5	-0.1	1 496.6	0.1

5 结 论

由式(17)可知,如果利用陀螺经纬仪对炮管方位直接测量,在炮管水平状态下,陀螺经纬仪测量方位角与SNS 航向角之差就是航向安装误差角,但是该测量方法受SNS 自对准精度和陀螺经纬仪精度影响较大,特别是前者误差可能多达几个密位。本文利用经纬仪对安装误差角进行标定,标定精度受SNS 自对准精度影响小,试验结果表明安装误差角标定方案可行,精度高。

参考文献:

[1] 田振新. 地炮火控系统一次调炮的实现[J]. 火力与指挥控制, 2004, 29(1): 85-87.

[2] 顾孝烈. 测量学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1999.

[3] 顾冬晴. 机载战术武器的传递对准及精度评估技术研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2005.

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2009年8月 西北工业大学学报 Aug. 2009
第27卷第4期 Journal of Northwestern Polytechnical University Vol. 27 No. 4

基于欧拉平台误差角的SINS非线性误差模型研究

严恭敏[1]，严卫生[1,2]，徐德民[1,2]

(1. 西北工业大学 航海学院；2. 水下信息处理与控制国家级重点实验室，陕西 西安 710072)

摘 要：捷联惯导系统(SINS)误差模型是研究SINS误差传播特性和进行多导航系统间信息融合的基础。文章利用欧拉平台误差角表示理论导航坐标系与计算导航坐标系之间的失准角，推导了SINS非线性误差模型，在大方位失准角误差和小失准角误差条件下做了简化研究。提出了基于外界阻尼信息的阻尼SINS算法及其误差模型，有利于减小计算量和降低误差分析的复杂性。最后，对大欧拉平台误差角下SINS误差模型进行了准确性检验，仿真结果表明误差模型能完美地反映SINS误差特性。

关 键 词：惯性导航系统，计算机仿真，捷联惯导系统，欧拉平台误差角，非线性误差模型

中图分类号：V249.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-2758(2009)04-0511-06

捷联惯导系统(SINS)的误差源通常包含惯性器件测量误差、初始条件误差、环境模型误差(即地球模型误差)和数值算法误差等误差，SINS误差模型是研究SINS误差传播特性和进行多导航系统间信息融合的基础，它在初始对准和组合导航等应用方面起着重要的作用。描述SINS算法的数学方程是一组非线性微分方程，在经典的小失准角SINS误差模型中，基于Φ角法或ψ角法给SINS方程一个小的扰动以表示误差因素造成的影响，从而推导出一组线性微分方程误差模型[1]。经典小失准角SINS线性误差模型只有在假设各种误差源较小的条件下才成立，随着SINS技术应用要求的提高，以大失准角下进行初始对准最具代表性，及非线性滤波估计技术研究的发展，SINS误差模型的研究不再局限于线性模型，一些新的误差模型不断涌现[2~4]，如大方位失准角误差模型、基于四元数的误差模型和基于对偶四元数的误差模型等。大方位失准角误差模型是非线性的，它要求水平失准角是小量；基于四元数的误差模型中代表姿态的误差方程可以是线性的，但是误差四元数的各分量物理意义不明确，它还增加了误差模型的维数，并且表示速度误差的误差方程依然是非线性的；基于对偶四元数的误差模型也存在维数增加的问题，它必然使滤波计算量增大，尚未见有关该误差模型应用的文献报道。

本文沿小失准角误差模型和大方位失准角误差模型的思路，继续利用失准角的方法来描述SINS数学平台误差，同时使其适用于大失准角误差的情形。在小失准角误差模型中可以认为3个失准角之间是与转动先后顺序无关的，即可交换的，但是在大失准角误差模型中必须摒弃这一做法，为了不易引起误解，文中使用欧拉平台误差角(EPEA)来表示从理论导航坐标系到计算导航坐标系之间的3个失准角。利用EPEA表示数学平台误差，其物理意义是非常明确的。首先，利用EPEA推导SINS非线性误差模型，并在大方位失准角误差和小失准角误差条件下做适当简化，简化结果比已有文献中的大方

收稿日期：2008-03-06

基金项目：中国博士后科学基金(20070420215)和水下信息处理与控制国家级重点实验室基金(9140C230206070C2306)资助

作者简介：严恭敏(1977—)，西北工业大学副教授，主要从事惯性导航与信息融合理论研究。

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

位失准角误差模型更加全面，与经典小失准角误差模型完全相同；其次，提出利用外界阻尼信息改变捷联惯导算法结构的阻尼SINS算法及其误差模型，它在初始对准中有着很强的实用性，同时有利于减小计算量；最后，对大欧拉平台误差角下SINS误差模型进行准确性检验，仿真结果表明即使在失准角很大情况下提出的误差模型也能完美反映SINS误差特性。

1 SINS非线性误差方程

文中记地心惯性坐标系为 i 系；记地球坐标系为 e 系；选取“东-北-天(E-N-U)”地理坐标系为导航坐标系，记为 n 系；“右-前-上”坐标系为捷联惯导坐标系，记为 b 系。n 系先后依次经过3次欧拉角转动至 b 系，这3个欧拉角分别记为航向角 $\psi\in(-\pi\quad\pi]$、俯仰角 $\theta\in[-\pi/2\quad\pi/2]$ 和横滚角 $\gamma\in(-\pi\quad\pi]$，n 系与 b 系之间的旋转变换关系可用姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_b^n$ 描述。

1.1 经典SINS微分方程

经典SINS微分方程组包含姿态矩阵微分方程、速度微分方程和位置微分方程，即

$$\dot{\boldsymbol{C}}_b^n=\boldsymbol{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b\times)\tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n=\boldsymbol{C}_b^n\boldsymbol{f}_{sf}^b-(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n+\boldsymbol{\omega}_{en}^n)\times\boldsymbol{v}^n+\boldsymbol{g}^n\tag{2}$$

$$\dot{L}=\frac{v_N^n}{R_M+h}\quad\dot{\lambda}=\frac{v_E^n\sec L}{R_N+h}\quad\dot{h}=v_U^n\tag{3}$$

式中 $(\boldsymbol{V}\times)$ 表示由矢量 $\boldsymbol{V}$ 构成的反对称矩阵，$\boldsymbol{v}^n=[v_E^n\quad v_N^n\quad v_U^n]^{\mathrm{T}}$、$L$、$\lambda$、$h$ 分别表示SINS速度、纬度、经度和高度，R_M、R_N 分别为当地子午圈和卯酉圈曲率半径，并且还有以下关系式

$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b=\boldsymbol{\omega}_{ib}^b-\boldsymbol{C}_n^b\boldsymbol{\omega}_{in}^n\tag{4}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^n=\boldsymbol{\omega}_{ie}^n+\boldsymbol{\omega}_{en}^n\tag{5}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n=[0\quad\omega_{ie}\cos L\quad\omega_{ie}\sin L]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n=[-\dot{L}\quad\dot{\lambda}\cos L\quad\dot{\lambda}\sin L]^{\mathrm{T}}\tag{6}$$

$$\boldsymbol{g}^n=[0\quad0\quad-g_L]^{\mathrm{T}}\tag{7}$$

式中，g_L、ω_{ie} 分别是当地重力加速度和地球自转角速率，$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$、$\boldsymbol{f}_{sf}^b$ 分别表示理想陀螺角速度输出和加速度计比力输出。

1.2 欧拉平台误差角微分方程

由于各种误差源的影响，实际上SINS模拟的数学平台与理想导航坐标系 n 系(即理想数学平台)之间存在转动误差，记实际数学平台为 n' 系，也可称之为计算平台坐标系。与 n 系至 b 系的转动过程类似，n 系先后依次经过3次转动可得 n' 系，假设这3次转动角分别为 α_z、α_x 和 α_y，称它们为欧拉平台误差角(EPEA)，并且记矢量 $\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_x\quad\alpha_y\quad\alpha_z]^{\mathrm{T}}$，则有坐标变换矩阵

$$\boldsymbol{C}_{\alpha_z}=\begin{bmatrix}c\alpha_z&s\alpha_z&0\\-s\alpha_z&c\alpha_z&0\\0&0&1\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{C}_{\alpha_x}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&c\alpha_x&s\alpha_x\\0&-s\alpha_x&c\alpha_x\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_{\alpha_y}=\begin{bmatrix}c\alpha_y&0&-s\alpha_y\\0&1&0\\s\alpha_y&0&c\alpha_y\end{bmatrix}\tag{8}$$

上述式中使用了简写符号：$s\alpha_i$、$c\alpha_i$ 分别表示 $\sin(\alpha_i)$ 和 $\cos(\alpha_i)(i=x,y,z)$，因此 n 系至 n' 系的变换矩阵为

$$\boldsymbol{C}_n^{n'}=\boldsymbol{C}_{\alpha_y}\boldsymbol{C}_{\alpha_x}\boldsymbol{C}_{\alpha_z}=$$

$$\begin{bmatrix}c\alpha_yc\alpha_z-s\alpha_ys\alpha_xs\alpha_z&c\alpha_ys\alpha_z+s\alpha_ys\alpha_xc\alpha_z&-s\alpha_yc\alpha_x\\-c\alpha_xs\alpha_z&c\alpha_xc\alpha_z&s\alpha_x\\s\alpha_yc\alpha_z+c\alpha_ys\alpha_xs\alpha_z&s\alpha_ys\alpha_z-c\alpha_ys\alpha_xc\alpha_z&c\alpha_yc\alpha_x\end{bmatrix}\tag{9}$$

若设 n' 系相对于 n 系的角速度为 $\boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'}$，则可得 $\boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'}$ 与EPEA $\boldsymbol{\alpha}$ 之间的关系

$$\boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'}=\boldsymbol{C}_{\alpha_y}\boldsymbol{C}_{\alpha_x}\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\alpha}_z\end{bmatrix}+\boldsymbol{C}_{\alpha_y}\begin{bmatrix}\dot{\alpha}_x\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\\dot{\alpha}_y\\0\end{bmatrix}=\boldsymbol{C}_\omega\begin{bmatrix}\dot{\alpha}_x\\\dot{\alpha}_y\\\dot{\alpha}_z\end{bmatrix}\tag{10}$$

从而由(10)式得EPEA微分方程

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}=\boldsymbol{C}_\omega^{-1}\boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'}\tag{11}$$

式中

$$\boldsymbol{C}_\omega=\begin{bmatrix}c\alpha_y&0&-s\alpha_yc\alpha_x\\0&1&s\alpha_x\\s\alpha_y&0&c\alpha_yc\alpha_x\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}_\omega^{-1}=\frac{1}{c\alpha_x}\begin{bmatrix}c\alpha_yc\alpha_x&0&s\alpha_yc\alpha_x\\s\alpha_ys\alpha_x&c\alpha_x&-c\alpha_ys\alpha_x\\-s\alpha_y&0&c\alpha_y\end{bmatrix}\tag{12}$$

EPEA微分方程(11)式描述了EPEA与计算平台坐标系角运动之间的关系，下面将推导计算平台坐标系的角运动规律 $\boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'}$，从而建立起以EPEA表示的SINS误差模型。

1.3 SINS姿态误差方程

理论上，SINS姿态矩阵微分方程为(1)式，而实际上用于姿态更新的微分方程是带误差源的，它可表示为

$$\dot{\boldsymbol{C}}_b^{n'}=\boldsymbol{C}_b^{n'}(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b\times)\tag{13}$$

式中

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^{b}=\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^{b}-\boldsymbol{C}_{n'}^{b}\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^{n}=(\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}+\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b})-\boldsymbol{C}_{n'}^{b}(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}+\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}) \tag{14}$$

$\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$ 为陀螺测量误差，$\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}$ 为 $\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}$ 的计算误差且 $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}=\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}$。现定义姿态矩阵的计算误差为

$$\Delta\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_{b}^{n'}-\boldsymbol{C}_{b}^{n}=\boldsymbol{C}_{b}^{n'}-\boldsymbol{C}_{n'}^{n}\boldsymbol{C}_{b}^{n'}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{n'}^{n})\boldsymbol{C}_{b}^{n'} \tag{15}$$

一方面，对 $\Delta\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_{b}^{n'}-\boldsymbol{C}_{b}^{n}$ 两边同时微分，并将(1)式和(13)式代入得

$$\Delta\dot{\boldsymbol{C}}=\dot{\boldsymbol{C}}_{b}^{n'}-\dot{\boldsymbol{C}}_{b}^{n}=\boldsymbol{C}_{b}^{n'}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^{b}\times)-\boldsymbol{C}_{b}^{n}(\boldsymbol{\omega}_{nb}^{b}\times) \tag{16}$$

另一方面，对 $\Delta\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{n'}^{n})\boldsymbol{C}_{b}^{n'}$ 两边同时微分，并将(13)式代入得

$$\begin{aligned}\Delta\dot{\boldsymbol{C}}&=-\dot{\boldsymbol{C}}_{n'}^{n}\boldsymbol{C}_{b}^{n'}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{n'}^{n})\dot{\boldsymbol{C}}_{b}^{n'}\\&=-\dot{\boldsymbol{C}}_{n'}^{n}\boldsymbol{C}_{b}^{n'}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{n'}^{n})\boldsymbol{C}_{b}^{n'}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^{b}\times)\end{aligned} \tag{17}$$

令(16)式和(17)式右端相等，得

$$\dot{\boldsymbol{C}}_{n'}^{n}\boldsymbol{C}_{b}^{n'}+\boldsymbol{C}_{n'}^{n}\boldsymbol{C}_{b}^{n'}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^{b}\times)-\boldsymbol{C}_{b}^{n}(\boldsymbol{\omega}_{nb}^{b}\times)=0 \tag{18}$$

再把矩阵微分方程 $\dot{\boldsymbol{C}}_{n'}^{n}=\boldsymbol{C}_{n'}^{n}(\boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'}\times)$ 代入(18)式，并将其两边同时左乘 $\boldsymbol{C}_{n'}^{n}$ 和右乘 $\boldsymbol{C}_{n'}^{b}$，得

$$(\boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'}\times)+\boldsymbol{C}_{b}^{n'}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^{b}\times)\boldsymbol{C}_{n'}^{b}-\boldsymbol{C}_{b}^{n'}(\boldsymbol{\omega}_{nb}^{b}\times)\boldsymbol{C}_{n'}^{b}=\boldsymbol{0} \tag{19}$$

利用反对称阵相似变换以及反对称阵与失量之间的关系，矩阵等式(19)式可等价成矢量等式

$$\boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'}+\boldsymbol{C}_{b}^{n'}(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{nb}^{b}-\boldsymbol{\omega}_{nb}^{b})=\boldsymbol{0} \tag{20}$$

将(4)式和(14)式代入(20)式，整理得

$$\boldsymbol{\omega}_{nn'}^{n'}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{n}^{n'})\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^{n}+\boldsymbol{C}_{n}^{n'}\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}-\boldsymbol{C}_{b}^{n'}\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b} \tag{21}$$

最后，将(21)式代入(11)式得以 EPEA 表示的 SINS 非线性姿态误差方程

$$\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{C}_{\omega}^{-1}[(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{C}_{n}^{n'})\hat{\boldsymbol{\omega}}_{in}^{n}+\boldsymbol{C}_{n}^{n'}\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}-\boldsymbol{C}_{b}^{n'}\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}] \tag{22}$$

显然，在一般条件下要将(22)式展开成分量的表达方式是比较复杂的。

1.4 SINS 速度误差方程

理论上，SINS 速度微分方程表示为(2)式，而实际上导航解算的速度微分方程为

$$\dot{\hat{\boldsymbol{v}}}^{n}=\boldsymbol{C}_{b}^{n'}\hat{\boldsymbol{f}}_{sf}^{b}-(2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{n}+\hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^{n})\times\hat{\boldsymbol{v}}^{n}+\hat{\boldsymbol{g}}^{n} \tag{23}$$

式中设 $\hat{\boldsymbol{v}}^{n}=\boldsymbol{v}^{n}+\delta\boldsymbol{v}^{n}$、$\hat{\boldsymbol{f}}_{sf}^{b}=\boldsymbol{f}_{sf}^{b}+\delta\boldsymbol{f}_{sf}^{b}$、$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{n}=\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}$、$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^{n}=\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}+\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}$、$\hat{\boldsymbol{g}}^{n}=\boldsymbol{g}^{n}+\delta\boldsymbol{g}^{n}$，$\delta\boldsymbol{f}^{b}$为加速度计测量误差，直接将(23)式减去(2)式，整理得 SINS 速度误差方程

$$\begin{aligned}\delta\dot{\boldsymbol{v}}^{n}=&[\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{C}_{n}^{n'})^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{C}_{b}^{n'}\hat{\boldsymbol{f}}_{sf}^{b}+(\boldsymbol{C}_{n}^{n'})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_{b}^{n'}\delta\boldsymbol{f}_{sf}^{b}-\\&(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n})\times\hat{\boldsymbol{v}}^{n}-(2\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{n}+\hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^{n})\times\\&\delta\boldsymbol{v}^{n}+(2\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n})\times\delta\boldsymbol{v}^{n}+\delta\boldsymbol{g}^{n}\end{aligned} \tag{24}$$

在(22)式和(24)式中的计算参数误差 $\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}$ 和 $\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}$ 具体表示为

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}=\hat{\boldsymbol{\omega}}_{ie}^{n}-\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}=\begin{bmatrix}0\\\omega_{ie}[\cos\hat{L}-\cos(\hat{L}-\delta L)]\\\omega_{ie}[\sin\hat{L}-\sin(\hat{L}-\delta L)]\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}&=\hat{\boldsymbol{\omega}}_{en}^{n}-\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}\\&=\begin{bmatrix}-\delta\dot{L}\\\dot{\hat{\lambda}}\cos\hat{L}-(\dot{\hat{\lambda}}-\delta\dot{\lambda})\cos(\hat{L}-\delta L)\\\dot{\hat{\lambda}}\sin\hat{L}-(\dot{\hat{\lambda}}-\delta\dot{\lambda})\sin(\hat{L}-\delta L)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{25}$$

式中 $\hat{L}=L+\delta L$、$\hat{\lambda}=\lambda+\delta\lambda$。

1.5 SINS 位置误差方程

SINS 位置微分方程为(3)式，直接求计算值与真实值之间的误差，得 SINS 位置误差微分方程

$$\begin{aligned}\delta\dot{L}&=\dot{\hat{L}}-\dot{L}\\&=\frac{\hat{v}_{N}^{n}}{\hat{R}_{M}+\hat{h}}-\frac{\hat{v}_{N}^{n}-\delta v_{N}^{n}}{(R_{M}-\delta R_{M})+(h-\delta h)}\\\delta\dot{\lambda}&=\dot{\hat{\lambda}}-\dot{\lambda}\\&=\frac{\hat{v}_{E}^{n}\sec\hat{L}}{\hat{R}_{N}+\hat{h}}-\frac{(\hat{v}_{E}^{n}-\delta v_{E}^{n})\sec(\hat{L}-\delta L)}{(R_{N}-\delta R_{N})+(h-\delta h)}\\\delta\dot{h}&=\dot{\hat{h}}-\dot{h}=\hat{v}_{U}^{n}-v_{U}^{n}=\delta v_{U}^{n}\end{aligned} \tag{26}$$

式中，$\hat{h}=h+\delta h$、$\hat{R}_{M}=R_{M}+\delta R_{M}$、$\hat{R}_{N}=R_{N}+\delta R_{N}$。欲求得 δR_{M} 和 δR_{N} 解析式是很困难和复杂的，但一般情况下它们在(26)式中的影响很小，可以将它们都近似为 0。至此，由(9)式、(12)式、(22)式、(24)～(26)式构成了一套完整的 SINS 非线性误差模型，在推导过程中未做 EPEA 是小量的假设，因此只要保证(12)式中的 $c\alpha_{x}$ 不为 0。

需要指出的是，如果纬度误差 δL 和高度误差 δh 是小量，并且有 $\delta h\ll\hat{R}_{M}+\hat{h}$ 和 $\delta h\ll\hat{R}_{N}+\hat{h}$ 成立的话，那么就可对(25)式和(26)式进行线性化，即

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}&=\begin{bmatrix}0\\-\omega_{ie}\sin\hat{L}\delta L\\\omega_{ie}\cos\hat{L}\delta L\end{bmatrix}\\\delta\boldsymbol{\omega}_{en}^{n}&=\begin{bmatrix}-\delta v_{N}^{n}/(\hat{R}_{M}+\hat{h})\\\delta\dot{\lambda}\cos\hat{L}-\dot{\hat{\lambda}}\sin\hat{L}\delta L\\\delta\dot{\lambda}\sin\hat{L}+\dot{\hat{\lambda}}\cos\hat{L}\delta L\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\delta\dot{L}&=\frac{1}{\hat{R}_{M}+\hat{h}}\delta v_{N}^{n}\\\delta\dot{\lambda}&=\frac{\sec\hat{L}}{\hat{R}_{N}+\hat{h}}\delta v_{E}^{n}+\frac{\hat{v}_{E}^{n}\sec\hat{L}\tan\hat{L}}{\hat{R}_{N}+\hat{h}}\delta L\\\delta\dot{h}&=\delta v_{U}^{n}\end{aligned} \tag{28}$$

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2 SINS误差模型的简化与仿真

显然，要将SINS非线性误差模型按各个分量展开，尤其是对于姿态误差方程而言，是比较复杂的，但是，在某些条件下可对它进行简化，使其符合特定的应用场合。在以下分析中均假设陀螺测量误差 $\delta\omega_{ib}^b$ 主要为漂移误差 ε^b，加速度计测量误差 δf_{sf}^b 主要为偏置误差 ∇^b，忽略重力误差项 δg^n，并记 $\varepsilon^{n'}=C_b^{n'}\varepsilon^b$、$\nabla^{n'}=C_b^{n'}\nabla^b$ 和 $\hat{f}_{sf}^{n'}=C_b^{n'}\hat{f}_{sf}^b$。

2.1 大方位失准角下的SINS误差模型

假设EPEA中 α_x 和 α_y 是小量，而 α_z 是任意值，则近似有 $s\alpha_x\approx\alpha_x$、$c\alpha_x\approx 1$、$s\alpha_y\approx\alpha_y$ 和 $c\alpha_y\approx 1$

$$C_\omega^{-1}\approx\begin{bmatrix}1 & 0 & \alpha_y\\ 0 & 1 & -\alpha_x\\ -\alpha_y & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$C_n^{n'}\approx\begin{bmatrix}c\alpha_z & s\alpha_z & -\alpha_y\\ -s\alpha_z & c\alpha_z & \alpha_x\\ \alpha_y c\alpha_z+\alpha_x s\alpha_z & \alpha_y s\alpha_z-\alpha_x c\alpha_z & 1\end{bmatrix}\tag{29}$$

将这些近似值代入(22)式和(24)式，并略去关于小量误差的二阶量，得

$$\dot{\alpha}=C_A\hat{\omega}_{in}^n+C_{\alpha_z}\delta\omega_{in}^n-\varepsilon^{n'}\tag{30}$$

$$\delta\dot{v}^n=C_B\hat{f}_{sf}^{n'}+C_{\alpha_z}^{\mathrm{T}}\nabla^{n'}-(2\delta\omega_{ie}^n+\delta\omega_{en}^n)\times\hat{v}^n-(2\hat{\omega}_{ie}^n+\hat{\omega}_{en}^n)\times\delta v^n\tag{31}$$

式中

$$C_A=C_\omega^{-1}(I-C_n^{n'})\approx\begin{bmatrix}1-c\alpha_z & -s\alpha_z & \alpha_y\\ s\alpha_z & 1-c\alpha_z & -\alpha_x\\ -\alpha_x s\alpha_z-\alpha_y & \alpha_x c\alpha_z & 0\end{bmatrix}$$

$$C_B=I-(C_n^{n'})^{\mathrm{T}}\approx\begin{bmatrix}1-c\alpha_z & s\alpha_z & -\alpha_y c\alpha_z-\alpha_x s\alpha_z\\ -s\alpha_z & 1-c\alpha_z & -\alpha_y s\alpha_z+\alpha_x c\alpha_z\\ \alpha_y & -\alpha_x & 0\end{bmatrix}$$

值得注意的是，在(30)式中 $\delta\omega_{in}^n$ 前有误差分配矩阵 C_{α_z}，该矩阵在文献[2,5,6]中是没有的，作者认为那是不恰当的，因为 α_z 并非小量，不能将 C_{α_z} 近似成单位阵。

2.2 小失准角的SINS误差方程

若EPEA均为小量，则近似有 $C_A\approx(\alpha\times)$、$C_B\approx-(\alpha\times)$ 和 $C_{\alpha_z}\approx I$，所以(30)式和(31)式进一步近似为

$$\dot{\alpha}=-\hat{\omega}_{in}^n\times\alpha+\delta\omega_{in}^n-\varepsilon^{n'}\tag{32}$$

$$\delta\dot{v}^n=\hat{f}_{sf}^{n'}\times\alpha+\nabla^{n'}-(2\delta\omega_{ie}^n+\delta\omega_{en}^n)\times\hat{v}^n-(2\hat{\omega}_{ie}^n+\hat{\omega}_{en}^n)\times\delta v^n\tag{33}$$

它与其它文献中小失准角下的SINS线性误差方程完全相同。

2.3 阻尼SINS算法及其误差模型

前面分析的是纯捷联惯导算法的误差模型，若改变捷联惯导算法的结构，比如将外界阻尼信息引入算法，会得到更为简洁的误差模型，暂且称之为阻尼SINS算法和阻尼SINS误差模型。例如在进行SINS与GPS组合动基座初始对准中，GPS可提供比较准确的速度 v_g^n 和位置 L_g、λ_g、h_g 信息；或者在进行SINS静基座(无线运动但可有角运动)初始对准过程中，参考速度为0且地理位置准确已知，这2种情况下均可将速度和位置信息引入捷联惯导算法。阻尼SINS算法及其误差模型在初始对准中有着重要的实用价值。下面以GPS信息阻尼为例简化SINS误差模型，而静基座情况类似。

建立GPS阻尼SINS算法的基本方法是，在(1)式～(3)式右端以GPS信息求取与速度和位置有关的计算参量，即将(1)式～(3)式改写成

$$\hat{C}_b^{n'}=C_b^{n'}(\hat{\omega}_{nb,g}^b\times)\tag{34}$$

$$\dot{v}^n=C_b^n f_{sf}^b-(2\omega_{ie}^n+\omega_{en}^n)\times v^n+g^n\tag{35}$$

$$\dot{\hat{L}}=\frac{v_N^n}{R_{M,g}+h_g},\dot{\hat{\lambda}}=\frac{\hat{v}_E^n\sec L_g}{R_{N,g}+h_g},\dot{\hat{h}}=\hat{v}_U^n\tag{36}$$

式中 $\hat{\omega}_{nb,g}^b=\hat{\omega}_{ib}^b-C_{n'}^b\omega_{in,g}^n$，下标中含符号 g 的项表示由GPS信息计算获得的，如果认为GPS信息误差很小可以忽略其影响，将这些计算参量等效于真实值，则类似于推导纯捷联惯导算法误差模型的方法，可得阻尼SINS误差模型

$$\dot{\alpha}=C_\omega^{-1}[(I-C_n^{n'})\omega_{in,g}^n-\varepsilon^{n'}]\tag{37}$$

$$\delta\dot{v}^n=[I-(C_n^{n'})^{\mathrm{T}}]\hat{f}_{sf}^{n'}+(C_n^{n'})^{\mathrm{T}}\nabla^{n'}\tag{38}$$

$$\delta\dot{L}=\frac{1}{R_{M,g}+h_g}\delta v_N^n$$

$$\delta\dot{\lambda}=\frac{\sec L_g}{R_{N,g}+h_g}\delta v_E^n\quad\delta\dot{h}=\delta v_U^n\tag{39}$$

由(37)式～(39)式可见，欧拉平台误差角 α 微分方程中不含速度误差和位置误差信息、速度误差 δv^n 微分方程中不含位置误差信息，从欧拉平台误差角到速度误差再到位置误差是一个“简单的直接累积”的过程，速度误差或位置误差中包含有欧拉平台误差角的信息，应用阻尼SINS算法(34)式～(36)式及其误差模型(37)式～(39)式进行初始对准有助于减小计算量和降低误差分析的复杂度。

若在静基座下，假设 α_x 和 α_y 是小量，将(29)式

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

代入(37)式和(39)式，可求得大方位失准角下的阻尼 SINS 欧拉平台误差角和速度误差方程的展开式

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_x = -s\alpha_z\omega_N + \alpha_y\omega_U - \varepsilon_x^{n'} \\ \dot{\alpha}_y = (1-c\alpha_z)\omega_N - \alpha_x\omega_U - \varepsilon_y^{n'} \\ \dot{\alpha}_z = \alpha_x c\alpha_z\omega_N - \varepsilon_z^{n'} \\ \delta\dot{v}_x^n = (1-c\alpha_z)\hat{f}_{sfx}^{n'} + s\alpha_z\hat{f}_{sfy}^{n'} - \\ \quad (\alpha_y c\alpha_z + \alpha_x s\alpha_z)\hat{f}_{sfz}^{n'} + c\alpha_z\nabla_x^{n'} + s\alpha_z\nabla_y^{n'} \\ \delta\dot{v}_y^n = -s\alpha_z\hat{f}_{sfx}^{n'} + (1-c\alpha_z)\hat{f}_{sfy}^{n'} - \\ \quad (\alpha_y s\alpha_z - \alpha_x c\alpha_z)\hat{f}_{sfz}^{n'} - s\alpha_z\nabla_x^{n'} + c\alpha_z\nabla_y^{n'} \\ \delta\dot{v}_z^n = \alpha_y\hat{f}_{sfx}^{n'} - \alpha_x\hat{f}_{sfy}^{n'} + \nabla_z^{n'} \end{cases} \tag{40}$$

式中记 $\omega_N = \omega_{ie}\cos L$、$\omega_U = \omega_{ie}\sin L$。由于采用了速度阻尼，(40) 式右端除了不含速度误差项外，$\dot{\alpha}_z$ 与文献[2]中的(42)式不同，是因为本文考虑了 C_ω^{-1} 的影响，作者认为这里的分析更加全面和精确。

2.4　SINS 非线性误差模型准确性仿真

文献[6]提到了状态方程(误差模型)准确性检验的问题，SINS 误差模型描述了 SINS 误差的传播特性，以 SINS 误差模型为滤波模型的状态估计效果直接与模型的准确性有关。本文为了验证 SINS 非线性误差模型的准确性，对由(37)式和(38)式组成的 GPS 辅助 SINS 初始对准的误差模型进行了仿真，仿真原理如图 1 所示，在给定轨迹、初始的欧拉平台误差角和速度误差条件下，分别实施阻尼 SINS 算法及其非线性误差方程的传播演算，最后比较 2 种算法结果的误差 $\delta v_{Err}^n = \delta v^n - (\hat{v}^n - v_g^n)$。

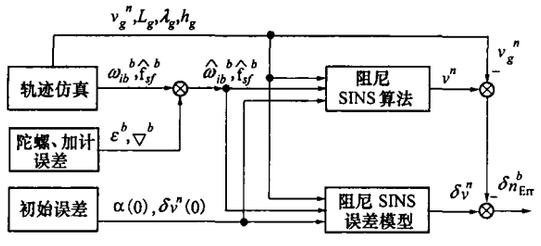


图 1　验证 SINS 非线性误差的仿真原理图

轨迹仿真设计为：①初始 $L=30°$、$\lambda=0°$、$h=100$ m、$\theta=\gamma=\psi=0°$，朝正北方向以 10 m/s 行驶，匀速行驶 30 s；②以加速度 1 m/s² 加速 20 s 至速度 30 m/s；③匀速行驶 30 s；④以 9°/s 角速度左转弯 10 s 至航向角 90°(朝正西方向)；⑤匀速行驶 30 s，共计仿真 120 s。陀螺漂移误差设为 0.05°/h、加计偏置误差设为 100 μg；初始误差设为 $\delta\alpha(0) = [30\ \ 30\ \ 180]^{\mathrm{T}}°$、$\delta v^n(0) = [0\ \ -10\ \ 0]^{\mathrm{T}}$m/s。阻尼 SINS 解算误差 $\hat{v}^n - v_g^n$ 如图 2 所示，误差量 δv_{Err}^n 如图 3 所示，其中实线、点划线、虚线分别是它们的东向、北向和天向分量。在图 3 中 80～90 s 之间误差快速增大是由于转弯过程中非线性误差模型的积分算法误差引起的(此处采用欧拉积分法解算阻尼 SINS 误差模型并且步长为 0.001 s)。当 α_x 和 α_y 高达 30°时，图 2 中 120 s 时 SINS 的北向速度误差高达 600 m/s，而图 3 表明阻尼 SINS 误差模型能完美反映 SINS 的速度误差特性，这是大方位失准角和小失准角 SINS 误差模型无法企及的。

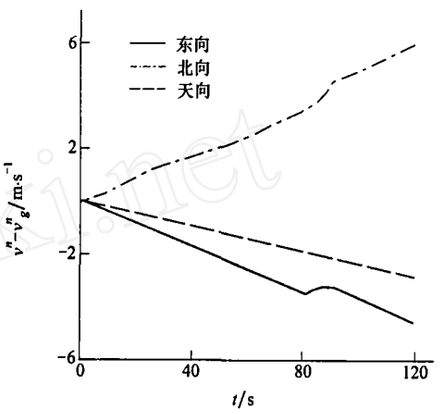


图 2　SINS 速度解算误差

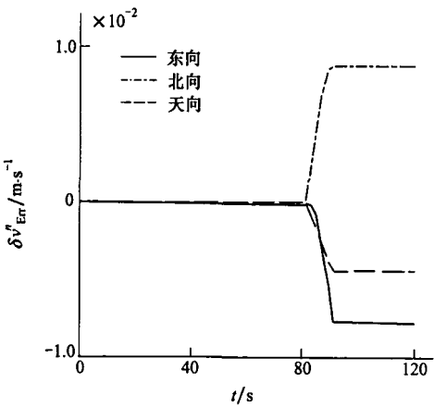


图 3　误差方程准确性

3　结　论

基于 EPEA 方法表示理论导航坐标系与计算导航坐标系之间的失准角，推导了 SINS 非线性误差模型，大欧拉平台误差角下的仿真结果表明所提出的误差模型能准确地反映 SINS 误差特性。以 EPEA 表示的 SINS 误差模型本质上是非线性的，所需的方程维数最少，通过特定条件下的简化，或通

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

过适当物理意义变换将非线性模型转换为线性模型是很有实用价值的，但从现有文献来看线性化均难以避免地增加了方程的维数[2~4,6,7]。有许多研究者提出了基于UKF(unscented Kalman filter)滤波解决大方位失准角下初始对准问题的方法，效果令人满意[5,6]。利用本文的误差模型和UKF滤波方法能否解决3个失准角均是大角度甚至任意未知时的初始对准问题还有待于进一步研究和仿真，如果可以实现的话，各种运动条件下的初始对准问题将会得到比较完满的解决，应用前景十分广阔。

参考文献：

[1] 秦永元. 惯性导航. 北京：科学出版社，2006
Qin Yongyuan. Inertial Navigation. Beijing: Science Press, 2006 (in Chinese)

[2] Dmitriyev S P, Stepanov O A, Shepel S V. Nonlinear Filtering Methods Application in INS Alignment. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1997, 33(1): 260~271

[3] Yu M J, Park H W, Jeon C B. Equivalent Nonlinear Error Models of Strapdown Inertial Navigation System. AIAA-97-3563

[4] Wu Y X, Hu X P, Wu M P, et al. Strapdown Inertial Navigation Using Dual Quaternion Algebra: Error Alalysis. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2006, 42(1): 259~266

[5] 王丹力，张洪钺. 惯导系统初始对准的非线性滤波算法. 中国惯性技术学报，1999，7(3)：17~21
Wang Danli, Zhang Hongyue. Nonlinear Filtering Algorithm for INS Initial Alignment. Journal of Chinese Inertial Technology, 1999, 7(3): 17~21 (in Chinese)

[6] 李东明. 捷联式惯导系统初始对准方法研究：[博士学位论文]. 哈尔滨：哈尔滨工程大学，2006
Li Dongming. Study on Initial Alignment Methods of Strapdown Inertial Navigation System. Ph. D. Thesis. Harbin: Harbin Engineering University, 2006 (in Chinese)

[7] Hong H S, Li J G, Park C G. In-Flight Alignment of SDINS under Large Initial Heading Error. AIAA-2001-4183

A SINS Nonlinear Error Model Reflecting Better Characteristics of SINS Errors

Yan Gongmin[1], Yan Weisheng[1,2], Xu Demin[1,2]

(1. College of Marine Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China
2. National Key Laboratory for Underwater Information Processing & Control at NWPU, Xi'an 710072, China)

Abstract: Aim. This paper starts with reviewing past research, leading to proposing a SINS(strapdown inertial navigation system) nonlinear error model that is better than previous ones in that it reflects, we believe, better the characteristics of SINS errors. The core of section 1 of the full paper consists of: (1) the angle of misalignment between the ideal navigation reference frame and the calculated one is described as the Euler platform error angle (EPEA); (2) the SINS nonlinear error model is deduced in some detail using the EPEA. Subsection 2.3 deduces the error model of the navigation algorithm named "damping SINS" by us with the objective of reducing calculation burden. Subsection 2.4 presents Figs. 2 and 3 giving the simulation results, which show preliminarily that the SINS nonlinear error model does reflect the SINS error characteristics better.

Key words: inertial navigation systems, computer simulation, SINS (strapdown inertial navigation system), Euler platform error angle(EPEA), nonlinear error model

© 1994-2009 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Study on SINS Rapid Gyrocompass Initial Alignment

YAN Gong-min, WENG Jun, YANG Peng-xiang, QIN Yong-yuan

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University,
Xi'an 710072, China)

Abstract: The basic principles for stabilized gyrocompass initial alignment are analyzed in platform inertial navigation system (PINS), then similar principles and initial alignment algorithms suitable for programming are proposed for strapdown inertial navigation system (SINS). The scheme of SINS gyrocompass initial alignment can be divided into four steps, including leveling alignment with header uncertainty, coarse header alignment, leveling realignment and gyrocompass alignment for header. By simplifying SINS nonlinear error model under header uncertainty, the formula of coarse header alignment is deduced. On the assumption of navigation computer having large memory and powerful computing ability, and basing on the 'multiformity' of SINS mathematical platform and the ability to attitude reverse control, a specific progress for SINS rapid gyrocompass alignment is introduced and designed in detail. Finally, some tests prove that the proposed alignment algorithm in this paper is effective.

1. Introduction

The scheme of gyrocompass initial alignment in platform inertial navigation system (PINS) usually can be divided into two steps, with leveling alignment firstly and then header alignment. Header alignment usually adopts the method of gyrocompass alignment after the finishing of horizontal leveling. Header gyrocompass alignment uses the principle of compass effect. In short, when platform tracks the local geographical coordinates at the correct angular rate control command, if the platform has a deviation angle along the heading axis, platform will produce a tilt along the axis of east direction, which can be sensed by accelerometer of north direction, using the north accelerometer output and an appropriate control law, which control platform orientate along heading axis at reducing deviation angle direction to realize platform north-seeking automatically. SINS alignment is usually divided into two stages: in coarse alignment stage, coarse calculating navigation system is built through the measurement of inertial devices which use the earth's rotation angular velocity and gravity acceleration as reference; in precise alignment stage, misalignment angle is evaluated by optimal estimation method through modern control theory to get precise attitude matrix[1,2].

The classic SINS analytic coarse alignment method isn't applicable in vibration environment. There are many literatures about initial alignment in dynamic environment and also some application examples, in particular, the development of laser gyroscope and fiber-optic gyroscope has been putting forward the study of strapdown gyrocompass [3-6]. Essentially, SINS and PINS are identical in some point of view, the former uses the mathematical tools (attitude matrix, quaternion or Euler angle) to simulate the latter's entity platform, and the mathematical tools describe strapdown system's frame with respect to special reference frame. It is well known that entity platform in PINS has an isolation function from external interference, thus the gyrocompass can realize initial alignment in a dynamic base environment, similarly, the corresponding mathematical platform of SINS can also be established according to the characteristics of PINS gyrocompass alignment to isolate external interference. Classical control theory compared to modern optimal estimation method, the

former has an advantages of not requiring accurate math model and noise model, moreover, the method to design gyrocompass alignment using classical control theory application is easy to reach. However, the platform gyrocompass alignment has a flaw of very long north-seeking time. In China, the fast strapdown gyrocompass initial alignment is a major problem urgently to be solved, while is has been resolved well in some western countries. Taking OctansIII fiber-gyro compass from iXSea as an example, it has the ability of accomplishing initial alignment in 3 minutes in dynamic environment and reaches a precision of $0.2^{o}\times\sec(L)$[5]. Based on the analysis of the platform gyrocompass initial alignment, the principle of strapdown gyrocompass initial alignment and software programming algorithm are presented. Using the simplification of large heading error nonlinear equation in SINS, coarse heading self-alignment algorithm method is also deduced. According to the characteristics of SINS, a specific procedures to shorten strapdown gyrocompass initial alignment time are designed and simulation tests verify that the fast strapdown gyrocompass alignment presented is efficient.

2. Gyrocompass Initial Alignment Principles in PINS

In this paper, "east-north-up" geographic coordinate, denoted as *n*, have been selected as navigation reference frame, and "right-front-up" frame, denoted as *b*, have been selected as SINS body frame.

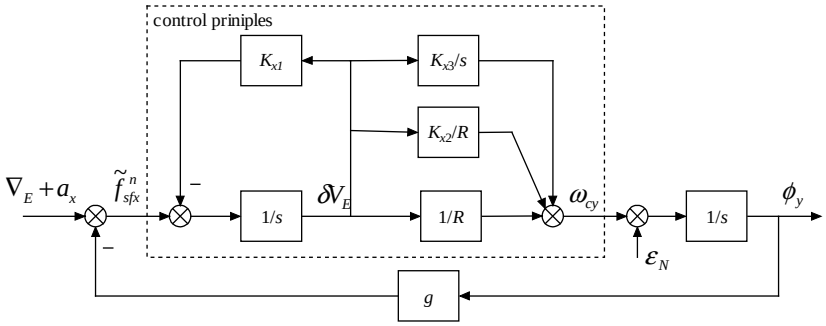


Fig. 1. East control loop of leveling alignment

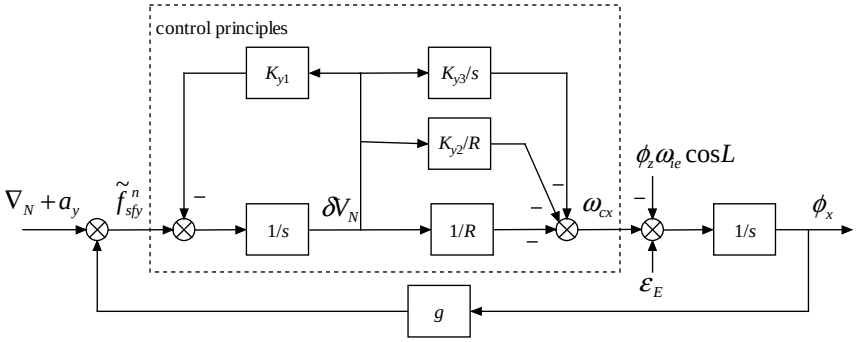


Fig. 2. North control loop of leveling alignment

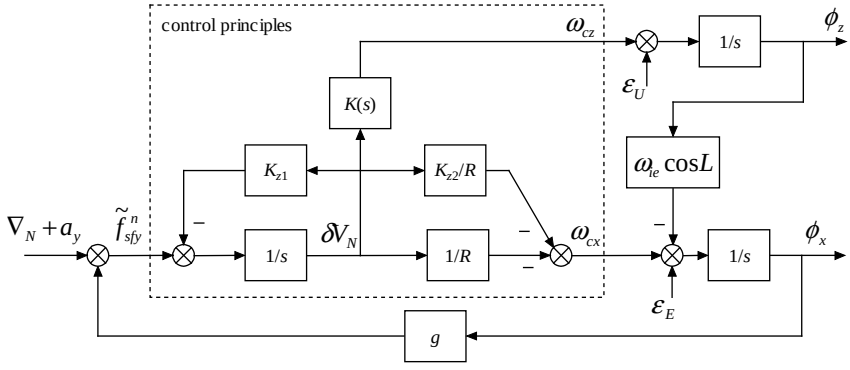


Fig. 3. Header control loop of compass alignment

Showing in fig.1-fig.3 are control principles of PINS gyrocompass initial alignment. The symbols in figs are as following:

∇_E and ∇_N - accelerometer bias for east and north direction;

a_x and a_y - environment disturbance acceleration;

$\tilde{f}_{sfx}^n$ and $\tilde{f}_{sfy}^n$ - accelerometer outputs;

ε_E, ε_N and ε_U - gyro drifts;

ϕ_E, ϕ_N and ϕ_U - platform misalignment angles;

ω_{cx}, ω_{cy} and ω_{cz} - control angular rate along east, north and up direction respectively;

ω_{ie}, g, R and L - earth rotation rate, earth gravity, earth radius and local geographic latitude, assumed as constants.

Also in these figs, the leveling alignment uses a three-order leveling loop and the header alignment uses four-order gyrocompass alignment loop on the basis of two-order north control loop of leveling alignment. Usually, $K(s) = K_{z3}/[(s + K_{z4})\omega_{ie}\cos L]$ is choose in gyrocompass alignment loop, where $K_{ij}(i = x, y, z; j = 1,2,3,4)$ are parameters in alignment control principles. According to the compass alignment performances, the typical parameters of east leveling control loop and header control loop are shown below:

$$K_{x1} = 3\sigma, \quad K_{x2} = \sigma^2(2 + 1/\xi^2)/\omega_s^2 - 1, \quad K_{x3} = \sigma^3/(g\xi^2) \tag{1}$$

$$K_{z1} = K_{z4} = 2\sigma, \quad K_{z2} = 4\sigma^2/\omega_s^2 - 1, \quad K_{z3} = 4\sigma^4/g \tag{2}$$

The performances selection of north control loop is similar to that of east control loop. In equ.(1,2), σ, ξ and $\omega_s = \sqrt{g/R}$ are decaying coefficient, damping ratio and schuler frequency respectively. Under certain alignment accuracy and rapidity request, the decaying coefficient is always adjusted according to environment interference in practice.

3. Strapdown Gyrocompass Initial Alignment Principles and Algorithm

The entity platform in PINS is replaced by mathematical platform in SINS, showed in fig.4. In this figure, $\tilde{\boldsymbol{C}}_b^n$ means strapdown attitude matrix, acts as mathematical platform, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b$ and $\tilde{\boldsymbol{f}}_{sf}^b$ mean outputs of gyro and accelerometer, $\boldsymbol{\omega}_c = [\omega_{cx} \quad \omega_{cy} \quad \omega_{cz}]^{\mathrm{T}}$ is the control angular rate vector to mathematical platform, and $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = [0 \quad \omega_{ie}\cos L \quad \omega_{ie}\sin L]^{\mathrm{T}}$, $\tilde{\boldsymbol{f}}_{sf}^b$ is transformed to $\tilde{\boldsymbol{f}}_{sf}^n = [\tilde{f}_{sfx}^n \quad \tilde{f}_{sfy}^n \quad \tilde{f}_{sfz}^n]^{\mathrm{T}}$ by matrix $\tilde{\boldsymbol{C}}_b^n$.

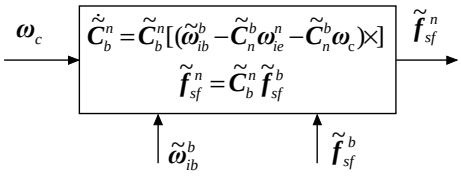


Fig. 4. SINS algorithm platform

In the platform control principles fig.1 - fig.3, part of the signal flow represents the motion law of the entity platform, another part means alignment control rule. By transplanted the platform signal flow into strapdown gyrocompass alignment, entity platform is replaced by mathematical platform, but the control principles don't have to make any change. Such as the east loop, strapdown gyrocompass leveling alignment is built by the combination of fig.1 and fig.4, and it is showed in fig.5. In fig.5, the measurement errors of gyros and accelerometers are implicit in the mathematical platform solutions. The difference between fig.1 and fig.5 is that the former is represented as platform error angle, which shows the error propagation principle directly, but the later shows that in mathematical platform. In fact, both entity and mathematical platforms are identical essentially about error propagation, however, fig.5 is more convenient for algorithm programming and comprehension.From fig.5, the control principle can be got as:

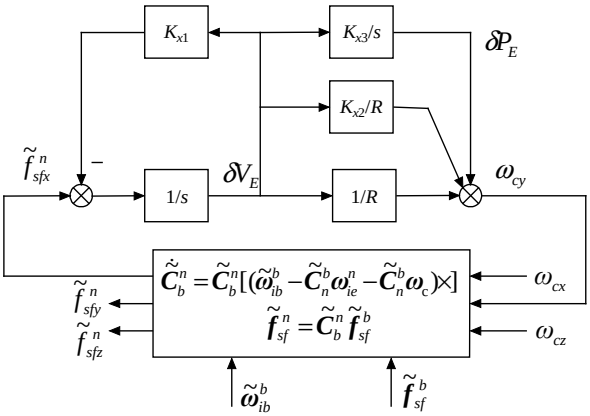


Fig. 5. SINS east control loop of leveling alignment

$$\delta V_E = (\tilde{f}^n_{sfx} - K_{x1}\delta V_E)/s \tag{3}$$

$$\delta P_E = \delta V_E K_{x3}/s \tag{4}$$

$$\omega_{cy} = \delta V_E(1+K_{x2})/R + \delta P_E \tag{5}$$

Assuming that the update time of strapdown mathematical platform is T_s, in practice, the time constant of alignment loop is always far more than T_s, so the first-order differential is appropriate for continuous-time principles to discretize, then equ.(3-5) can be written as

$$\delta V_{Ek} = \delta V_{Ek-1} + (\tilde{f}^n_{sfxk} - K_{x1}\delta V_{Ek-1})T_s \tag{6}$$

$$\delta P_{Ek} = \delta P_{Ek-1} + \delta V_{Ek}K_{x3}T_s \tag{7}$$

$$\omega_{cyk} = \delta V_{Ek}(1+K_{x2})/R + \delta P_{Ek} \tag{8}$$

where $k = 1,2,3....$ Similarly，strapdown gyrocompass north alignment channel fig.6 can be built through fig.2 and fig.4, while header gyrocompass channel fig.7 can be built through fig.3 and fig.4, and the control principles in fig.6 and fig.7 are discretized and showed in equ. (9-11) and equ. (12-14).

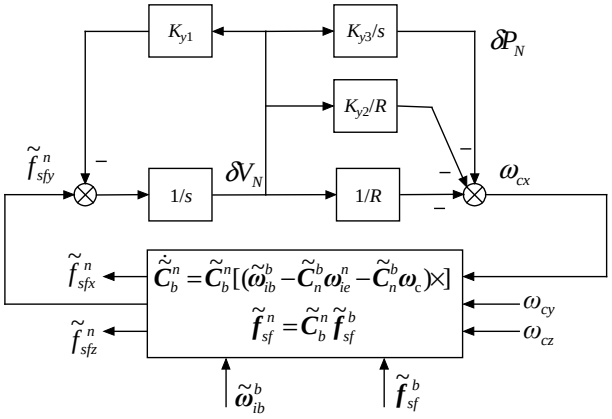


Fig. 6. SINS north control loop of leveling alignment

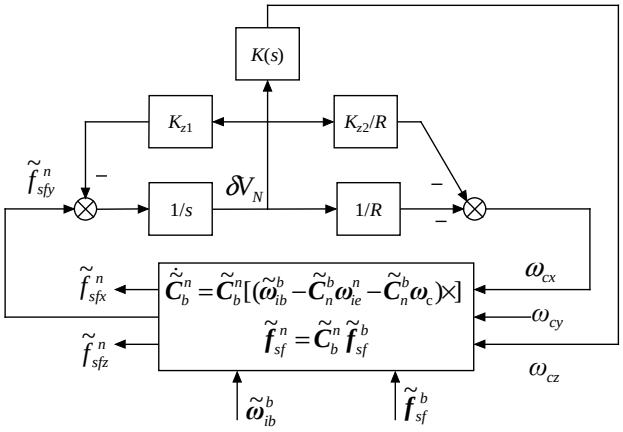


Fig. 7. SINS header control loop of compass alignment

$$\delta V_{Nk} = \delta V_{Nk-1} + (\tilde{f}^n_{sfyk} - K_{y1}\delta V_{Nk-1})T_s \tag{9}$$

$$\delta P_{Nk} = \delta P_{Nk-1} + \delta V_{Nk}K_{y3}T_s \tag{10}$$

$$\omega_{cxk} = -\delta V_{Nk}(1+K_{y2})/R - \delta P_{Nk} \tag{11}$$

$$\delta V_{Nk} = \delta V_{Nk-1} + (\tilde{f}^n_{sfyk} - K_{z1}\delta V_{Nk-1})T_s \tag{12}$$

$$\omega_{cxk} = -\delta V_{Nk}(1+K_{z2})/R \tag{13}$$

$$\omega_{czk} = [\delta V_{Nk}K_{z3}T_s/(\omega_{ie}\cos L) + \omega_{czk-1}]/(1+K_{z4}T_s) \tag{14}$$

Furthermore， by discretizing the strapdown mathematical platform to equ.(15,16) with update cycle T_s, whole strapdown gyrocompass initial alignment algorithm has been built from equ.(6) to equ.(16).

$$\tilde{C}^n_{bk} = \tilde{C}^n_{bk-1}[(\tilde{\omega}^b_{ibk}T_s - \tilde{C}^b_{nk-1}\omega^n_{ie}T_s - \tilde{C}^b_{nk-1}\omega_{ck}T_s)\times] \tag{15}$$

$$\tilde{f}^n_{sfk} = \tilde{C}^n_{bk}\tilde{f}^b_{sfk} \tag{16}$$

In practice, quaternion, equivalent rotation vector and coning motion compensation algorithm will be more benefit for calculation error decreasing instead of matrix update algorithm.

4. Initial Alignment Method of Strapdown Gyrocompass

The first step of PINS gyrocompass initial alignment is always given a coarse header angle by external device. In SINS, if the coarse angle is provided first, the course of strapdown gyrocompass alignment will be the same to that of platform. But in this paper, a gyrocompass initial alignment method without external coarse header is introduced, and the scheme can be divided into four steps with detail in the following.

(1) Leveling alignment with uncertain header angle

With uncertain header, it will work by set the initial value to zero. For the leveling attitude angles, they are generally not very large in the course of initial alignment for vessels and ships(such as less than 30º), and they are also assumed to be zeros in initial value setting. After the initialization of strapdown attitude matrix, fig.5 and fig.6 are used for leveling alignment scheme, while just setting the control angle rate component ω_{cz} to zero. Because of the uncertain header angle, header error angle may be very large, the earth rotation angular rate can be equivalent to gyro drift and seen as a disturbance to leveling alignment. By analysis of the third-

order leveling alignment loop, it is easy to know that the earth rotation interference doesn't influence the precision of leveling alignment, and the steady precision still lie on the accelerometers bias. It is assumed that attitude matrix $\tilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_{h1})$ is obtained at the leveling alignment step.

(2) Coarse header self-alignment

After the first step, leveling attitude error can reach requirement of small values at several arc-minute level, while assume header angle error to be large. Firstly in this step, use equ.(17,18) to proceed strapdown inertial navigation velocity update despite of large header error, and the navigation velocities also represent velocity errors in static base.

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{C}}}_b^n = \tilde{\boldsymbol{C}}_b^n[(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{ib}^b - \tilde{\boldsymbol{C}}_n^b \boldsymbol{\omega}_{ie}^n)\times] \tag{17}$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{V}} = \tilde{\boldsymbol{C}}_b^n \tilde{\boldsymbol{f}}_{sf}^b \tag{18}$$

where $\delta\dot{\boldsymbol{V}} = [\delta V_E \quad \delta V_N \quad \delta V_U]^{\mathrm{T}}$, and the initial mathematical platform and velocity are set as $\tilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_{h1})$ and $\delta\dot{\boldsymbol{V}}(0) = 0$ respectively. Secondly, simplify strapdown inertial navigation nonlinear error formula under large header error[7] and by ignoring some secondary factors, such as leveling attitude error, we can get

$$\dot{\phi}_x = -\sin(\phi_z)\omega_{ie}\cos L \tag{19}$$

$$\dot{\phi}_y = (1-\cos\phi_z)\omega_{ie}\cos L \tag{20}$$

$$\delta\dot{V}_E = -g(\phi_y\cos\phi_z + \phi_x\sin\phi_z) \tag{21}$$

$$\delta\dot{V}_N = g(\phi_x\cos\phi_z - \phi_y\sin\phi_z) \tag{22}$$

Make another differential to equ.(21,22) again, and by substituting in equ.(19,20), the relationship between velocity error and large error angle ϕ_z is written as

$$\delta\ddot{V}_E = g\omega_{ie}\cos L(\cos\phi_z - 1) \tag{23}$$

$$\delta\ddot{V}_N = -g\omega_{ie}\cos L\sin\phi_z \tag{24}$$

By executing strapdown inertial navigation velocity update using equ.(15,16) for a period of time $t_{\phi z}$ (such as 2 minutes), at the time $t_{\phi z}$, mathematical platform and velocity error will be $\tilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_{\phi z})$, $\delta V_E(t_{\phi z})$ and $\delta V_N(t_{\phi z})$. Equ.(23,24) show that velocity errors have characteristic of square divergence relative to header error, and a coarse header error is obtained at $t_{\phi z}$, that is

$$\cos\phi_z = 2\delta V_E(t_{\phi z})/(t_{\phi z}^2 g\omega_{ie}\cos L) + 1 \tag{25}$$

$$\sin\phi_z = -2\delta V_N(t_{\phi z})/(t_{\phi z}^2 g\omega_{ie}\cos L) \tag{26}$$

At last, set up correcting matrix as $\boldsymbol{C}_{\phi z} = \begin{bmatrix} \cos\phi_z & -\sin\phi_z & 0 \\ \sin\phi_z & \cos\phi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ and make multiplication to the attitude matrix $\tilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_{\phi z})$, then the coarse self-alignment attitude matrix is obtained like this

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_b^{n\prime}(t_{\phi z}) = \tilde{\boldsymbol{C}}_b^n(t_{\phi z})\boldsymbol{C}_{\phi z} \tag{27}$$

(3) Leveling re-alignment

Mathematical platform $\tilde{C}_b^n(t_{h1})$ is already obtained in step(1), but via step(2) of coarse header self-alignment, the leveling error angle in $\tilde{C}_b^{n'}(t_{\phi z})$ might become rather large (such as 0.5º). Therefore, a leveling re-alignment under the condition of none-large header error is needed, where it is different from step (1). To this point, all preparation has been done for the later gyrocompass header alignment.

(4) Gyrocompass header alignment

After coarse header alignment and precise leveling alignment, control principles of fig.5 and fig.7 will be executed simultaneously. Using fig.5 to keep accuracy of east alignment channel, while in fig.7, the main effort is to reach gyrocompass header alignment and also keep north alignment accuracy.

It is easy to see that step (3) and (4) are the same as platform gyrocompass alignment course with external coarse header angle, and the control parameter setting in these two steps can also refer to parameter design in platform gyrocompass alignment. But the difference between classic platform gyrocompass alignment and method in this paper is that a header alignment method is presented through SINS nonlinear error equation under large header error, and the coarse header error is obtained from velocity errors.

5. Alignment Tests and Conclusion

In the tests, gyrocompass initial alignment tests are carried out using laser gyro strapdown inertial measurement unit (LGSIMU), with gyro drift stability being 0.01º/hr and accelerometer bias being 0.5×10^{-4}g. Install LGSIMU on vehicle and preheat for preparation. At the beginning, the vehicle remains static for 300sec, then test persons perform motions including opening and closing door, getting on and off the vehicle, walking on the car, and interference continues for about 300sec. All of the 600 sec sampling data of gyro and accelerometer are stored to computer for later data processing. Two data processing algorithms are presented:

(1) Taking original data from 0sec to 300sec, traditional Kalman filtering method is used for initial alignment, then attitude tracking is executed from 300sec to 600sec and the header tracking is seen as a reference to gyrocompass alignment result.

(2) Using data from 300sec to 600sec, initial alignment test is executed according to the procedures in section 4. A header error of about 3º is achieved in the coarse header-alignment step. Gyrocompass header alignment step are conducted for 4 times repeatedly and the header errors between gyrocompass header alignment and attitude tracking above are showed in fig.8, where the numbers on curves denote the times of gyrocompass alignment. As can be seen from the figure, the third curve has been small to less than 0.02º and it can achieve header alignment accuracy requirement, while the fourth curve no longer reduces error essentially. By comparison, in the conventional method it takes at least 15min for completing the initial gyrocompass alignment, but in the improved method it only needs 5min sampling data to finish the alignment, so the improved gyrocompass initial alignment method

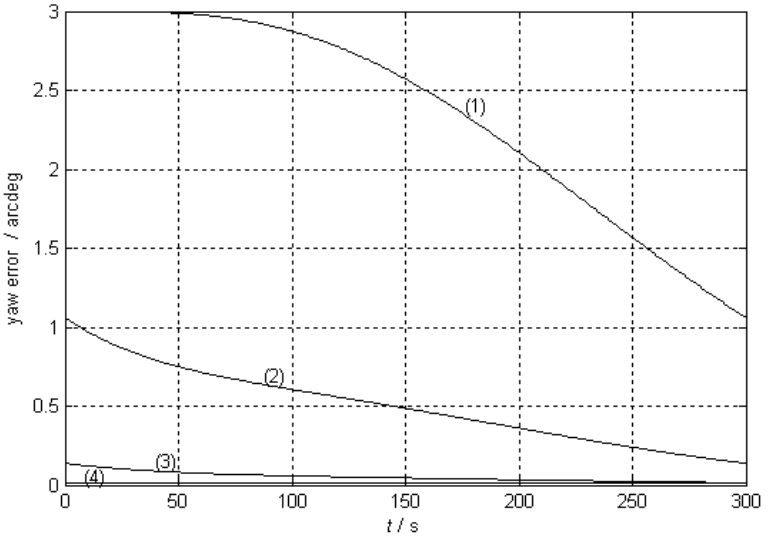


Fig. 8. Header errors in SINS gyrocompass alignment test

presented in this paper can shorten the alignment time effectively.

As can be pointed out in the end, if an external velocity aid is provided, the gyrocompass initial alignment method can be applied into move base appropriately. Furthermore, for Kalman filtering based on modern control and optimal estimation theory, the state estimate is always relevant with the initial value setting and large initial value usually causes estimate converge slowly, so a similar technique of repeated data processing may be useful to shorten time in the Kalman filtering initial alignment.

References:

[1] QIN Yongyuan. Inertial navigation[M]. Beijing: Science Press,2006

[2] WAN Dejun, FANG Jiancheng. Inertial navigation initial alignment[M]. Nanjing: Southeast University Press,1998

[3] QIN Yongyuan, YAN Gongmin, GU Dongqing,et al. A clever way of SINS coarse alignment despite rocking ship[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University. 2005,23(5): 681-684

[4] Sandoval Romero G E. Fiber Optic Gyrocompass Superluminescent Fiber Source[J]. IEEE A&E Systems Magazine,2005,7:19-20

[5] iXSea Ltd, OctansIII UG Part 1 Introduction MU-OCTIII-002-A.pdf[EB/DK],2004,7

[6] WANG Jin. Study on gyrocompass alignment for SINS[D]. Changsha: National University of Defense Technology,2005

[7] DING Yangbin, WANG Xinlong, WANG Zhen, et al. Study on unscented Kalman filter applied in initial alignment of large azimuth misalignment on static base of SINS[J].Journal of Astronautics,2006,27(6):1201-1204

[8] YAN Gongmin, YAN Weisheng, XU Demin. On reverse navigation algorithm and its application to SINS gyro-compass in-movement alignment[C]. Proceedings of the 27th Chinese Control Conference, July 16-18,2008, Kunming,China. Vol.5:724-729

一种改进 RLS 算法及其在 SINS 快速对准中的应用

严恭敏，白 亮，赵长山，秦永元
(西北工业大学自动化学院，西安 710072)

摘 要：在传统递推最小二乘算法(RLS)中，人为设置的递推初始值将导致状态估计的有偏性，也就丧失了最优性，当量测数据次数较小时尤为严重。摒弃了传统 RLS 算法“新估计值 = 旧估计值 + 修正值”的递推结构，提出了借助中间量进行递推，再由中间量直接作状态估计的改进算法。改进 RLS 算法状态估计结果与批处理 LS 算法完全一致，且无需初始状态的任何信息。将改进 RLS 算法应用于捷联惯导系统(SINS)初始对准。对于一定的初始对准精度要求，理论上改进 RLS 算法所需的初始对准时间是最短的。最后，SINS 初始对准数值仿真结果验证了所提算法的正确性。

关键词：捷联惯性导航系统；递推最小二乘法；初始对准
中图分类号：V249.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-1328(2010)08-1958-06
DOI:10.3873/j.issn.1000-1328.2010.07.000

An Improved RLS Algorithm and Its Application in SINS Rapid Initial Alignment

YAN Gong-min, BAI Liang, ZHAO Chang-shan, QIN Yong-yuan
(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The classic recursive least square (RLS) algorithm has a disadvantage, i.e. the artificial setting for state initialization may lead to state estimate bias and then lose optimality, especially under the case of small amount of observations. By rejecting the classic recursive estimate structure of 'new state value is equal to old state value plus correcting value', a new recursive algorithm is proposed. In the improved RLS algorithm, some intermediate variables are introduced, by which the state estimates can be calculated directly. The state estimate results of the improved RLS algorithm is identical to those of the batch least square algorithm, and the initial state statistics are also no more necessary. An example of initial alignment for a strapdown inertial navigation system (SINS) is introduced and the improved RLS algorithm is used to solve the problem. In theory the improved RLS algorithm has the least amount of alignment time under certain alignment accuracy requirement. Finally, some SINS initial alignment simulations are carried out and the results verify the proposed algorithm.

Key words: Strapdown inertial navigation system (SINS); Recursive least square algorithm (RLS); Initial alignment

0 引 言

最小二乘算法(Least Square,LS)在参数辨识、数值逼近、回归分析、信号处理和自动控制等许多领域得到了极为广泛和有效的应用，其递推算法——递推最小二乘算法(Recursive LS,RLS)——是利用计算机在线实时地实现 LS 算法的最理想形式。RLS 算法的特点在于：每取得一次新的量测数据时，就利用它对前一次参数估计结果进行修正，得出新的更加精确的参数估计值。RLS 算法与批量处理数据的 LS 算法相比，前者具有计算量小、贮存量少和实时性强等优点。在 LS 算法应用实践中，人们还提出了诸多改进的算法，如遗忘因子法、限定记忆法、广义最小二乘法、辅助变量法、增广最小二乘法、多级最

收稿日期:2009-06-06； 修回日期:2009-10-09

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

小二乘法和偏最小二乘法等[1,2],克服了标准最小二乘法的一些不足和扩展了应用范围。

然而,基于传统递推形式的 RLS 算法存在固有的缺陷。在启动 RLS 算法时需要事先设定待估计量的初始值和均方误差方差阵,当缺乏待估计量的初始统计信息时,传统 RLS 算法不能给出严格意义下的最小二乘估计。造成这一状况的主要原因在于待估计量的初值未知,而人为设置的初值一般是有偏的,将会导致后续估计值的有偏性,也就谈不上是最小方差估计,特别当量测次数较少时估计的有偏性逾明显,理论上只能通过增加量测次数削弱初值的负面影响,实现渐近最小二乘估计。国内刘轩黄教授基于矩阵广义逆理论在消除 RLS 初值影响方面进行了较多深入的研究[3-6],提出了无需事先提供待估计量的任何统计信息而能获得严格意义下的最小二乘估计(Rigorous RLS,R^2LS)的方法,R^2LS 估计精度与批处理 LS 算法完全相同,从而克服了传统 RLS 算法对初值的依赖,他还指出 R^2LS 是最短时间无偏状态估计的算法。

本文摒弃了标准 RLS 算法"新估计值 = 旧估计值 + 修正值"的递推结构,提出了借助中间量进行递推,再由中间量直接作状态估计的改进算法,它具备标准 RLS 算法计算量小、贮存量少、实时性强的优点。改进 RLS 算法状态估计结果与批处理 LS 算法完全一致,同样无需待估计量的任何初始信息,与刘教授的研究相比,本文的算法推导更加简单和易于理解。将改进 RLS 算法应用于捷联惯导系统(Strapdown Inertial Navigation System,SINS)参数辨识初始对准,由 R^2LS 结论和批处理 LS 状态估计无偏性特点,可得出结论:在一定初始对准精度要求的条件下,改进 RLS 算法所需的初始对准时间是最短的。

1　SINS 参数辨识初始对准与传统 RLS 算法介绍

1.1　SINS 参数辨识初始对准

假设 SINS 数学平台误差角是小角度,陀螺漂移 ε 和加速度计偏置 ∇ 均为常值,在以速度为量测的 SINS 静基座初始对准过程中,SINS 速度误差的变化规律为[7]

$$\Delta V_{Ek} = a_{1E}(kT_s) + a_{2E}(kT_s)^2 + a_{3E}(kT_s)^3 + V_{DEk} \quad (1)$$

$$\Delta V_{Nk} = a_{1N}(kT_s) + a_{2N}(kT_s)^2 + a_{3N}(kT_s)^3 + V_{DNk} \quad (2)$$

其中 $k = 1,2,3,\cdots$, T_s 为速度采样周期,ΔV_{Ek}、ΔV_{Nk} 分别为 kT_s 时刻 SINS 东向和北向速度误差,V_{DEk} 和 V_{DEk} 分别为东向和北向速度量测干扰针声,a_{ij}($i = 1,2,3$; $j = E,N$)为待辨识常值参数。

当从速度误差中辨识出 a_{ij} 之后,实时计算 kT_s 时刻的 SINS 数学平台误差角的公式为

$$\phi_E(kT_s) = \phi_{E0} + (kT_s)u_E + \frac{(kT_s)^2}{2}\omega_e(u_N\sin L - u_U\cos L) \quad (3)$$

$$\phi_N(kT_s) = \phi_{N0} + (kT_s)u_N - \frac{(kT_s)^2}{2}\omega_e u_E\sin L \quad (4)$$

$$\phi_U(kT_s) = \phi_{U0} + (kT_s)u_U + \frac{(kT_s)^2}{2}\omega_e u_E\sin L \quad (5)$$

上述诸式右端各中间变量与参数 a_{ij} 之间的关系如下

$$u_E = \frac{2a_{2N}}{g},\quad u_N = -\frac{2a_{2E}}{g}$$

$$u_U = u_N\tan L - \frac{6a_{3N}}{g\omega_e\cos L} \quad (6)$$

$$\phi_{E0} = \frac{a_{1N} - \nabla_N}{g},\quad \phi_{N0} = \frac{\nabla_E - a_{1E}}{g}$$

$$\phi_{U0} = \phi_{N0}\tan L - \frac{u_E + \varepsilon_E}{\omega_e\cos L} \quad (7)$$

其中 ω_e、g 和 L 分别为地球自转角速率、重力加速度大小和当地地理纬度,且均为已知量。由于陀螺漂移和加速度计偏置未知且在静基座下不可测,在计算中间变量 ϕ_{E0},ϕ_{N0},ϕ_{U0} 时只能将 ∇_N,∇_E,ε_E 的影响忽略,因此 ∇_N,∇_E,ε_E 也就构成了初始对准精度的决定因素。

从以上参数辨识初始对准方法中可以看出,速度误差随时间呈三次曲线规律变化(见式(1)、(2)),首先利用一定方法从速度误差中辨识各次项系数 a_{ij},再利用 a_{ij} 计算对准初始时刻的常值姿态误差和其它一些中间变量(见式(6)、(7)),并根据姿态误差随时间的变化规律求解实时姿态误差(见式(3)—(5)),最后使用实时姿态误差修正当前粗略数学平台,获得准确数学平台(一般只需在对准末了时刻作一次修正即可),具体修正算法详见文献[8]。在以上步骤中,实现快速高精度初始对准的关键在于准确辨识参数 a_{ij}。

1.2　传统 RLS 算法

对某系统的参数作测量,记第 k 次量测方程为

$$Z_k = H_k X + V_k \quad (8)$$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中 Z_k 是 m 维量测向量，X 是 n 维待估常值参数向量(或称状态)，V_k 是 m 维量测噪声并且假设均值 $E[V_k]=0$ 和方差阵 $E[V_jV_k^T]=R_k\delta_{jk}$，$H_k$ 是 $m\times n$ 维量测矩阵，则关于 X 的传统 RLS 算法公式为

$$K_k = P_{k-1}H_k^T(H_kP_{k-1}H_k^T + W_k^{-1})^{-1} \tag{9}$$

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{k-1} + K_k(Z_k - H_k\hat{X}_{k-1}) \tag{10}$$

$$P_k = (I - K_kH_k)P_{k-1} \tag{11}$$

其中 K_k、P_k 分别称为增益矩阵和状态估计均方误差阵，W_k 为加权矩阵，当取 $W_k=R_k^{-1}$ 时 $\hat{X}_k$ 是 X 的最小方差估计，本文主要针对该情况进行讨论。实际使用时通常取初始值 $\hat{X}_0=0$ 和 $P_0=\alpha I$，α 为很大的正数，I 和 0 分别代表适当维数的单位矩阵和零矩阵(下同)。显而易见，传统 RLS 算法是经典 Kalman 滤波中当状态转移矩阵为单位阵且过程噪声为零时的一个特例，或者说可以将最小二乘法的状态方程看作 $X_k=\Phi_{k,k-1}X_{k-1}+Q_{k-1}$ 且 $\Phi_{k,k-1}=I$ 和 $Q_{k-1}=0$。

2 改进 RLS 算法及其特点

2.1 改进 RLS 算法

若记

$$\bar{Z}_{k-1}=\begin{bmatrix}Z_1\\Z_2\\\cdots\\Z_{k-1}\end{bmatrix},\ \bar{H}_{k-1}=\begin{bmatrix}H_1\\H_2\\\cdots\\H_{k-1}\end{bmatrix},\ \bar{V}_{k-1}=\begin{bmatrix}V_1\\V_2\\\cdots\\V_{k-1}\end{bmatrix} \tag{12}$$

且有 $E[\bar{V}_{k-1}\bar{V}_{k-1}^T]=\bar{R}_{k-1}=\mathrm{diag}(R_1, R_2, \cdots, R_{k-1})$，则前 $k-1$ 次量测可合并在一起简写成

$$\bar{Z}_{k-1}=\bar{H}_{k-1}X+\bar{V}_{k-1} \tag{13}$$

由 $\bar{Z}_{k-1}$ 对 X 作最小二乘估计，结果为

$$\hat{X}_{k-1}=(\bar{H}_{k-1}^T\bar{R}_{k-1}^{-1}\bar{H}_{k-1})^{-1}\bar{H}_{k-1}^T\bar{R}_{k-1}^{-1}\bar{Z}_{k-1}$$

$$=\Lambda_{k-1}^{-1}\mu_{k-1} \tag{14}$$

其中记

$$\Lambda_{k-1}=\bar{H}_{k-1}^T\bar{R}_{k-1}^{-1}\bar{H}_{k-1},\ \mu_{k-1}=\bar{H}_{k-1}^T\bar{R}_{k-1}^{-1}\bar{Z}_{k-1} \tag{15}$$

而前 k 次的测量可写成

$$\bar{Z}_k=\bar{H}_kX+\bar{V}_k \tag{16}$$

若记

$$\Lambda_k=\bar{H}_k^T\bar{R}_k^{-1}\bar{H}_k,\ \mu_k=\bar{H}_k^T\bar{R}_k^{-1}\bar{Z}_k \tag{17}$$

则由前 k 次量测式(16)确定的 X 最小二乘估计可写成

$$\hat{X}_k=(\bar{H}_k^T\bar{R}_k^{-1}\bar{H}_k)^{-1}\bar{H}_k^T\bar{R}_k^{-1}\bar{Z}_k=\Lambda_k^{-1}\mu_k \tag{18}$$

现展开式(17)并整理得

$$\Lambda_k=[\bar{H}_{k-1}^T\quad H_k^T]\begin{bmatrix}\bar{R}_{k-1}^{-1}&0\\0&R_k^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{H}_{k-1}\\H_k\end{bmatrix}$$

$$=\bar{H}_{k-1}^T\bar{R}_{k-1}^{-1}\bar{H}_{k-1}+H_k^TR_k^{-1}H_k$$

即

$$\Lambda_k=\Lambda_{k-1}+H_k^TR_k^{-1}H_k \tag{19}$$

$$\mu_k=[\bar{H}_{k-1}^T\quad H_k^T]\begin{bmatrix}\bar{R}_{k-1}^{-1}&0\\0&R_k^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{Z}_{k-1}\\Z_k\end{bmatrix}$$

$$=\bar{H}_{k-1}^T\bar{R}_{k-1}^{-1}\bar{Z}_{k-1}+H_k^TR_k^{-1}Z_k$$

即

$$\mu_k=\mu_{k-1}+H_k^TR_k^{-1}Z_k \tag{20}$$

至此，式(18) - (20)构成了改进 RLS 算法，它与传统 RLS 算法的不同之处在于使用中间变量 Λ_k 和 μ_k 进行递推，再直接计算状态估计 $\hat{X}_k$，而不像式(10)在表示形式上前后状态估计 $\hat{X}_{k-1}$ 与 $\hat{X}_k$ 之间存在直接递推关系。如果将式(19)、(20)改成累加求和方式表示，则有

$$\Lambda_k=\Lambda_0+\sum_{j=1}^{k}H_j^TR_j^{-1}H_j \tag{21}$$

$$\mu_k=\mu_0+\sum_{j=1}^{k}H_j^TR_j^{-1}Z_j \tag{22}$$

$$\hat{X}_k=(\Lambda_0+\sum_{j=1}^{k}H_j^TR_j^{-1}H_j)^{-1}(\mu_0+\sum_{j=1}^{k}H_j^TR_j^{-1}Z_j)$$

$$=(\Lambda_0+\sum_{j=1}^{k}H_j^TR_j^{-1}H_j)^{-1}\mu_0+$$

$$(\Lambda_0+\sum_{j=1}^{k}H_j^TR_j^{-1}H_j)^{-1}\sum_{j=1}^{k}H_j^TR_j^{-1}Z_j \tag{23}$$

由此可见，在利用改进 RLS 算法时，可选择中间变量的初始值 $\Lambda_0=0$ 和 $\mu_0=0$，其估计结果与批处理 LS 算法完全相同。然而，为了使式(18)的计算可行，必须保证 Λ_k 可逆，解决该问题的办法是，从零时刻开始每当增加一次新的量测时，先利用式(19)和(20)进行 Λ_k 和 μ_k 递推解算，如果 Λ_k 不可逆则暂不作状态估计，直到最少第 s 次量测到达计算 Λ_s 可逆时，才开始首次计算状态估计 $\hat{X}_s=\Lambda_s^{-1}\mu_s$。显然，由于 $\Lambda_s>0$ (正定)且对于任意时刻有 $H_j^TR_j^{-1}H_j\geq 0$ (非负定)，所以在递推 s 步之后 $\Lambda_k(k>s)$ 均是正定可逆的；而在 s 步之前由于 $\Lambda_k(k<s)$ 不可逆，理论上 X 是不可估计的，从这一角度上看，传统 RLS

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

算法中获得的估计 $\hat{X}_k$(当 $k < s$ 时)只是形式上的,它是不准确甚至无实际意义的。

2.2 改进 RLS 算法与传统 RLS 算法的比较

对于式(11),根据普通 Kalman 滤波公式,状态估计方差阵的递推公式还可写成

$$\begin{aligned} P_k^{-1} &= P_{k-1}^{-1} + H_k^{\mathrm{T}} R_k^{-1} H_k \\ &= P_0^{-1} + \sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} H_j \end{aligned} \tag{24}$$

只要选择 $P_0 > 0$,则理论上必有 $P_k > 0$。再者,如果将传统 RLS 算法写成如下形式,并展开整理得

$$\begin{aligned} \hat{X}_k &= P_k \bar{H}_k^{\mathrm{T}} \bar{R}_k^{-1} \bar{Z}_k = P_k \left(H_0^{\mathrm{T}} R_0^{-1} Z_0 + \sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} Z_j \right) \\ &= \left(P_0^{-1} + \sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} H_j \right)^{-1} \times \\ &\quad \left[P_0^{-1} \left(P_0 H_0^{\mathrm{T}} R_0^{-1} Z_0 \right) + \sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} Z_j \right] \\ &= \left(I + \sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} H_j P_0 \right)^{-1} \hat{X}_0 + \\ &\quad \left(P_0^{-1} + \sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} H_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} Z_j \end{aligned} \tag{25}$$

比较式(23)和(25)知,在形式上有 $P_k = \Lambda_k^{-1}$ 和 $\hat{X}_k = P_k \mu_k$ 成立(如果 Λ_k 可逆的话)。在式(25)中,当仅考虑初值 $\hat{X}_0$ 的作用时,如果 $\hat{X}_0 = \mathbf{0}$ 则它对状态估计 $\hat{X}_k$ 没有任何贡献;如果 $\hat{X}_0 \neq \mathbf{0}$ 且 $P_0 > 0$,则 $\hat{X}_0$ 对 $\hat{X}_k$ 的影响将随量测次数的增多,即 $\sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} H_j P_0$ 不断增大,而逐渐减弱;如果 $\hat{X}_0 \to X$ 且 P_0 很小,则有 $\hat{X}_k \approx (I + \mathbf{0})^{-1} \hat{X}_0 \to X$,也就是说,若人为设置初值与真值接近并且初值可信度很高,则后续每一步估计值都将非常接近于真值。对于式(25)后半部分量测信息 $\sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} Z_j$ 的作用而言,如果 P_0 很大(即 P_0^{-1} 很小),则量测信息方差阵 $\sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} H_j$ 将起主要作用,近似有 $\hat{X}_k \approx \left(\sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} H_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} Z_j$,此即为批处理 LS 算法的结果;反之,如果 $P_0 \to \mathbf{0}^+$,则 P_0 将起主要作用,而弱化了 $\sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} H_j$ 的影响,即量测信息对人为设置的初值 P_0 的依赖性很强,再考虑到 $\hat{X}_0$ 作用近似有 $\hat{X}_k \approx \hat{X}_0 + (\infty + \text{有限值})^{-1} \sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} Z_j \approx \hat{X}_0$,这显示,只要初值 $\hat{X}_0$ 与真值 X 之间存在差异,就会导致状态估计 $\hat{X}_k$ 难以收敛至真实值 X,即收敛速度变得非常慢。综合以上分析,欲使传统 RLS 算法估计结果与批处理 LS 算法一致,原则上存在两个设置初值的途径:一是取 $\hat{X}_0 = \mathbf{0}$ 和 $P_0 = \infty$;二是取 $\hat{X}_0 = X$ 和 $P_0 = \mathbf{0}^+$。

在改进 RLS 算法中,所有的量测数据 Z_k 都严格按照权重 R_k^{-1} 参与状态估计,改进 RLS 算法是最优的估计(均方误差最小),对于一定的状态估计精度要求,存在着一个最少的量测次数。而实际使用传统 RLS 算法时,真值 X 未知致使设置初值 $\hat{X}_0$ 为有偏估计,且 P_0 在数值上不能为无穷大,对于量测信息 $\sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} Z_j$ 来说 P_0^{-1} 起着量测信息“阻尼”的负面作用,且 P_0 越小惯性越大,或者说 P_0 使量测信息方差阵 $\sum_{j=1}^{k} H_j^{\mathrm{T}} R_j^{-1} H_j$ 作用降低了,只能通过增加量测次数来增强量测信息方差阵的作用。因此,欲达到与改进 RLS 算法一样的状态估计精度唯有增加传统 RLS 算法的量测次数,理论上改进 RLS 算法总比传统 RLS 算法收敛速度快,也就是说,由于初值选择的缺陷,相对于批处理 LS 来说传统 RLS 算法是次优的,改进 RLS 算法在测量值较少的情况下具备明显的优势(如基于多项式拟合的惯导系统零速修正场合[9])。

但是,如果将传统 RLS 算法的人为选择初值 $\hat{X}_0$ 和 P_0 作为附加先验条件,传统 RLS 算法在 Λ_k($k < s$)不可逆时,依然能够在形式上计算得到状态估计,可以认为该估计值在对应先验条件下是有意义的。基于这一观点,可以看出传统 RLS 算法与改进 RLS 算法的一个区别,若利用条件概率均值来描述的话,传统估计算法的表示为

$$\hat{X}_k = E[X / \hat{X}_0, P_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_k] \tag{26}$$

而改进算法为

$$\begin{aligned} \hat{X}_k &= E[X / Z_1, Z_2, \cdots, Z_k] \\ &= E[X / \hat{X}_0, P_0, Z_1, Z_2, \cdots, Z_k] \big|_{\hat{X}_0 = \mathbf{0},\ P_0 = \infty} \end{aligned} \tag{27}$$

即后者相当于对初值没有任何先验知识,完全依赖于量测进行状态估计。

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

为了更好理解以上结论,读者可以对简单标量测量方程 $z_k = x + v_k$,在初值 $\hat{x}_0$ 和 p_0 条件下的状态估计

$$\hat{x}_k = (1 + \sum_{j=1}^{k} 1/r \cdot p_0)^{-1} \hat{x}_0 + (1/p_0 + \sum_{j=1}^{k} 1/r)^{-1} \sum_{j=1}^{k} 1/r \cdot z_j = \frac{1}{1 + k \cdot p_0/r} \hat{x}_0 + \frac{1}{k + 1/(p_0/r)} \sum_{j=1}^{k} z_j \quad (28)$$

进行更具体形象的特性分析,其中 $E[v_k] = 0$ 且 $E[v_i v_j^T] = r\delta_{ij}$,$r$ 为常值。

值得指出的是,如果系统式(8)存在不可观测的状态或状态组合(以下将"状态或状态组合"简写成状态/组合),则量测信息方差阵 $\sum_{j=1}^{k} H_j^T R_j^{-1} H_j$ 中必定含有零特征值。若选择初始值 $\Lambda_0 = \mathbf{0}$,则 Λ_k 始终不可逆,从而无法按式(18)进行状态估计,这是改进 RLS 算法的一个缺点;而在传统 RLS 算法中,只要选择了 $P_0 > 0$,则 $P_0^{-1} + \sum_{j=1}^{k} H_j^T R_j^{-1} H_j$ 必定是可逆的,也就一定存在 P_k,进而能够得到状态估计,这是传统算法的优点,但是很明显,对于不可观测的状态/组合,其在信息方差阵增量 $H_j^T R_j^{-1} H_j$ 中对应的特征值增量必定为 0,因而与该状态/组合估计对应的方差阵 P_k 特征值不随时间减小,也就没有滤波效果,因此可将方差阵 P_k 特征值是否减小视为对应状态/组合是否可观的一个判断标志。有幸的是,在实际使用最小二乘法建立状态估计模型时,一般所有状态都是可估计的,正如 SINS 参数辨识初始对准 1.1 节的模型那样,这时改进 RLS 算法总是可行的。

当然,若在传统 RLS 算法中放弃 s 步量测之前的状态估计,在 s 时刻取初始值

$$P_s = \Lambda_s^{-1} = (\bar{H}_s^T \bar{W}_s \bar{H}_s)^{-1}$$

$$\text{和 } \hat{x}_s = \Lambda_s^{-1} \mu_s = P_s \bar{H}_s^T \bar{W}_s \bar{Z}_s \quad (29)$$

则在 s 时刻之后,传统 RLS 算法的估计结果与改进 RLS 算法完全一致。在系统量测矩阵 H_k 中一般有 $m < n$,对比式(9)和(18),可知前者比后者求逆矩阵阶数低,因而计算更小,这是传统 RLS 算法递推结构的一个优点。

3 初始对准仿真

以 SINS 参数辨识初始对准东向速度通道式(1)为例,有理由相信干扰误差 V_{DEk} 的随机统计特性是不随时间变化的,并且一般实际情况中也是这么处理的,假设 $E[V_{DEj} V_{DEk}^T] = R_{VDE}\delta_{jk}$,$R_{VDE}$ 为常值,因此批处理 LS 式(18)可简化为

$$\hat{X}_k = [\bar{H}_k^T \cdot (R_{VDE} I)^{-1} \cdot \bar{H}_k]^{-1} \bar{H}_k^T \cdot (R_{VDE} I)^{-1} \cdot \bar{Z}_k = (\bar{H}_k^T \bar{H}_k)^{-1} \bar{H}_k^T \bar{Z}_k \quad (30)$$

这相当于干扰误差 R_{VDE} 在 LS 估计中不起作用。若将式(1)写成

$$\Delta V_{Ek} = H_{Ek} a_E + V_{DEk} \quad (31)$$

其中记 $H_{Ek} = [kT_s \quad (kT_s)^2 \quad (kT_s)^3]$、$a_E = [a_{1E} \quad a_{2E} \quad a_{3E}]^T$,结合式(29)和(30)的结论,则以传统 RLS 算法递推结构表示的参数辨识初始对准改进 RLS 算法为

$$K_{Ek} = P_{Ek-1} H_{Ek}^T (H_{Ek} P_{Ek-1} H_{Ek}^T + 1)^{-1} \quad (32)$$

$$\hat{a}_{Ek} = \hat{a}_{Ek-1} + K_{Ek} (\Delta V_{Ek} - H_{Ek} \hat{a}_{Ek-1}) \quad (33)$$

$$P_{Ek} = (I - K_{Ek} H_{Ek}) P_{Ek-1} \quad (34)$$

这里 $k = 4, 5, \cdots$,且选取初值

$$\bar{H}_{E3} = \begin{bmatrix} T_s & T_s^2 & T_s^3 \\ 2T_s & (2T_s)^2 & (2T_s)^3 \\ 3T_s & (3T_s)^2 & (3T_s)^3 \end{bmatrix}, \quad P_{E3} = (\bar{H}_{E3}^T \bar{H}_{E3})^{-1}, \quad \hat{a}_{E3} = P_{E3} \bar{H}_{E3}^T \Delta \bar{V}_{E3}$$

。值得注意的是,这里状态估计 $\hat{a}_{Ek}$ 的真正方差阵并不是 P_{Ek}(伪方差阵),而应当是 $R_{VDE} P_{Ek}$;此外,P_{E3} 与采样 T_s 时间有关且不是对角阵,这从侧面反映了传统 RLS 算法的初值选择 $P_0 = \alpha I$ 考虑不够细致。

北向对准通道参数估计方法与东向通道类似,不再赘述。显然,若两个通道选择相同初值 $P_{N3} = P_{E3}$,则两通道对应时刻的状态估计伪方差阵也完全相等,即 $P_{Nk} = P_{Ek}$,并且 P_{Ek} 和 K_{Ek}(或 P_{Nk} 和 K_{Nk})只随量测次数变化而与速度误差量测 ΔV_{Ek}(或 ΔV_{Nk})无关,利用这些特点有助于简化初始对准程序设计,减小计算量。

设置 SINS 陀螺随机常值漂移 0.01°/h,噪声 0.001°/h,加速度计随机零偏 50μg,噪声 5μg,初始数学平台误差角 $\phi_{E0} = 1'$,$\phi_{N0} = 1'$,$\phi_{U0} = 30'$,量测速度采样时间 1 s,对准时间180 s。共进行了 3 组仿真,结果如图 1 所示(ϕ_{U0} 只显示局部细节),其中实线为改进 RLS 算法,而点划线为传统 RLS 算法,在传统算法中选择 $P_0 = \alpha I$,$\alpha = 0.1$。由图 1 可见,改

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

进算法水平平台误差角在 3 s 之后基本收敛,而传统算法需要 40 s;改进算法方位平台误差角在 60 s 之后具备一定的估计精度,而传统算法大约需要 80 s才能达到该精度,最终在180 s时,两种算法的水平平台误差角估计精度几乎相同,而方位平台误差角相差约 0.3′。图 1 还表现出以下特点(方位平台误差角尤为明显):改进算法的各仿真样本绕方位平台误差角理论极限值上下波动,逐渐收敛趋向极限值(无偏性),而传统算法从一侧逐渐收敛趋向极限值(有偏性),后者主要是由于 P_0 的阻尼作用引起的,但短时间内改进算法的波动幅值比传统算法的大。进一步仿真显示,如果减小 α 值,传统算法收敛速度会变得更慢,而增大 α 值有利于加快收敛速度,当 $\alpha = 10$ 时传统和改进两种算法波动幅值、收敛速度和最终收敛精度基本相同。

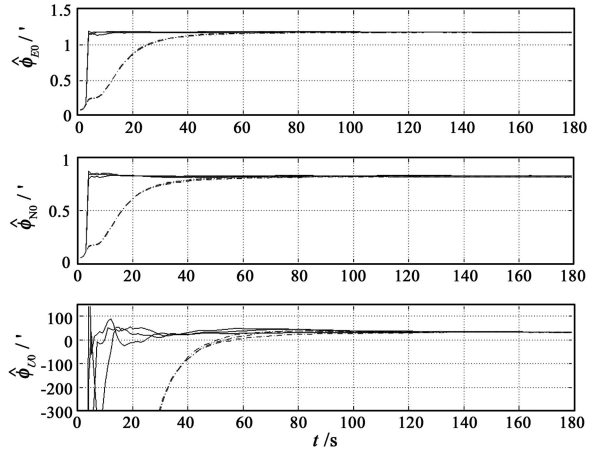


图 1　参数辨识初始对准仿真结果

Fig. 1　Initial alignment simulation results

4　结　论

在传统 RLS 算法应用中,只有深入了解系统各状态的物理含义,才能设置合适的 P_0 对角线上的元素大小,而很难确定非对角线上的元素值,只能将它们设成 0,但是各状态之间往往是相关的,因此,由于初值 P_0 选取的缺陷致使传统 RLS 算法不是全程最优的,而是渐近最优和渐近收敛的,收敛速度与初值有关。在一定状态估计精度条件下,理论上改进 RLS 算法收敛时间与批处理 LS 算法一样,是最短的。由于 RLS 是 Kalman 滤波的特例,或者说 Kalman 滤波是 RLS 的推广,本文关于初值问题探讨的结论也可推广至 Kalman 滤波,有助于加深对 Kalman 滤波的理解,当然,与 RLS 相比一般 Kalman 滤波模型更加复杂,在推广过程中肯定会遇到不少定量分析的困难,更深入的研究可参考文献[4,6]。

参　考　文　献

[1] Ljung L, Soderstrom T. Theory and practice of recursive identification [M]. Cambridge, MA, USA: The MIT Press, 1983.

[2] 刘强,尹力. 一种简化递推偏最小二乘建模算法及其应用[J]. 北京航空航天大学学报,2003,29(7):640 - 643. [Liu Qiang, Yin Li. Study on an improved recursive partial least-squares modeling approach and application[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2003, 29(7): 640 - 643.]

[3] Liu D Y, Liu X H. Optimal state estimation without the requirement of a priori statistics information of the initial state[J]. IEEE Transaction Automation on automatic control, 1994, 39(10): 2087 - 2091.

[4] 刘轩黄. 严格的最小二乘递推算法[J]. 海南大学学报,2000,18(3):222 - 226;18(4):337 - 342. [Liu Xuan-huang. The algorithms of rigorous recursive least square[J]. Natural Science Journal of Hainan University, 2000, 18(3): 222 - 226; 18(4): 337 - 342.]

[5] 刘轩黄. 严格的最小二乘递推算法的程序与算例[J]. 江西电力职业技术学院,2006,19(3):27 - 30. [Liu Xuan-huang. The computational procedure and example of the rigorous recursive least square algorithms[J]. Journal of Jiangxi Vocational and Technical College of Electricity, 2006, 19(3): 27 - 30.]

[6] 刘轩黄. 最小二乘递推算法和 Kalman 滤波算法[J]. 华东交通大学学报,1998,15(2):62 - 68. [Liu Xuan-huang. The algorithms of recursive least-square and kalman filtering[J]. Journal of East China Jiaotong University, 1998, 15(2): 62 - 68.]

[7] 秦永元,张洪钺,汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]. 西安:西北工业大学出版社,1998. [Qin Yong-yuan, Zhang Hong-yue, Wang Shu-hua. Kalman filter and the theory of integrated navigation[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1998.]

[8] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京:科学出版社,2006. [Qin Yong-yuan. Inertial navigation[M]. Beijing: Science Press, 2006.]

[9] 高钟毓,王进,董景新,等. 惯性测量系统零速修正的几种估计方法[J]. 中国惯性技术学报,1995,3(2):24 - 29. [Gao Zhong-yu, Wang Jin, Dong Jing-xin, et al. A comparison of ZUPT estimation methods for inertial survey systems[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 1995, 3(2): 24 - 29.]

作者简介:严恭敏(1977 -),男,副教授,博士,主要从事惯性导航与信息融合理论研究。

通信地址:陕西省西安市西北工业大学 183 号信箱(710072)

电话:(029)88431369

E-mail:yangongmin@163.com

(编辑:沃云峰)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

文章编号：1005-6734(2010)05-0523-04

捷联惯导系统改进参数辨识初始对准方法

严恭敏，翁 浚，赵长山，秦永元

（西北工业大学 自动化学院，西安 710072）

摘要：在线晃动干扰环境下，现有捷联惯导系统（SINS）参数辨识初始对准算法的观测方程建模存在不足，对准收敛速度和精度都会受到影响。提出了改进参数辨识初始对准算法，将计算干扰速度的平均值列入辨识模型参数，提高了初始对准的收敛速度和对准精度，此外，还推导了比力双重积分的参数辨识模型，有利于进一步抑制晃动干扰的影响。仿真结果表明，改进算法消除了现有对准算法中可能存在的固有偏差，获得更加平滑的失准角估计效果。

关 键 词：捷联惯导系统；初始对准；参数辨识；递推最小二乘法

中图分类号：U666.1 **文献标志码：**A

Improved parameter identification method for SINS initial alignment

YAN Gong-min, WENG Jun, ZHAO Chang-shan, QIN Yong-yuan

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The existing defects in parameter identification measurement model in traditional parameter identification method for the initial alignment of strap-down inertial navigation systems (SINS) reduce the alignment convergence speed and accuracy, especially under linear moving disturbance environment. In this paper, an improved parameter identification model is presented. It takes the average effect of linear disturbance into the identification model to improve the alignment convergence speed and accuracy. Moreover, an identification model of double integral of specific force is derived and adopted which significantly suppress the linear disturbance. Simulation results show that the inherent errors in alignment algorithm could be eliminated by the proposed method, and smoother estimated effects for misalignments are obtained.

Key words: strapdown inertial navigation system; initial alignment; parameter identification; recursive least square algorithm

捷联惯导系统（SINS）在导航之前必须进行初始对准，对准精度将直接影响系统导航性能[1]。通常把初始对准划分为粗对准和精对准两个阶段，粗对准主要目的是为了快速获得粗略姿态矩阵，而精对准的核心任务是通过一定方法精确估计出粗对准数学平台失准角。常用的精对准方法有罗经法、Kalman滤波法和参数辨识法等[2-3]。当对准环境较好时，容易实现高精度对准；但如果SINS基座存在诸如振动、晃动和摇摆等干扰时，同时伴随有角运动和线运动，其中角运动容易通过姿态更新进行隔离，而往往没有条件利用其它设备对线运动干扰进行测量和补偿，线运动干扰对初始对准结果影响比较大，只能通过改进对准方法作最大程度的抑制[4-5]。

当线运动干扰幅度较大时，罗经对准法需设置较长的阻尼时间常数，对准时间长。从理论上说，Kalman滤波方法需要准确已知的系统和观测白噪声模型，但特别在有规律的低频线晃动环境下，显然不再适合将观测误差视为白噪声。仿真表明，即使不对低频线晃动作任何处理，并不影响Kalman滤波的使用，也能获得振荡收敛的对准结果，但在设置观测噪声大小时常常存在困惑。利用递推最小二乘（RLS）参数辨识进行初始对准的优点是不需要给定观测误差大小，认为

收稿日期：2010-06-28；**修回日期：**2010-10-25

作者简介：严恭敏（1977—），男，副教授，博士，主要从事惯性导航与信息融合理论研究。E-mail：yangongmin@163.com

在对准过程中干扰是等强度的，即便干扰强度有变化对对准结果影响也不大。文献[6-7]首次提出参数辨识对准方法（本文将它称为传统方法），在其模型基础上文献[8]增加了一项辨识参数（V_{DE} 或 V_{DN}），但将该参数当作实时杆臂速度的看法是不合适的，因为杆臂速度是随时变化的，而列为辨识参数应为常值。事实上，文献[8]新增的辨识参数表示的是计算线运动（相对于真实线运动而言）干扰的平均值，本文通过分析验证了这一正确观点，此外，还提出了采用比力双重积分模型作为参数辨识对准的改进方法，有利于进一步削弱干扰的影响。

1 传统参数辨识初始对准

SINS 进行晃动基座下初始对准时，真实速度方向和大小交替反复，但从总体上来看无明显的位置移动，可使用简化版本的姿态更新方程实现数学平台跟踪，即：

$$\dot{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'}[(\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}'}^{\mathrm{b}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}})\times] \tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'}$ 代表 SINS 计算数学平台姿态矩阵；$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}}$ 是陀螺角速率输出；$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}}=\begin{bmatrix}0 & \omega_N & \omega_U\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$\omega_N=\omega_{\mathrm{ie}}\cos L$，$\omega_U=\omega_{ie}\sin L$，$\omega_{\mathrm{ie}}$ 为地球自转角速率，L 是对准当地地理纬度，准确已知。

若记 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'}$ 与理想数学平台 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$ 之间的失准角为 $\boldsymbol{\varphi}=\begin{bmatrix}\phi_E & \phi_N & \phi_U\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 且是小角度，即 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}'}\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}'}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\varphi}\times$，则由惯导误差方程可知失准角 $\boldsymbol{\varphi}$ 满足微分方程：

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{\varphi}-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{n}} \tag{2}$$

这里 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{n}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_E^{\mathrm{n}} & \varepsilon_N^{\mathrm{n}} & \varepsilon_U^{\mathrm{n}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 是等效陀螺随机常值漂移。直接求解微分方程（2），经适当近似后，可得失准角随时间的变化规律如下

$$\begin{cases}\phi_E=\phi_{E0}+u_E t+(\omega_U u_N-\omega_N u_U)(t^2/2)\\ \phi_N=\phi_{N0}+u_N t-\omega_U u_E(t^2/2)\\ \phi_U=\phi_{U0}+u_U t+\omega_U u_E(t^2/2)\end{cases} \tag{3}$$

其中，$\boldsymbol{\varphi}_0=\begin{bmatrix}\phi_{E0} & \phi_{N0} & \phi_{U0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\varphi}$ 在 $t=0$ 时刻的初始值，$\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}u_E & u_N & u_U\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，且中间量 $\boldsymbol{u}=-\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}}\times\boldsymbol{\varphi}_0-\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{n}}$，展开成分量形式即：

$$\begin{cases}u_E=\phi_{N0}\omega_U-\phi_{U0}\omega_N-\varepsilon_E^n\\ u_N=-\phi_{E0}\omega_U-\varepsilon_N^n\\ u_U=\phi_{E0}\omega_N-\varepsilon_U^n\end{cases} \tag{4}$$

容易看出，ϕ_{j0}、u_j（$j=E,N,U$）都是常值，由它们可计算得实时失准角 $\boldsymbol{\varphi}$，因而求解实时失准角的精对准问题可转化成求解常值 ϕ_{j0}、u_j 的参数辨识问题。为了辨识 ϕ_{j0}、u_j 需构造某种可方便获取的观测量，并且使观测量与 ϕ_{j0}、u_j 发生联系。

由惯导比力方程 $\dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}}-(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}})\times\boldsymbol{v}^{\mathrm{n}}+\boldsymbol{g}^{\mathrm{n}}$ 知，在晃动基座下近似有：

$$\dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}}=\boldsymbol{g}^{\mathrm{n}} \tag{5}$$

这里 $\dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}}$ 表示线晃动干扰加速度，若采用计算数学平台和实际加速度计输出 $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}}$ 代入式（5），可得：

$$\dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}'}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'}(\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}}-\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{b}})=\boldsymbol{g}^{\mathrm{n}} \tag{6}$$

若记 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{n}'}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'}\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix}f_E^{\mathrm{n}'} & f_N^{\mathrm{n}'} & f_U^{\mathrm{n}'}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 和加速度计等效随机常值偏置 $\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix}\nabla_E^{\mathrm{n}} & \nabla_N^{\mathrm{n}} & \nabla_U^{\mathrm{n}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，则式（6）整理得：

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{n}'}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}'}(\dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}}-\boldsymbol{g}^{\mathrm{n}})+\boldsymbol{\nabla}^{\mathrm{n}} \tag{7}$$

在小失准角下近似 $\dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}}\approx\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{n}'}\dot{\boldsymbol{v}}^{\mathrm{n}}$，记 $\boldsymbol{v}^{\mathrm{n}}=\begin{bmatrix}v_E^{\mathrm{n}} & v_N^{\mathrm{n}} & v_U^{\mathrm{n}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，展开式（7）并取前两分量得：

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}_E^{\mathrm{n}'}=-g\phi_N+\dot{v}_N^{\mathrm{n}}+\nabla_N^{\mathrm{n}}\\ \boldsymbol{f}_N^{\mathrm{n}'}=g\phi_E+\dot{v}_E^{\mathrm{n}}+\nabla_E^{\mathrm{n}}\end{cases} \tag{8}$$

记 v_N^{n}、v_E^{n} 的初值为 v_{N0}^{n}、v_{E0}^{n}，将式（3）代入式（8）并在区间 $[0,\ t]$ 上积分得计算速度：

$$\begin{cases}\Delta V_E=\int_0^t f_E^{\mathrm{n}'}\mathrm{d}\tau=a_{1E}t+a_{2E}(t^2/2)+a_{3E}(t^3/6)+(v_E^{\mathrm{n}}-v_{E0}^{\mathrm{n}})\\ \Delta V_N=\int_0^t f_N^{\mathrm{n}'}\mathrm{d}\tau=a_{1N}t+a_{2N}(t^2/2)+a_{3N}(t^3/6)+(v_N^{\mathrm{n}}-v_{N0}^{\mathrm{n}})\end{cases}\tag{9}$$

式中，$a_{1E}=\nabla_E-g\varphi_{N0}$，$a_{2E}=-gu_N$，$a_{3E}=g\omega_U u_E$；　$a_{1N}=\nabla_N+g\varphi_{E0}$，$a_{2N}=gu_E$，$a_{3N}=g(\omega_U u_N-\omega_N u_U)$。

由此通过中间量 $a_{ij}(i=1,2,3;\ j=E,N)$ 建立了观测量 ΔV_E、ΔV_N 与参数 ϕ_{j0}、u_j 之间的间接关系。若令 $V_{DE}=v_E^n-v_{E0}^n$，$V_{DN}=v_N^n-v_{N0}^n$，这便是文献[6]推导的结果。

当从观测量 ΔV_E、ΔV_N 中辨识出参数 a_{ij} 后，首先利用式（10）计算 ϕ_{j0}、u_j：

$$\begin{cases}u_E=a_{2N}/g,\quad u_N=-a_{2E}/g,\quad u_U=u_N\tan L-a_{3N}/(g\omega_N)\\ \phi_{E0}=(a_{1N}-\nabla_N)/g,\quad \phi_{N0}=(\nabla_E-a_{1E})/g,\quad \phi_{U0}=\phi_{N0}\tan L-(u_E+\varepsilon_E)/\omega_N\end{cases}\tag{10}$$

其次再通过式（3）求解 t 时刻实时失准角；最后当估计稳定后，用式（11）一次校正计算姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'}$，获得精确姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$，完成参数辨识精对准。

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}'}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\varphi}\times)\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}'}\tag{11}$$

综上所述，总结参数辨识初始对准原理如图 1 所示，图中 PI 环节表示参数辨识方法。

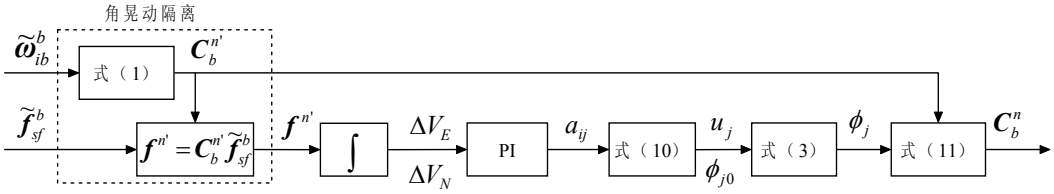


图 1　参数辨识初始对准原理

Fig.1　Flow chart of parameter identification initial alignment

2　改进参数辨识法

以北向通道为例，假设线晃动干扰为简谐振动形式，即假设

$$v_N^{\mathrm{n}}=A\sin(\Omega t+\theta),\qquad (t\geqslant 0)\tag{12}$$

其中 A,Ω,θ 分别为幅值、频率和初始相位，容易得计算干扰速度增量：

$$V_{DN}=v_N^{\mathrm{n}}-v_{N0}^{\mathrm{n}}=A\sin(\Omega t+\theta)-A\sin\theta\tag{13}$$

可见，在对准时间充分长条件下（远大于晃动周期），只有当 $\theta=k\pi\ (k=0,1,2\cdots)$ 时，V_{DN} 才近似为零均值的干扰，否则均值大小等于初始干扰速度 $v_{N0}^{\mathrm{n}}=A\sin\theta$。因此，传统参数辨识模型在初始干扰速度不为零时关于干扰是零均值的假设不再成立，存在明显的建模误差，有待于进一步完善。

若令干扰速度增量 V_{DE}、V_{DN} 的平均值分别为 a_{0E} 和 a_{0N}，且令 $\tilde{V}_{DE}=V_{DE}-a_{0E}$，$\tilde{V}_{DN}=V_{DN}-a_{0N}$，从而能够保证 $\tilde{V}_{DE}$、$\tilde{V}_{DN}$ 是零均值的，则式（9）改写成

$$\begin{cases}\Delta V_E=a_{0E}+a_{1E}t+a_{2E}(t^2/2)+a_{3E}(t^3/6)+\tilde{V}_{DE}\\ \Delta V_N=a_{0N}+a_{1N}t+a_{2N}(t^2/2)+a_{3N}(t^3/6)+\tilde{V}_{DN}\end{cases}\tag{14}$$

经式（14）改进之后，就符合干扰零均值的假设了，与式（9）相比简单地增加了常数项模型参数。

为了进一步削弱干扰的影响，获得更加平滑稳定的参数辨识结果，将式（14）再积分一次，即相当于把比力等式（8）作双重积分，并记 $P_{DE}=\int_0^t\tilde{V}_{DE}\mathrm{d}\tau$，$P_{DN}=\int_0^t\tilde{V}_{DN}\mathrm{d}\tau$，类似于速度均值处理方法，记 a_{00E} 和 a_{00N} 分别为 P_{DE}、P_{DN} 的均值，

且 $\tilde{P}_{DE}=P_{DE}-a_{00E}$，$\tilde{P}_{DN}=P_{DN}-a_{00N}$，则可得：

$$\begin{cases}\Delta P_E=\int_0^t\Delta V_E\mathrm{d}\tau=a_{00E}+a_{0E}t+a_{1E}(t^2/2)+a_{2E}(t^3/6)+a_{3E}(t^4/24)+\tilde{P}_{DE}\\ \Delta P_N=\int_0^t\Delta V_N\mathrm{d}\tau=a_{00N}+a_{0N}t+a_{1N}(t^2/2)+a_{2N}(t^3/6)+a_{3N}(t^4/24)+\tilde{P}_{DN}\end{cases}\tag{15}$$

在式（15）的两个等式中，由观测量作参数辨识的方法完全一样。现以东向通道 ΔP_E 为例，假设观测是等间隔的且周期为 T_s，则第 k 时刻观测方程可写成

$$\Delta P_{E,k}=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{\Theta}_E+\tilde{P}_{DE,k}\tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{H}_k=\begin{bmatrix}1 & t_k & t_k^2/2 & t_k^3/6 & t_k^4/24\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\Theta}_E=\begin{bmatrix}a_{00E} & a_{0E} & a_{1E} & a_{2E} & a_{3E}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，$t_k=kT_s$。

由观测序列 $\Delta P_{E,k}$ 辨识 $\boldsymbol{\Theta}_E$ 的 RLS 公式为

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}+1)^{-1}\\ \hat{\boldsymbol{\Theta}}_{E,k}=\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{E,k-1}+\boldsymbol{K}_k(\Delta\boldsymbol{P}_{E,k}-\boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{E,k-1})\\ \boldsymbol{P}_k=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{P}_{k-1}\end{cases}\tag{17}$$

通常选择初始值 $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_{E,0}=0$，$\boldsymbol{P}_0=\alpha\boldsymbol{I}$，这里 α 为适当大的正实数。式（17）中计算 $\boldsymbol{K}_k$ 的公式与干扰误差大小无关，进行了归一化处理。

3 仿真试验

当惯导系统存在沿南北方向的线晃动干扰时，对初始对准方位精度的影响最大，假设晃动干扰规律如式（12），参数分别设置为 $A=0.2$ m/s，$\Omega=0.1$ Hz，$\theta=-\pi/2$。本文仅为了验证不同参数辨识模型对对准精度的影响，因此仿真时可不加入惯性器件误差，分别使用式（9）（14）（15）三个模型进行参数辨识初始对准，RLS 初始方差阵参数均取为 $\alpha=10$，仿真结果的方位失准角误差如图 2 所示，三种结果依次对应图中虚线、点划线和实线三条曲线，且小图为 300～600 s 过程中后两者的局部放大效果。从图中可以看出，利用模型式（9）辨识出的方位失准角误差较大，并且是有偏的，从一侧逐渐收敛，在 300 s 时误差高达 5°，600 s 时误差仍有将近 1°；模型式（14）的结果围绕零附近振荡，但波动幅度较大，300 s 时幅度 0.5°，600 s 时幅度 0.07°；只有模型式（15）的对准收敛速度最快且波动幅度很小，300 s 时精度达 0.1°，600 s 精度优于 0.01°。

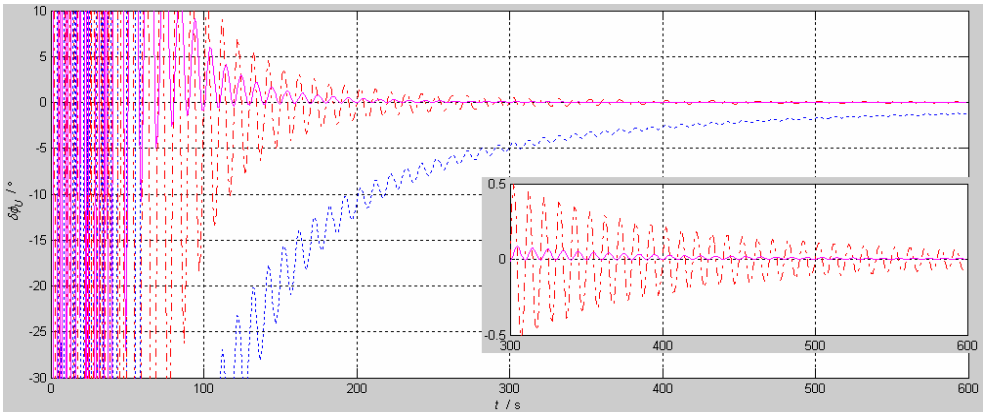


图 2 不同模型下参数辨识方位对准误差

Fig. 2 Heading misalignment errors for various parameter identification models

由仿真结果可以得出结论，传统以速度作为观测量的参数辨识初始对准方法，由于未将计算干扰速度均值作为辨识参数，因而当系统在对准启动时刻存在初始干扰速度时，会导致传统辨识模型产生建模误差，使得方位对准误差是有偏的且收敛速度比较慢。改进初始对准方法将干扰速度均值列入辨识参数，提高了对准收敛速度，但对准精度依然受晃动速度干扰影响波动较大。若作进一步改进，采用比力双重积分方法，则在对准收敛速度和精度两方面都获得了较好的提高。从图 2 还可见，由于惯导失准角具有缓慢变化的特点，若对速度模型式（14）辨识所得的方位失准角结果直接作数字低通滤波（如通带可小于 0.01 Hz），也能够从一定程度上降低晃动干扰的影响，最终获得比较平滑的方位失准角误差。

（下转第 584 页）

3 结论与展望

由仿真实验可知，在频域内利用幅值信息进行匹配定位原理简单，可以在噪声较大的情况下直接进行匹配定位，定位精度较高，鲁棒性较好，而且该算法无需获得大面积的地磁图，只需要匹配区内的地磁数据即可满足需求，因此，在实际应用中，可以利用该方法实现高精度导航。

频域相关地磁匹配算法需要进行空域和频域的转换，运算量增大，并且算法的定位精度对初始点地磁值的测量精度依赖较大。该算法对航向偏差的抵抗性较差，无法正确修正惯导系统的航向偏差。当初始点的地磁值含有较大误差时，定位精度大大下降；当初始点地磁值为局部孤立点时，匹配算法局部无解。

本文对频域内的匹配定位算法尚处于论证研究阶段，该方法与最近点迭代（ICCP）、基于等值线约束的匹配算法（CCM）、轮廓匹配（CM）等常用的时域内的地磁匹配定位算法的比较及对惯导系统航向角偏差的修正仍需进一步验证。

参考文献(References)：

[1] Filipski M N, Abdullah E J. Nanosatellite navigation with the WMM2005 geomagnetic field model[J]. Turkish J. Eng. Env. Sci., 2006, 30(1): 43-56.

[2] Goldenberg F. Geomagnetic navigation beyond the magnetic compass[C]// Position, Location and Navigation Symposium. San Diego, California, 2006 IEEE/ ION: 6842694.

[3] 吴美平，刘颖，胡小平. ICP 算法在地磁辅助导航中的应用[J]. 航天控制，2007，25(6)：17-21.
WU Mei-ping, LIU Ying, HU Xiao-ping. Application of ICP algorithm in geomagnetism aided navigation system[J]. Aerospace Control, 2007, 25(6): 17-21.

[4] 任治新，杨功流，李士心. 基于向量搜索的地磁导航匹配算法[J]. 中国惯性技术学报，2008，16(4)：424-427.
REN Zhi-xin, YANG Gong-liu, LI Shi-xin. Geomagnetic matching algorithm based on vector search[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(4): 424-427.

[5] Besl P J, Mckay N D. A method for registration of 3-D shapes[J]. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1992, 14(2): 239-256.

[6] 刘颖，吴美平，胡小平，谢红卫. 基于等值线约束的地磁匹配方法[J]. 空间科学学报，2007，27(6)：505-511.
LIU Ying, WU Mei-ping, HU Xiao-ping, XIE Hong-wei. Contour constraint based geomagnetic matching method[J]. Space Science, 2007, 27(6): 505-510.

（上接第 526 页）

4 结 论

介绍了传统的 SINS 参数辨识初始对准方法，通过分析指出了它的建模不足之处。当存在线晃动干扰时，将计算干扰速度的平均值列入辨识模型参数有利于提高初始对准的收敛速度和对准精度，采用双重积分参数辨识模型能进一步抑制晃动干扰的影响，消除了现有对准算法中可能存在的固有偏差问题。与传统 Kalman 滤波初始对准相比，RLS 参数辨识初始对准不需要设置观测噪声的大小，当观测噪声变化时，亦可不进行自适应处理[3]。仿真结果还表明，如果在参数辨识对准结果的方位失准角上直接作数字低通滤波，也能够从一定程度上降低晃动干扰的影响。

参考文献（References）：

[1] Titterton D H, Weston J L. Strapdown inertial navigation technology(2nd ed.)[M]. London: The Institution of Electrical Engineers, 2004.

[2] Gaiffe T, Cottreau Y, Faussot N, et al. Highly compact fiber optic gyrocompass for applications at depths up to 3000 meters[C]// The 2000 International Symposium on Underwater Technology. Tokyo, Japan, 2000: 155-160.

[3] Ahn H S, Won C H. Fast alignment using rotation vector and adaptive Kalman filter[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2006, 42(1): 70-83.

[4] 任思聪，雷宝权. 一种在摇摆基座上补偿平台干扰加速度的有效方案[J]. 西北工业大学学报，1990，8(4)：446-452.
REN Si-cong, LEI Bao-quan. Scheme of compensation for acceleration disturbance for platform on swing base[J]. Journal of Northwestern Ploytechnical University, 1990, 8(4): 446-452.

[5] Gu D Q, El-Sheimy N, Hassan T, et al. Coarse alignment for marine SINS using gravity in the inertial frame as a reference[C]// IEEE Conferences on Position, Location and Navigation. Monterey, CA, 2008: 961-965.

[6] 秦永元. 捷联惯导系统初始对准的参数辨识法[J]. 中国惯性技术学报，1990，2：1-16.
QIN Yong-yuan. Parameters identification method of the alignment of a strapdown inertial navigation system[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 1990, 2: 1-16.

[7] 秦永元，张洪钺，汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航系统原理[M]. 西安：西北工业大学出版社，1998.
QIN Yong-yuan, ZHANG Hong-yue, WANG Shu-hua. Principle of Kalman filtering and integrated navigation[M]. Xi'an: Press of Northwestern Ploytechnical University, 1988.

[8] 王新龙，马闪，王海涌. SINS 在摇摆基座上的快速精确对准方法[J]. 北京航空航天大学学报，2009，35(1)：91-95.
WANG Xin-long, MA Shan, WANG Hai-yong. Fast and precise initial alignment of strapdown inertial navigation system on rolling base[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2009, 35(1): 91-95.

文章编号: 1001-506X(2011)03-0618-04

基于惯性参考系的动基座初始对准与定位导航

严恭敏, 翁 浚, 白 亮, 秦永元
(西北工业大学自动化学院, 陕西 西安 710072)

摘 要: 以惯性坐标系作为捷联惯导解算参考基准并综合外测速度辅助信息, 可有效隔离载体角运动和线运动干扰的影响, 实现捷联惯导系统(strapdown inertial navigation system, SINS)动基座初始对准。但现有算法的对准精度受载体位移影响, 通过位移补偿降低重力矢量在惯性系投影的偏斜误差, 同时给出了基于惯性参考基准的 SINS 定位方法, 提高 SINS 动基座初始对准精度, 并且具备对准过程中进行实时定位导航的能力。车载实测数据分析表明, 动基座方位对准精度达到 0.032°, 相对定位精度约为行程的 0.15%。

关键词: 捷联惯导系统; 动基座初始对准; 惯性参考系; 车载试验
中图分类号: V 249.3 文献标志码: A **DOI**: 10.3969/j.issn.1001-506X.2011.03.30

Initial in-movement alignment and position determination based on inertial reference frame

YAN Gong-min, WENG Jun, BAI Liang, QIN Yong-yuan
(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: In some strapdown inertial navigation system (SINS) applications, by taking inertial frame as computing reference and with the aiding of an external velocity measuring equipment, the angular and linear moving disturbance can be easily eliminated to realize an in-movement initial attitude and heading alignment. However, the alignment accuracy is subject to the displacement of SINS. The displacement of SINS is compensated to diminish the gravity deflexion error that expresses in inertial frame. Moreover, based on the inertial reference frame, a new SINS position determination method is deduced. The initial alignment accuracy is improved and a real-time position determination ability is reached by using the proposed method. Finally, some vehicular tests are carried out and the results show that the in-movement heading alignment accuracy reaches 0.032°, and the positional accuracy is about 0.15% of the running distance.

Keywords: strapdown inertial navigation system (SINS); in-movement initial alignment; inertial reference frame; vehicular test

0 引 言

捷联惯导系统(strapdown inertial navigation system, SINS)在进入导航任务之前必须先进行初始对准, 建立起精确的平台初始指向, 即姿态矩阵。基于小失准角线性误差模型的初始对准方法研究已经比较成熟, 无论是在静基座、晃动干扰基座还是在运动基座环境下, 但其先决条件是必须事先能够获得姿态阵粗略值。随着对惯性技术应用要求的不断提高, 为了在不具备姿态阵粗略值情况下实现初始对准, 学者们提出了大方位失准角(水平失准角依然为小角度)和大失准角等方法, 研究重点主要集中在惯导非线性误差方程建模和非线性滤波两方面[1-3]。纵观 SINS 初始对准方法, 其核心问题是获取精确姿态阵, 而通常认为速度和位置初值容易获得。例如在进行 SINS/全球定位系统(global position system, GPS)运动中初始对准时一般就不存在定位的困惑。但是, 在有些应用领域, 为了降低 GPS 人为干扰和无线电信号遮蔽等影响以增强导航系统的自主性, 也常采用测速设备辅助(如里程仪和多普勒测速仪)的动基座初始对准方案。然而这些测速设备是相对于载体坐标系进行测量的, 致使在姿态阵对准之前无法给出相对于导航系的定位结果。文献[4]利用数据存储和逆向导航算法, 解决了姿态阵对准之后的精确定位问题, 可是对准过程中依然不能提供实时的定位信息。

文献[5-6]介绍了一种基于惯性坐标系参考基准的初始对准思路, 但未给出算法实现细节; 文献[7-8]对该类算法作了详细推导, 有效地隔离载体角晃动干扰的影响; 文

收稿日期: 2010-05-25; 修回日期: 2010-11-30。
作者简介: 严恭敏(1977-), 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为惯性导航与信息融合理论。E-mail: yangongmin@163.com

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

献[9]在文献[7]的基础上将算法推广到动基座中去, 利用外测速度补偿了载体运动的影响, 达到了姿态阵对准的目的, 但未能解决对准过程中实时定位问题, 并且运动位移对姿态阵对准精度有影响。在文献[9]的基础上, 本文作了以下改进: 通过运动位移补偿从而削弱了由此引起的惯性系重力偏斜误差, 给出了基于惯性参考基准的 SINS 定位方法。因此, 无需任何初始姿态信息、数据存储和复杂的非线性建模与滤波计算, 本文除实现动基座姿态阵初始对准外, 同时具备对准过程中实时定位导航的能力。

1　相关坐标系与矢量运算介绍

基于惯性参考系的动基座初始对准中涉及到较多的坐标系, 包括: 地心惯性坐标系(i 系)、地球坐标系(e 系)、导航坐标系(n 系)、捷联惯导坐标系(b 系)、初始时刻惯性坐标系(i_0 系)、初始时刻地球坐标系(e_0 系)、初始时刻导航坐标系(n_0 系)、初始时刻捷联惯导惯性坐标系(i_{b0}系)等, 具体定义可参见文献[9]。

为了方便后文推导, 先简要介绍一些有关的矢量运算关系。

假设 $\boldsymbol{v}(\tau)$ 是一时变三维矢量, 它在参考坐标系 r 和动坐标系 m 的投影分别表示为 $\boldsymbol{v}^r(\tau)$ 和 $\boldsymbol{v}^m(\tau)$, 且设坐标系 m 至 r 的坐标变换矩阵为 $\boldsymbol{C}_m^r(\tau)$, 则在 τ 时刻有如下坐标变换关系

$$\boldsymbol{v}^r(\tau) = \boldsymbol{C}_m^r(\tau)\boldsymbol{v}^m(\tau) \tag{1}$$

考虑到矩阵微分公式

$$\dot{\boldsymbol{C}}_m^r(\tau) = \boldsymbol{C}_m^r(\tau)[\boldsymbol{\omega}_{rm}^m(\tau)\times] \tag{2}$$

与叉乘运算的坐标变换公式

$$\boldsymbol{C}_m^r(\tau)[\boldsymbol{\omega}_{rm}^m(\tau)\times\boldsymbol{v}^m(\tau)] = [\boldsymbol{C}_m^r(\tau)\boldsymbol{\omega}_{rm}^m(\tau)]\times[\boldsymbol{C}_m^r(\tau)\boldsymbol{v}^m(\tau)] \tag{3}$$

若将式(1)两边同时微分, 可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}}^r(\tau) &= \boldsymbol{C}_m^r(\tau)\dot{\boldsymbol{v}}^m(\tau)+\dot{\boldsymbol{C}}_m^r(\tau)\boldsymbol{v}^m(\tau) = \\ &\boldsymbol{C}_m^r(\tau)\dot{\boldsymbol{v}}^m(\tau)+\boldsymbol{C}_m^r(\tau)[\boldsymbol{\omega}_{rm}^m(\tau)\times\boldsymbol{v}^m(\tau)] = \\ &\boldsymbol{C}_m^r(\tau)\dot{\boldsymbol{v}}^m(\tau)+\boldsymbol{\omega}_{rm}^r(\tau)\times[\boldsymbol{C}_m^r(\tau)\boldsymbol{v}^m(\tau)]\end{aligned} \tag{4}$$

再对式(4)两边从 0~ t 时间段内积分, 得到

$$\int_0^t\dot{\boldsymbol{v}}^r(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t\boldsymbol{C}_m^r(\tau)\dot{\boldsymbol{v}}^m(\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^t\boldsymbol{\omega}_{rm}^r(\tau)\times[\boldsymbol{C}_m^r(\tau)\boldsymbol{v}^m(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{5}$$

假设矢量初始 $\boldsymbol{v}^r(0)=\boldsymbol{v}^m(0)=0$, 则有 $\int_0^t\dot{\boldsymbol{v}}^r(\tau)\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{v}^r(t) = \boldsymbol{C}_m^r(t)\boldsymbol{v}^m(t)$, 因此式(5)可整理成

$$\int_0^t\boldsymbol{C}_m^r(\tau)\dot{\boldsymbol{v}}^m(\tau)\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{C}_m^r(t)\boldsymbol{v}^m(t) - \int_0^t\boldsymbol{\omega}_{rm}^r(\tau)\times[\boldsymbol{C}_m^r(\tau)\boldsymbol{v}^m(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{6}$$

式(6)也就是分部积分公式的简单变形。若坐标系 m 相对 r 不动, 则有 $\boldsymbol{\omega}_{rm}^r(\tau)=0$, 即式(6)右边第二项为 0, 即可以将该项看作是动坐标系旋转而产生的修正项。

2　姿态阵对准

动基座下的时变捷联姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_b^n(t)$ 可拆写成如下 4 个矩阵链乘形式

$$\boldsymbol{C}_b^n(t) = \boldsymbol{C}_{n_0}^n(t)\boldsymbol{C}_{i_0}^{n_0}(t)\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{i_0}\boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(t) \tag{7}$$

式中, $\boldsymbol{C}_{n_0}^n(t)$ 与载体实时移动的经度 λ 和纬度 L_t 有关; $\boldsymbol{C}_{i_0}^{n_0}(t)$ 由载体初始经度 λ_0、纬度 L_0 以及对准时间 t 确定; 利用陀螺输出的角运动信息对 $\boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(t)$ 进行实时跟踪。求解上述 3 个矩阵相对比较容易, 可参见文献[9]。这里指出的是, 当载体移动经度变化量 $\Delta\lambda=\lambda-\lambda_0$ 和纬度变化量 $\Delta L_t=L_t-L_0$ 均是小角度时, 近似有

$$\boldsymbol{C}_{n_0}^n(t) \approx \boldsymbol{I}-\begin{bmatrix}0 & -\Delta\lambda\sin L_0 & \Delta\lambda\cos L_0\\ \Delta\lambda\sin L_0 & 0 & \Delta L_t\\ -\Delta\lambda\cos L_0 & -\Delta L_t & 0\end{bmatrix} \tag{8}$$

在式(7)中求解两惯性坐标系之间旋转变化关系的常值矩阵 $\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{i_0}$ 是初始对准的关键, 下面详细介绍它的计算过程。

在如下惯导比力方程中

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n(t) = \boldsymbol{C}_b^n(t)\boldsymbol{f}_{sf}^b(t) - [(\boldsymbol{\omega}_{in}^n(t)+\boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t))\times]\boldsymbol{v}^n(t)+\boldsymbol{g}^n \tag{9}$$

若将

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n(t) = \frac{\mathrm{d}[\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^n(t)\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(t)]}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{C}_{i_{b0}}^n(t)[\dot{\boldsymbol{v}}^{i_{b0}}(t)+\boldsymbol{\omega}_{ni_{b0}}^{i_{b0}}(t)\times\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(t)]$$

代入, 并且方程两边同时左乘 $\boldsymbol{C}_n^{i_{b0}}(t)$, 可得

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}}^{i_{b0}}(t)+\boldsymbol{\omega}_{ni_{b0}}^{i_{b0}}(t)\times\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(t) &= \boldsymbol{C}_n^{i_{b0}}(t)\{\boldsymbol{C}_b^n(t)\boldsymbol{f}_{sf}^b(t) - \\ &[(\boldsymbol{\omega}_{in}^n(t)+\boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t))\times]\boldsymbol{v}^n(t)+\boldsymbol{g}^n\}\end{aligned} \tag{10}$$

考虑到 $\boldsymbol{\omega}_{ni_{b0}}^{i_{b0}}(t) = -\boldsymbol{\omega}_{in}^{i_{b0}}(t)$, 式(10)移项化简整理得到

$$\dot{\boldsymbol{v}}^{i_{b0}}(t) - \boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(t)\boldsymbol{f}_{sf}^b(t)+(\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_0})\times\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(t) = \boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{C}_{n_0}^{i_0}(t)\boldsymbol{C}_n^{n_0}(t)\boldsymbol{g}^n \tag{11}$$

利用式(8)和 $\boldsymbol{g}^n=[0\ \ 0\ \ -g]^{\mathrm{T}}$, 可将式(11)右端的 $\boldsymbol{C}_n^{n_0}(t)\boldsymbol{g}^n$ 部分改写成

$$\boldsymbol{C}_n^{n_0}(t)\boldsymbol{g}^n \approx \boldsymbol{g}^n - g\cdot[\Delta\lambda\cos L_0 \quad \Delta L_t \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

易知, 经度或纬度变化角度乘以地球半径 R_e 后可近似为东向或北向的距离变化量, 记 $p_E^{n_0}(t)=R_e\Delta\lambda\cos L_0$ 和 $p_N^{n_0}(t)=R_e\Delta L_t$。一般车载导航系统在高度方向上的距离变化不大, 因此在式(12)中添加高度分量 $p_U^{n_0}(t)$ 后, 可近似得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_n^{n_0}(t)\boldsymbol{g}^n &= \boldsymbol{g}^n-\frac{g}{R_e}\cdot[p_E^{n_0}(t) \quad p_N^{n_0}(t) \quad 0]^{\mathrm{T}} \approx \\ &\boldsymbol{g}^n-\frac{g}{R_e}\cdot[p_E^{n_0}(t) \quad p_N^{n_0}(t) \quad p_U^{n_0}(t)]^{\mathrm{T}} \triangleq \boldsymbol{g}^n-\frac{g}{R_e}\cdot\boldsymbol{p}^{n_0}(t)\end{aligned} \tag{13}$$

再将式(13)代入式(11), 并应用关系式 $\boldsymbol{p}^{i_{b0}}(t)\approx\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{C}_{n_0}^{i_0}(t)\boldsymbol{p}^{n_0}(t)$ (参见后文式(17)), 整理可得

$$\dot{\boldsymbol{v}}^{i_{b0}}(t) - \boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(t)\boldsymbol{f}_{sf}^b(t)+(\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_0})\times\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(t)+\frac{g}{R_e}\cdot\boldsymbol{p}^{i_{b0}}(t) = \boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{C}_{n_0}^{i_0}(t)\boldsymbol{g}^n \tag{14}$$

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

式(14)左边第 3 项为载体移动和地球自转引起的哥氏力补偿项; 第 4 项相当于载体移动造成的重力偏斜补偿项, 虽然这两项一般为小量, 但是本文正是通过对它们的补偿进一步提高对准精度。

定义

$$\boldsymbol{p}^{i_{b0}}(t)=\int_0^t \boldsymbol{v}^{i_{b0}}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t \boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(t)\boldsymbol{v}^b(t)\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{p}_{\int}^{i_{b0}}(t)=\int_0^t \boldsymbol{p}^{i_{b0}}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{p}_{\iint}^{i_{b0}}(t)=\int_0^t \boldsymbol{p}_{\int}^{i_{b0}}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

式中, $\boldsymbol{v}^b(t)$表示测速设备(如里程仪或多普勒测速仪等)提供的载体系速度。为了避免外测速度微分和提高抗干扰能力, 对式(14)实施两次积分, 并令所有积分初值均为 0, 可得

$$\boldsymbol{V}^{i_{b0}}(t)=\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{U}^{i_0}(t) \tag{15}$$

式中

$$\boldsymbol{V}^{i_{b0}}(t)=\boldsymbol{p}^{i_{b0}}(t)-\int_0^t\int_0^{\tau}\boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(\tau_1)\boldsymbol{f}_{sf}^b(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau+(\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\omega_{ie}^{i_0})\times\boldsymbol{p}_{\int}^{i_{b0}}(t)+\frac{g}{R_e}\cdot\boldsymbol{p}_{\iint}^{i_{b0}}(t)$$

$$\boldsymbol{U}^{i_0}(t)=\int_0^t\int_0^{\tau}\boldsymbol{C}_{n_0}^{i_0}(\tau_1)\boldsymbol{g}^n\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau$$

在式(15)中, 可利用两个不同对准时刻 t_1 和 t_2 下的两组计算值, 即 $\boldsymbol{V}^{i_{b0}}(t_1)$、$\boldsymbol{U}^{i_0}(t_1)$ 和 $\boldsymbol{V}^{i_{b0}}(t_2)$、$\boldsymbol{U}^{i_0}(t_2)$, 通过构造矩阵方程求解 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$, 算法比较简单, 可参见文献[9]。但是, 由于 $\boldsymbol{V}^{i_{b0}}(t)$ 中第 3 项包含 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 未知, 因此需采取迭代的方法实现, 即不妨先忽略 $\boldsymbol{V}^{i_{b0}}(t)$ 中的 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 项, 求得 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 的粗略值, 之后再次利用完整的 $\boldsymbol{V}^{i_{b0}}(t)$ 表达式, 精确求解 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$。

3 定位导航

在分部积分式(6)中, 若分别以矩阵 $\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(t)$ 和矢量 $\boldsymbol{p}^{i_{b0}}(t)$ 代替, 得到

$$\int_0^t \boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(\tau)\dot{\boldsymbol{p}}^{i_{b0}}(\tau)\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(t)\boldsymbol{p}^{i_{b0}}(t)-\int_0^t \omega_{n_0i_{b0}}^{n_0}(\tau)\times[\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(\tau)\boldsymbol{p}^{i_{b0}}(\tau)]\mathrm{d}\tau \tag{16}$$

式中等号左边积分即为

$$\int_0^t \boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(\tau)\dot{\boldsymbol{p}}^{i_{b0}}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t \boldsymbol{C}_b^{n_0}(\tau)\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{b}(\tau)\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_0^t \boldsymbol{C}_b^{n_0}(\tau)\boldsymbol{v}^b(\tau)\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{p}^{n_0}(t)$$

它表示载体在初始时刻导航坐标系 n_0 下的位移矢量。在式(16)右边第 2 项中, 有 $\omega_{n_0i_{b0}}^{n_0}(\tau)=-\omega_{ie}^{n_0}$ 为常值矢量, 并且还可将 $\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(\tau)$ 近似为 t_0 时刻的常值矩阵, 所以式(16)近似为

$$\boldsymbol{p}^{n_0}(t)\approx\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(t)\boldsymbol{p}^{i_{b0}}(t)+\omega_{ie}^{n_0}\times[\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(t_0)\boldsymbol{p}_{\int}^{i_{b0}}(t)] \tag{17}$$

式(17)中, 可对右边第 2 项即修正项的量级作出估计: 假设载体以常值速度 $v^{i_{b0}}$ 行驶, 则在 t 时刻有

$$\left|\omega_{ie}^{n_0}\times\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(t_0)\boldsymbol{p}_{\int}^{i_{b0}}(t)\right|\leqslant\frac{1}{2}\omega_e v^{i_{b0}}t^2$$

现取 $v^{i_{b0}}=10$ m/s 和 $t=1\,000$ s, 则修正项最大约为 360 m, 可见高精度定位时对该修正项进行补偿是非常必要的。根据式(17)可得经度、纬度和高度实时定位结果为

$$\lambda=\lambda_0+\frac{p_E^{n_0}(t)}{(R_M+h_0)\cos L_0},\quad L_t=L_0+\frac{p_N^{n_0}(t)}{R_N+h_0}$$

$$h_t=h_0+p_U^{n_0}(t) \tag{18}$$

有了实时定位之后, 可进一步准确计算式(7)中与定位相关的矩阵 $\boldsymbol{C}_{n0}^{n_0}(t)$。由于式(17)的 $\boldsymbol{p}^{n_0}(t)$ 来自于 $\boldsymbol{p}^{i_{b0}}(t)$, 因而认为式(18)的定位是基于惯性参考系基准转换获得的, 本文称为基于惯性参考基准的定位导航方法。至此, 便完成了姿态阵对准和定位导航。

4 试验验证与讨论

利用文献[9]中的 6 组激光陀螺 SINS 跑车试验数据作事后分析, 处理结果如表 1 所示, 其中 ψ、λ 和 L 分别为本文方位对准、经度和纬度定位结果, ψ'、λ' 和 L' 分别为参考基准值。从表 1 统计误差可以看出, 本文方法的方位误差小于文献[9](此处方位误差 0.032°, 而文献[9]为 0.1°), 与静基座初始对准精度 2′相当; 但本文的定位误差比基于逆向导航的定位误差[4]稍大(此处相对于行程的定位误差约 0.15%, 而文献[4]为 0.1%)。可见, 本文方法有效补偿了重力偏斜对姿态阵对准精度的影响。

表 1 初始对准与定位导航结果

组别	方位对准及误差			经度导航及误差			纬度导航及误差		
	ψ/(°)	ψ'/(°)	误差/(°)	λ/(°)	λ'/(°)	误差/m	L/(°)	L'/(°)	误差/m
1	50.802	50.839	−0.037	109.017 587	109.017 559	2.58	34.184 902	34.184 957	−6.12
2	263.732	263.745	−0.013	108.984 443	108.984 491	−4.42	34.174 658	34.174 644	1.55
3	52.092	52.038	0.054	109.017 588	109.017 532	5.16	34.184 879	34.184 932	−5.89
4	263.177	263.189	−0.012	108.983 450	108.983 493	−3.96	34.174 558	34.174 536	2.44
5	51.054	51.040	0.014	109.016 910	109.016 841	6.36	34.184 490	34.184 473	1.89
6	265.030	265.052	−0.022	108.982 259	108.982 284	−2.30	34.174 412	34.174 426	−1.55
统计误差(1σ)			0.032			4.73			3.91

此外, 还进行了一次时间 4 000 *s* 行程 46 *km* 的试验, 最大行车速度达 25 *m/s*, 图 1 为方位和定位误差结果, 其中定位误差中的毛刺是载车通过桥和隧道等情形时 *GPS* 丢星造成的, 由于纯惯导和航位推算高度通道均是发散的, 因而图中未给出高度误差。由图 1 可以看出, 方位误差收敛后精度约为 0.05°; 定位误差在 25 *min* 之前增长缓慢,

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

基本随距离呈线性发散趋势, 符合航位推算误差增长的规律, 但 30 *min* 之后定位误差明显增大了。由于地球自转引起 $\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(\tau)$ 随时间缓慢变化, 而在式(17)中将 $\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(\tau)$ 近似为常值 $\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(t_0)$, 给位移矢量 $\boldsymbol{p}^{n_0}(t)$ 计算带来了一定的误差。当时间比较短时地球转过角度很小, 所以 $\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(\tau)$ 变化很小, 可近似为常值, 对定位误差影响也很小; 而当时间比较长时地球可转过几度甚至十几度的角度, 这时 $\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n_0}(\tau)$ 变化较大, 近似为常值时误差增大, 从而导致定位误差越来越大。因此, 本文定位结果不适合于长时间情况, 而对于 20 min~30 min以内的动基座实时定位导航应用场合具备较高的精度。

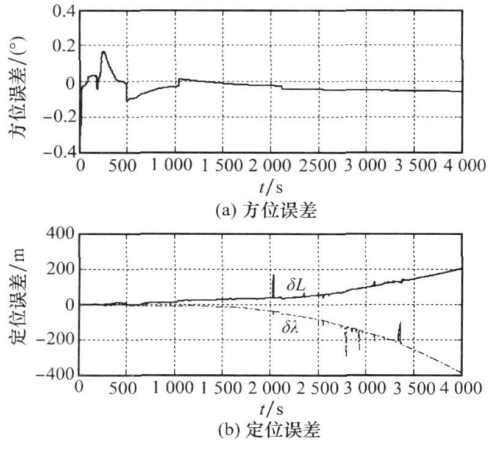


图 1　长时间的动基座对准方位误差与定位误差

为了消除长时间对准对定位导航精度的影响, 现提出一种处理思路如下: 直接由式(11)两次积分并且类似于式(16), 可推导出如下两个严格意义的等式

$$\boldsymbol{p}^{i_{b0}}(t) - \int_0^t\int_0^{\tau}\boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(\tau_1)\boldsymbol{f}_{sf}^b(\tau_1)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau + (\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\omega_{ie}^{i_0})\times\boldsymbol{p}_{\int}^{i_{b0}}(t) = \boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\int_0^t\int_0^{\tau}\boldsymbol{C}_n^{i_0}(\tau_1)\boldsymbol{g}^n\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau \tag{19}$$

$$\boldsymbol{p}^n(t) = \boldsymbol{C}_{i_{b0}}^n(t)\boldsymbol{p}^{i_{b0}}(t) + \int_0^t\omega_{in}^n(\tau)\times[\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^n(\tau)\boldsymbol{p}^{i_{b0}}(\tau)]\,\mathrm{d}\tau \tag{20}$$

虽然式(19)左边的 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 和右边的 $\boldsymbol{C}_n^{i_0}(\tau_1)$ 未知, 但是在对准过程中的某 t_k 时刻, $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 可使用前一时刻的计算值, 并且 $\boldsymbol{C}_n^{i_0}(\tau_1)$ 中的定位信息可通过式(20)获得, 而计算 $\boldsymbol{p}^n(t_k)$ 时, 式(20)右边的 $\omega_{in}^n(\tau)$ 和 $\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^n(\tau)$ 均可使用 t_{k-1} 时刻的速度和定位值计算。依此形成递推算法, 能较好解决动基座条件下同时完成姿态阵对准和实时定位的问题。关于该递推算法的具体实现和效果验证还需较多篇幅, 将另行文作详细介绍。

5　结　论

在惯导系统动基座初始对准中, 若以惯性坐标系作为捷联解算的参考基准, 再通过引入外测速度辅助信息, 可有效隔离载体角运动和线运动干扰的影响。在文献[9]的基础上, 本文进行了以下改进: 通过运动位移补偿从而削弱了由此引起的惯性系重力偏斜误差, 给出了基于惯性基准的惯导系统定位方法。因此, 无需任何初始姿态信息、数据存储和复杂的非线性建模与滤波计算, 本文除实现动基座姿态阵初始对准外, 同时具备对准过程中实时定位导航的能力。最后, 利用实测数据验证了所提方法具有较高的方位对准和定位导航精度。

参考文献:

[1] Dmitriyev S P, Stepanov O A, Shepel S V. Nonlinear filtering methods application in INS alignment[J]. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 1997, 33(1): 260-271.

[2] Wu Y X, Hu X P, Wu M P, et al. Strapdown inertial navigation using dual quaternion algebra: error alalysis[J]. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, 42(1): 259-266.

[3] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. *Proc. of the IEEE Aerospace and Electronic Systems*, 2004, 92(3): 401-422.

[4] 严恭敏, 严卫生, 徐德民. 逆向导航算法及其在捷联罗经动基座初始对准中的应用[C]// 程代展, 李川. 第 27 届中国控制会议论文集(第 5 册). 北京: 北京航空航天大学出版社, 2008: 724-729. (Yan G M, Yan W S, Xu D M. On reverse navigation algorithm and its application to SINS gyrocompass in-movement alignment[C]// Cheng D Z, Li C. *Proc. of the 27th Chinese Control Conference*, 2008: 724-729.)

[5] Gaiffe T, Cottreau Y, Faussot N, et al. Highly compact fiber optic gyrocompass for applications at depths up to 3000 meters[C]// *Proc. of the International Symposium on Underwater Technology*, 2000: 155-160.

[6] Napolitano F, Gaiffe T, Cottreau Y. PHINS: the first high performances inertial navigation system based on fiber optic gyroscopes[C]// *Proc. of 9th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems*, 2002: 296-304.

[7] 秦永元, 严恭敏, 顾冬晴, 等. 摇摆基座上基于信息的捷联惯导粗对准研究[J]. 西北工业大学学报, 2005, 23(5): 681-684. (Qin Y Y, Yan G M, Gu D Q, et al. A clever way of SINS coarse alignment despite rocking ship[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2005, 23(5): 681-684.)

[8] 练军想, 吴文启, 吴美平, 等. 车载 SINS 行进间初始对准方法[J]. 中国惯性技术学报, 2007, 15(2): 155-159. (Lian J X, Wu W Q, Wu M P, et al. SINS initial alignment algorithm for marching vehicles[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2007, 15(2): 155-159.)

[9] 严恭敏, 秦永元, 卫育新, 等. 一种适用于 SINS 动基座初始对准的新算法[J]. 系统工程与电子技术, 2009, 31(3): 634-637. (Yan G M, Qin Y Y, Wei Y X, et al. New initial alignment algorithm for SINS on moving base[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2009, 31(3): 634-637.)

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

基于 Matlab 的捷联惯导算法设计及仿真[1]

严恭敏
西北工业大学航海学院，西安 （710072）
E-mail：yangongmin@163.com

摘 要：根据圆锥误差补偿算法和划船误差补偿算法的研究成果，考虑到实际捷联惯导算法仿真程序编写的方便性，总结了一些与捷联惯导更新算法有关的函数的计算公式。对圆锥误差补偿算法和捷联惯导算法进行了仿真，仿真结果和理论分析结论吻合。在附录中给出了 Matlab 的 m 文件源程序代码，具有一定的参考价值。

关键词：捷联惯导；四元数；等效旋转矢量；Matlab；算法；仿真
中图分类号：V249.3

1. 引言

在捷联惯导系统中采用数学平台，姿态更新解算是捷联惯导系统算法的核心部分，由于四元数法算的优良特性，它在工程实际中经常被采用。为了减小姿态计算的不可交换性误差，前人研究并建立了等效旋转矢量方程，高精度姿态更新解算的研究主要集中在等效旋转矢量方程的求解上，在圆锥运动环境下，许多研究者提出并完善了圆锥误差补偿算法。基于圆锥误差补偿算法和划船误差补偿算法的等效原理，可将圆锥误差补偿算法移植到划船误差补偿算法中去，从而减少了划船误差推导的繁琐过程。上述研究都已经比较成熟[1-6]，本文根据这些研究结果，并考虑到实际仿真程序编写的方便性，总结了一些与捷联惯导算法有关的函数的计算公式或步骤，其中更详细的推导过程可见参考文献[7,8]。最后，对圆锥误差补偿算法和捷联惯导算法进行了仿真。附录中给出了Matlab的m文件源程序代码具有一定的参考价值。

2. 捷联惯导算法

文中选取东-北-天（E-N-U）地理坐标系为导航坐标系，记为 n 系；捷联惯组坐标系记为 b 系。

2.1 相关函数

（1）四元数的共轭与乘积。四元数 $\boldsymbol{q}$ 可表示为 $\boldsymbol{q}=q_0+\boldsymbol{q}_v=q_0+q_1i+q_2j+q_3k$。用 $\boldsymbol{q}^*$ 表示 $\boldsymbol{q}$ 的共轭四元数；$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_2$ 表示四元数 $\boldsymbol{q}$ 是四元数 $\boldsymbol{q}_1$ 与 $\boldsymbol{q}_2$ 的乘积，四元数相乘是不可交换的。

（2）四元数与向量相乘。一般情况下利用矩阵进行坐标变换，如关系式 $\boldsymbol{v}^n=\boldsymbol{C}_b^n\boldsymbol{v}^b$，同样利用四元数也可以表示坐标变换。设变换四元数 $\boldsymbol{q}_b^n$ 与变换矩阵 $\boldsymbol{C}_b^n$ 相对应，则定义变换四元数 $\boldsymbol{q}_b^n$ 和向量 $\boldsymbol{v}^b$ 的乘法，记为 $\boldsymbol{v}^n=\boldsymbol{q}_b^n\boldsymbol{v}^b$，它由以下规则实现：首先，将向量扩展成四元数，令 $\boldsymbol{q}^b=0+\boldsymbol{v}^b$；其次，做四元数乘法，令 $\boldsymbol{q}^n=\boldsymbol{q}_b^n\boldsymbol{q}^b\boldsymbol{q}_b^{n*}$；最后，从四元数 $\boldsymbol{q}^n$ 中提取向量，有 $\boldsymbol{v}^n=\boldsymbol{q}_v^n$。

（3）等效旋转矢量与四元数之间的转换。等效旋转矢量 $\boldsymbol{v}$ 转化为四元数 $\boldsymbol{q}$ 的公式为

[1] 本课题得到水下信息处理与控制国家级重点实验室基金（9140C230206070C2306）资助。

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{F}_{v\to q}(\boldsymbol{v})=\cos(|\boldsymbol{v}|/2)+\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\sin(|\boldsymbol{v}|/2) \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{F}_{v\to q}(\bullet)$ 表示从等效旋转矢量转换到四元数的函数，容易看出有 $\boldsymbol{q}^{*}=\boldsymbol{F}_{v\to q}(-\boldsymbol{v})$ 成立。假设 $|\boldsymbol{v}|$ 是小量，则从 $\boldsymbol{q}$ 中可以求出 $\boldsymbol{v}$，首先令 $v_{n2}=|\boldsymbol{v}|/2=\arccos(q_0)$，再求得

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}_{q\to v}(\boldsymbol{q})=\frac{2\cdot v_{n2}}{\sin(v_{n2})}\boldsymbol{q}_v \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{F}_{q\to v}(\bullet)$ 表示从四元数转换到等效旋转矢量的函数。

（4）姿态向量 $\boldsymbol{A}$ 与姿态四元数 $\boldsymbol{q}_b^n$ 之间的转换。记由俯仰角 θ、横滚角 γ 和航向角 ψ 组成的向量 $\boldsymbol{A}=[\theta\quad\gamma\quad\psi]^{\mathrm{T}}$ 为姿态向量，通过姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_b^n$ 作为过渡，容易实现 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{q}_b^n$ 之间的转换，此处不作详细分析。

2.2 地球模型

通常给出的地球椭球模型参数为长半轴 R_e 和扁率 f，由椭球几何学容易得到其它参数，在惯性导航算法中经常用到，它们是偏心率 $e=\sqrt{2f-f^2}$、短半轴 $R_p=(1-f)R_e$、第二偏心率 $ep=\sqrt{R_e^2+R_p^2}/R_p$、子午圈半径 $R_M=R_e(1-e^2)/(1-e^2\sin^2 L)^{3/2}$、卯酉圈半径 $R_N=R_e/(1-e^2\sin^2 L)^{1/2}$。另外，重力加速度 g 和地球自转角速率 ω_{ie} 也是惯性导航解算的必备参数，在 GRS80 椭球模型中，正常重力公式为

$$g=g_0(1+5.27094\times10^{-3}\sin^2 L+2.32718\times10^{-5}\sin^4 L)-3.086\times10^{-6}h \tag{3}$$

其中 $g_0=9.7803267714$ m/s^2，h 为海拔高度，而 $\omega_{ie}=7.2921151467\times10^{-5}$ rad/s。记地球自转角速度矢量在导航坐标系投影为 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$，惯导速度 $\boldsymbol{v}^n$ 引起导航坐标系转动速度为 $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$，则

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n=[0\quad\omega_{ie}\cos L\quad\omega_{ie}\sin L]^{\mathrm{T}} \tag{4a}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n=\left[-v_N^n/(R_M+h)\quad v_E^n/(R_N+h)\quad v_E^n\tan L/(R_N+h)\right]^{\mathrm{T}} \tag{4b}$$

并且记

$$\boldsymbol{\omega}_{in}^n=\boldsymbol{\omega}_{ie}^n+\boldsymbol{\omega}_{en}^n \tag{4c}$$

2.3 圆锥误差与划船误差补偿算法

假设陀螺和加速度计均为等周期采样（采样周期 h），圆锥误差与划船误差补偿周期均为 T，且 $T=n\cdot h$，n 为子样数。再假设在第 m 个补偿周期中，陀螺角增量和加速度计比力速度增量采样输出分别为 $\Delta\boldsymbol{\theta}_m(i)$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}_m(i)$（$i=1,2,3...n$），并令采样总角增量 $\Delta\boldsymbol{\theta}_m=\sum_{i=1}^{n}\Delta\boldsymbol{\theta}_m(i)$ 和采样总比力速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}_m=\sum_{i=1}^{n}\Delta\boldsymbol{v}_m(i)$，则考虑圆锥误差补偿后的等效旋转矢量计算公式为

$$\boldsymbol{\Phi}_m=\Delta\boldsymbol{\theta}_m+[\sum_{i=1}^{n-1}k_i\Delta\boldsymbol{\theta}_m(i)]\times\Delta\boldsymbol{\theta}_m(n) \tag{5}$$

上式中第二项为圆锥误差补偿量，系数 k_i 的选择见表 1。

根据划船误差补偿算法与圆锥误差补偿算法的对偶原理，则考虑划船误差补偿后的比力速度增量计算公式为

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{v}_{sfm} &= \Delta\boldsymbol{v}_m + 1/2(\Delta\boldsymbol{\theta}_m \times \Delta\boldsymbol{v}_m) \\ &+ \{[\sum_{i=1}^{n-1} k_i \Delta\boldsymbol{\theta}_m(i)] \times \Delta\boldsymbol{v}_m(n) + [\sum_{i=1}^{n-1} k_i \Delta\boldsymbol{v}_m(i)] \times \Delta\boldsymbol{\theta}_m(n)\}\end{aligned} \tag{6}$$

上式中第二项为旋转速度增量，第三项为划船误差补偿量。

表 1　圆锥误差补偿算法系数

子样数 n	k1	k2	k3	k4
2	2/3	-	-	-
3	9/20	27/20	-	-
4	54/105	92/105	214/105	-
5	250/504	525/504	650/504	1375/504

2.4 捷联惯导更新算法

捷联惯导更新的基本思想是，将前一时刻的导航参数（姿态、速度和位置）作为初值，利用前一时刻至当前时刻的惯性器件采样输出，解算当前时刻的导航参数，作为下一时刻捷联惯导解算的初值，如此反复不断。惯性器件采样经过 2.3 小节的误差补偿后获得等效旋转矢量 $\boldsymbol{\Phi}_m$ 和比力速度增量 $\Delta\boldsymbol{v}_{sfm}$，再经过以下三步骤便可实现捷联惯导更新，这里直接给出计算公式。

（1）速度更新算法

$$\boldsymbol{v}_m^n = \boldsymbol{v}_{m-1}^n + \boldsymbol{F}_{v\to q}(-\boldsymbol{\omega}_{inm-1}^n T_m/2)\boldsymbol{q}_{bm-1}^n \Delta\boldsymbol{v}_{sfm} + [\boldsymbol{g}_{m-1} - (2\boldsymbol{\omega}_{iem-1}^n + \boldsymbol{\omega}_{enm-1}^n) \times \boldsymbol{v}_{m-1}^n]T_m \tag{7}$$

（2）位置更新算法

$$L_m = L_{m-1} + T_m v_{Nm,m-1}^n / R_M \tag{8a}$$

$$\lambda_m = \lambda_{m-1} + T_m \sec L_{m-1} v_{Em,m-1}^n / R_N \tag{8b}$$

$$h_m = h_{m-1} + T_m v_{Um,m-1}^n \tag{8c}$$

（3）姿态更新算法

$$\boldsymbol{q}_{bm}^n = \boldsymbol{q}_{bm-1}^n \boldsymbol{F}_{v\to q}(\boldsymbol{\Phi}_m - \boldsymbol{q}_{bm-1}^{n\,*} \boldsymbol{\omega}_{inm-1}^n T_m) \tag{9}$$

3. 仿真与分析

根据第 2 节的分析，将各函数和算法编制成 Matlab 的 m 文件，文件名及简要功能如表 2 所示，详细的源程序代码参见附录，文中还着重对圆锥误差补偿算法和捷联惯导更新算法进行了仿真。

表 2　Matlab 文件功能说明

文件	功能	文件	功能
glvs.m	全局变量	a2quat.m	由姿态向量求姿态四元数
earth.m	有关地球参数计算	q2att.m	由姿态四元数求姿态向量
qconj.m	四元数共轭	cnscl.m	圆锥误差和划船误差补偿
qmul.m	四元数相乘	sins.m	捷联惯导更新算法
qmulv.m	四元数乘向量	test1.m	圆锥误差补偿算法仿真
rv2q.m	等效旋转转换为四元数	test2.m	捷联惯导算法算法仿真
q2rv.m	四元数转换为等效旋转		

3.1 圆锥误差补偿算法仿真

如图 1，动坐标系 b 系相对参考坐标系 r 系绕 $o_r z_r$ 轴作圆锥运动，半锥角为 α，锥运动频率为 ω，即：b 系与 r 系坐标原点重合，$o_b x_b$ 轴以 $o_r x_r$ 轴为对称中心，在 $x_r o_r z_r$ 平面内作幅值为 α 的振动；$o_b y_b$ 轴以 $o_r y_r$ 轴为中心，在 $y_r o_r z_r$ 平面内幅值为 α 的振动；$o_b z_b$ 轴在以 $o_r z_r$ 轴为中心的圆锥面上运动。动坐标系 b 相对参考坐标系 r 的方位关系还可用姿态四元数描述为

$$\boldsymbol{q}_b^r(t) = \left[\cos(\alpha/2) \quad \sin(\alpha/2)\cos\omega t \quad \sin(\alpha/2)\sin\omega t \quad 0\right]^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

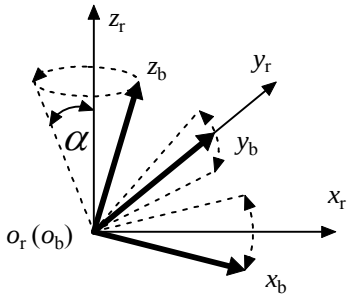


图 1　b 系相对 r 系作圆锥运动

两个相邻采样时刻之间的角增量输出为

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \begin{bmatrix} -2\sin\alpha\sin(\omega h/2)\sin[\omega(t_k + h/2)] \\ 2\sin\alpha\sin(\omega h/2)\cos[\omega(t_k + h/2)] \\ -2(\omega h)\sin^2(\alpha/2) \end{bmatrix} \tag{11}$$

其中，$h = t_{k+1} - t_k$，$\Delta\boldsymbol{\theta}_{k+1}$ 为从 t_k 时刻到 t_{k+1} 时刻的角增量，即 t_{k+1} 时刻采样获得的角增量输出。理论上可以证明，圆锥误差补偿算法在一个补偿周期 T 内的算法漂移误差为

$$\varepsilon = \frac{n \times n!}{2^{n+1}\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)}\alpha^2(\omega h)^{2n+1} \tag{12}$$

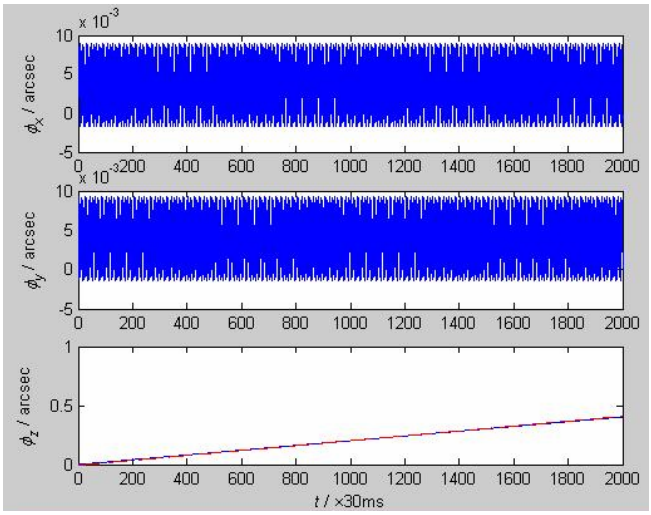


图 2　圆锥误差补偿仿真

当α=1°、ω=5Hz、h=10ms、n=3时，仿真一分钟的姿态误差如图2所示。其中蓝色曲线为圆锥误差补偿姿态与真实姿态之间的误差，可见在$o_r x_r$轴和$o_r y_r$轴有微小振荡误差，而$o_r z_r$轴为圆锥漂移误差。最下面小图中红色曲线为利用公式（12）计算的理论圆锥漂移误差，它与蓝色曲线非常接近。

此外，当ω=1Hz、h=10ms，而α和n取不同值时，进行了一系列的圆锥漂移误差仿真和理论漂移误差计算，结果如表 3 所示。从表中可以看出，只有当半锥角α很小时，高子样数的仿真误差和理论误差才比较接近，而当α较大时，高子样数的仿真误差和理论误差之间相差倍数很大，甚至在仿真误差中出现高子样补偿效果不如低子样的现象。产生这种现象的原因是，由于在圆锥漂移补偿算法推导过程中作出了半锥角α是小角度的假设，还须指出的是，在推导过程中还假设圆锥频率和采样周期乘积$\omega \cdot h$必须为小量。因此，在实际中必须结合应用环境选择合适的圆锥误差补偿算法，而并非子样数越高计算精度就越高，但是，如果考虑到实际陀螺的精度（如陀螺漂移 1×10^{-4} °/h），即使α为 10° 时，选用 3 子样的计算精度也足够了，或者提高采样频率有利于降低计算误差。

表 3　一分钟圆锥漂移误差仿真和理论计算（单位："）

α		1 子样	2 子样	3 子样	4 子样	5 子样
1"	仿真误差	6.013e-7	4.745e-10	4.016e-13	3.522e-16	9.558e-19
	理论误差	6.012e-7	4.747e-10	4.013e-13	3.523e-16	3.161e-19
1′	仿真误差	2.164e-3	1.708e-6	1.444e-9	1.612e-12	**1.623e-12**
	理论误差	2.164e-3	1.709e-6	1.445e-9	1.268e-12	**1.138e-15**
1°	仿真误差	7.790	6.148e-3	4.596e-6	**4.480e-6**	**2.103e-5**
	理论误差	7.792	6.152e-3	5.205e-6	**4.566e-9**	**4.097e-12**
10°	仿真误差	771.242	0.596	**-5.455e-3**	**4.416e-2**	**2.075e-2**
	理论误差	779.272	0.615	**5.205e-4**	**4.566e-7**	**4.097e-10**

3.2 捷联惯导算法仿真

传统上用姿态矩阵表示的计算数学平台$\boldsymbol{C}_b^{n'}$与真实数学平台$\boldsymbol{C}_b^n$之间的关系为

$$\boldsymbol{C}_b^{n'} = \boldsymbol{C}_n^{n'}\boldsymbol{C}_b^n \approx (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\varphi}\times)\boldsymbol{C}_b^n \tag{13}$$

其中$\boldsymbol{\varphi}$为平台误差角，它表示从n'系到n系的小转动角向量（可以看成是等效旋转矢量）。假设变换矩阵$\boldsymbol{C}_b^{n'}$、$\boldsymbol{C}_n^{n'}$、$\boldsymbol{C}_b^n$分别与变换四元数$\boldsymbol{q}_b^{n'}$、$\boldsymbol{q}_n^{n'}$、$\boldsymbol{q}_n^n$相对应，则有$\boldsymbol{q}_b^{n'} = \boldsymbol{q}_n^{n'}\boldsymbol{q}_b^n$，并且利用矩阵与四元数之间的关系可以证明$\boldsymbol{q}_n^{n'} = \boldsymbol{F}_{v\to q}(-\boldsymbol{\varphi})$成立，所以有

$$\boldsymbol{q}_b^{n'} = \boldsymbol{F}_{v\to q}(-\boldsymbol{\varphi})\boldsymbol{q}_b^n \tag{14a}$$

$$\boldsymbol{F}_{v\to q}(-\boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{q}_b^{n'}\boldsymbol{q}_b^{n^*} \Leftrightarrow \boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{F}_{q\to v}(\boldsymbol{q}_b^{n'}\boldsymbol{q}_b^{n^*}) \tag{14b}$$

在仿真时，通过（14）式能够方便地进行平台误差角处理，与传统矩阵描述平台误差角相比，四元数描述方法的优点是不必再作正交化处理。

对静态导航进行了仿真，初始平台误差角分别设置为0.5′、0.5′和3′，仿真一小时导航参数结果如图3所示，其中速度误差和位置误差小图中，红色曲线为高度通道的误差，它们是发散的，而水平通道（包括水平平台误差、水平速度和经纬度误差）呈现振荡趋势，方位平台误差变化比较小。仿真结果符合惯导系统误差理论分析的结论。

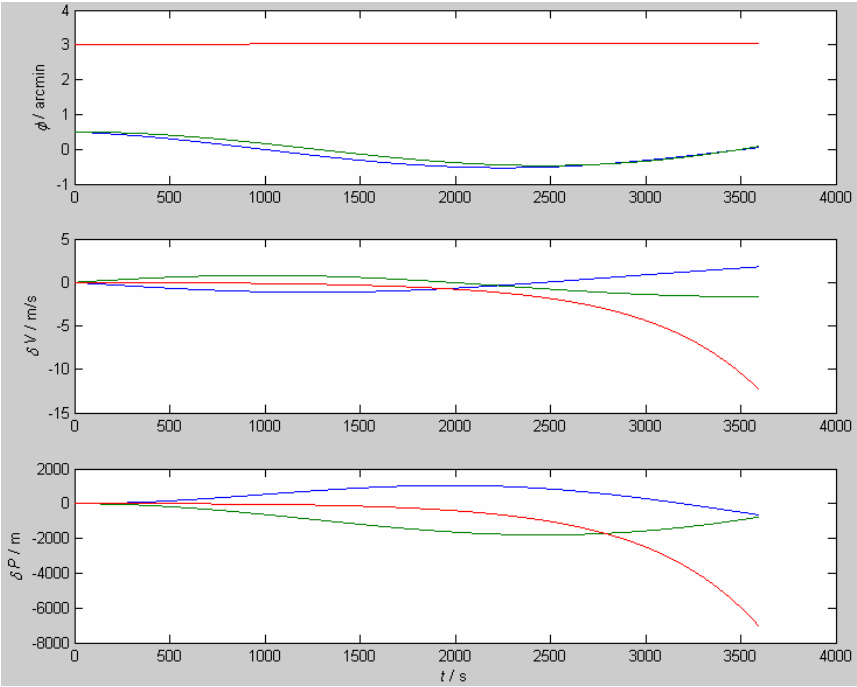


图 3　捷联惯导算法仿真

4. 小结

总结了一些与捷联惯导更新算法有关的函数的计算公式，对圆锥误差补偿算法和捷联惯导算法进行了仿真。在圆锥误差补偿算法中发现，只有当半锥角很小时，高子样数的仿真误差和理论误差才比较接近，否则相差倍数很大，因此在高精度应用场合，必须通过提高采样频率来降低计算误差。捷联惯导静态导航仿真结果与惯导系统误差理论分析结论相吻合，证明了所设计算法的正确性。

参考文献

[1]Bortz J E, A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation[J], IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,1971,7(1):61-66.
[2]Miller R B, A new strapdown attitude algorithm[J], Journal of Guidance, Control and Dynamics, 1983,6(4):287-291.
[3]Roscoe K M, Equivalency between strapdown inertial navigation coning and sculling integrals / algorithms[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics，2001，24(2)：201-205.
[4]秦永元. 惯性导航[M]. 北京：科学出版社，2006.
[5]张玲霞，陈明，曹晓青. 基于对偶性原理捷联惯导划船误差补偿优化算法[J]. 中国惯性技术学报，2003,11(5):33-38.
[6]潘献飞,吴文启,吴美平. 考虑机抖激光陀螺信号滤波特性的圆锥算法修正[J]. 中国惯性技术学报，2007,15(3):259-264.
[7]严恭敏. 捷联惯导算法及车载组和导航系统研究[D]. 西安：西北工业大学硕士论文，2004,3.
[8]严恭敏. 车载自主定位定向系统研究[D]. 西安：西北工业大学博士论文，2006,5.

Algorithm design and simulation for SINS based on Matlab

Yan Gongmin
College of Marine，Northwestern Polytechnical University，Xi'an （710072）

Abstract

Based on the research achievements of coning error compensation and sculling error compensation algorithm in strapdown inertial navigation system(SINS), and considering the convenience of simulation software program, some calculation formulas about the SINS updating algorithm are summarized in this paper. Coning error compensation algorithm simulation and SINS algorithm simulation are carried out and the simulation results are consistent with the theory analysis. Simulation source codes written in Matlab's m file are present in the appendix, and provide valuable references for SINS software designer.

Keywords：strapdown inertial navigation system；quaternion；equivalent rotate vector；Matlab；algorithm；simulation

作者简介：严恭敏（1977-），男，福建建瓯人，2006 年 9 月毕业于西北工业大学自动化学院，获导航、制导与控制专业博士学位，现在西北工业大学航海学院兵器科学与技术博士后流动站工作，主要从事陆用定位定向系统、水下航行器自主导航技术与组合导航系统理论研究。

附录　Matlab仿真程序

% glvs.m 全局变量

```
%全局变量
    global glv
    glv.Re = 6378160;                   %地球半径
    glv.f = 1/298.3;                    %地球扁率
    glv.e = sqrt(2*glv.f-glv.f^2); glv.e2 = glv.e^2; %地球椭圆度等其它几何参数
    glv.Rp = (1-glv.f)*glv.Re;
    glv.ep = sqrt(glv.Re^2+glv.Rp^2)/glv.Rp;    glv.ep2 = glv.ep^2;
    glv.wie = 7.2921151467e-5;          %地球自转角速率
    glv.g0 = 9.7803267714;              %重力加速度
    glv.mg = 1.0e-3*glv.g0;             %毫重力加速度
    glv.ug = 1.0e-6*glv.g0;             %微重力加速度
    glv.ppm = 1.0e-6;                   %百万分之一
    glv.deg = pi/180;                   %角度
    glv.min = glv.deg/60;               %角分
    glv.sec = glv.min/60;               %角秒
    glv.hur = 3600;                     %小时
    glv.dph = glv.deg/glv.hur;          %度/小时
    glv.mil = 2*pi/6000;                %密位
    glv.nm = 1853;                      %海里
    glv.kn = glv.nm/glv.hur;            %节
    glv.cs = [                          %圆锥和划船误差补偿系数
        2./3,       0,          0,          0
        9./20,      27./20,     0,          0
        54./105,    92./105,    214./105,   0
        250./504,   525./504,   650./504,   1375./504 ];
```

% earth.m 有关地球参数计算

```
function [wnie, wnen, RMh, RNh, gn] = earth(pos, vn)
global glv
    sl=sin(pos(1)); cl=cos(pos(1)); tl=sl/cl; sl2=sl*sl; sl4=sl2*sl2;
    wnie = glv.wie*[0; cl; sl];
    sq = 1-glv.e2*sl2; sq2 = sqrt(sq);
    RMh = glv.Re*(1-glv.e2)/sq/sq2+pos(3);
    RNh = glv.Re/sq2+pos(3);
    wnen = [-vn(2)/RMh; vn(1)/RNh; vn(1)/RNh*tl];
    g = glv.g0*(1+5.27094e-3*sl2+2.32718e-5*sl4)-3.086e-6*pos(3); % grs80
    gn = [0;0;-g];
```

% qconj.m 四元数共轭

```
function qo = qconj(qi)
    qo = [qi(1); -qi(2:4)];
```

% qmul.m 四元数相乘

```
function q = qmul(q1,q2)
    q = [ q1(1) * q2(1) - q1(2) * q2(2) - q1(3) * q2(3) - q1(4) * q2(4);
          q1(1) * q2(2) + q1(2) * q2(1) + q1(3) * q2(4) - q1(4) * q2(3);
          q1(1) * q2(3) + q1(3) * q2(1) + q1(4) * q2(2) - q1(2) * q2(4);
          q1(1) * q2(4) + q1(4) * q2(1) + q1(2) * q2(3) - q1(3) * q2(2) ];
```

% qmulv.m 四元数乘向量

```
function vo = qmulv(q, vi)
    qi = [0;vi];
    qo = qmul(qmul(q,qi),qconj(q));
    vo = qo(2:4,1);
```

% rv2q.m 等效旋转转换为四元数

```
function q = rv2q(rv)
    norm = sqrt(rv'*rv);
    if norm>1.e-20
        f = sin(norm/2)/(norm/2);
    else
        f = 1;
    end
    q = [cos(norm/2); f/2*rv];
```

% q2rv.m 四元数转换为等效旋转

```
function v = q2rv(q)
    n2 = acos(q(1));
    if n2>1e-20
        k = 2*n2/sin(n2);
    else
        k = 2;
    end
    v = k*q(2:4);
```

% a2quat.m 由姿态向量求姿态四元数

```
function q = a2quat(att)
    % 先求姿态矩阵
    si = sin(att(1)); ci = cos(att(1)); sj = sin(att(2)); cj = cos(att(2));
    sk = sin(att(3)); ck = cos(att(3));
    M = [ cj*ck+si*sj*sk, ci*sk,    sj*ck-si*cj*sk;
         -cj*sk+si*sj*ck, ci*ck, -sj*sk-si*cj*ck;
         -ci*sj,          si,        ci*cj ];
    % 再求四元数
```

```
    q = [                           sqrt(abs(1.0 + M(1,1) + M(2,2) + M(3,3)))/2.0;
        sign(M(3,2)-M(2,3)) * sqrt(abs(1.0 + M(1,1) - M(2,2) - M(3,3)))/2.0;
        sign(M(1,3)-M(3,1)) * sqrt(abs(1.0 - M(1,1) + M(2,2) - M(3,3)))/2.0;
        sign(M(2,1)-M(1,2)) * sqrt(abs(1.0 - M(1,1) - M(2,2) + M(3,3)))/2.0 ];
```

% q2att.m 由姿态四元数求姿态向量

```
function att = q2att(qnb)
    % 先求姿态矩阵
    q11 = qnb(1)*qnb(1); q12 = qnb(1)*qnb(2); q13 = qnb(1)*qnb(3); q14 = qnb(1)*qnb(4);
    q22 = qnb(2)*qnb(2); q23 = qnb(2)*qnb(3); q24 = qnb(2)*qnb(4);
    q33 = qnb(3)*qnb(3); q34 = qnb(3)*qnb(4);
    q44 = qnb(4)*qnb(4);
    M = [ q11+q22-q33-q44,   2*(q23-q14),        2*(q24+q13);
          2*(q23+q14),         q11-q22+q33-q44, 2*(q34-q12);
          2*(q24-q13),         2*(q34+q12),       q11-q22-q33+q44 ];
    % 再求姿态
    att = [asin(M(3,2)); atan(-M(3,1)/M(3,3)); atan(M(1,2)/M(2,2))];
    if M(3,3) < 0
        if(att(2) < 0)   att(2) = att(2)+pi;
        else                 att(2) = att(2)-pi;
        end
    end
    if( M(2,2) > 0)
        if(att(3) < 0)       att(3) = att(3)+pi*2;
        end
    else      att(3) = att(3)+pi;
    end
```

% cnscl.m 圆锥误差和划船误差补偿

```
function [phim, dvbm] = cnscl(wm, vm)
global glv
    n = size(wm,2);
    cm = [0;0;0]; sm = [0;0;0];
    for k=1:n-1
        cm = cm + glv.cs(n-1,k)*wm(:,k); %准备圆锥误差补偿
    end
    wmm = sum(wm,2);
    phim = wmm + cross(cm,wm(:,n));
    if nargin==2
        for k=1:n-1
            sm = sm + glv.cs(n-1,k)*vm(:,k); %准备划船误差补偿
        end
        vmm = sum(vm,2);
        dvbm = vmm + 1.0/2*cross(wmm,vmm) + (cross(cm,vm(:,n))+cross(sm,wm(:,n)));
    end
```

% sins.m 捷联惯导更新

```
function [qnb, vn, pos] = sins(qnb_1, vn_1, pos_1, wm, vm, ts)
    tss = ts*size(wm,2);
    [phim,dvbm] = cnscl(wm,vm);
    [wnie,wnen,rmh,rnh,gn] = earth(pos_1,vn_1);
    wnin = wnie+wnen;
    vn = vn_1 + qmulv(rv2q(-wnin*(1.0/2*tss)),qmulv(qnb_1,dvbm)) + (gn-cross(wnie+wnin,vn_1))*tss;
    pos = pos_1 + tss*[vn_1(2)/rmh;vn_1(1)/(rnh*cos(pos_1(1)));vn_1(3)];
    qnb = qmul(qnb_1, rv2q(phim - qmulv(qconj(qnb_1),wnin*tss)));
```

% test1.m 圆锥误差补偿仿真

```
glvs
clear err dtheta
a = 1*glv.deg;   %半锥角
w = 2*pi*5;       %锥运动频率
```

```
h = 0.01;           %采样时间
n = 3;              %子样数
len = fix(1*60/h);  %仿真时间长度
t = 0;              %初始姿态四元数
q = [cos(a/2); sin(a/2)*cos(w*t); sin(a/2)*sin(w*t); 0];   q1 = q;
for k=n:n:len
    %  姿态真值
    t = k*h;
    q = [cos(a/2); sin(a/2)*cos(w*t); sin(a/2)*sin(w*t); 0];
    %  锥运动解算值
    for m=1:n
        t = (k-n+m-1)*h;
        dtheta(:,m) = [-2*sin(a)*sin(w*h/2)*sin(w*(t+h/2));
            2*sin(a)*sin(w*h/2)*cos(w*(t+h/2));
            -2*w*h*(sin(a/2))^2 ];   %角增量
    end
    phi = cnscl(dtheta);            %圆锥误差补偿
    q1 = qmul(q1,rv2q(phi));        %姿态更新
    err(k/n,:) = -q2rv(qmul(q1,qconj(q)))'; %求姿态误差
end
figure
subplot(3,1,1), plot(err(:,1)/glv.sec), ylabel('\it\phi_x\rm / arcsec');
subplot(3,1,2), plot(err(:,2)/glv.sec), ylabel('\it\phi_y\rm / arcsec');
subplot(3,1,3), plot(err(:,3)/glv.sec), ylabel('\it\phi_z\rm / arcsec');
str = sprintf('\\itt\\rm / \\times%.0fms', n*h*1000); xlabel(str);
%  理论圆锥误差
k2 = 1;
for k=1:n+1
    k2 = k2*(2*k-1);
end
epsilon = a^2*(w*h)^(2*n+1) * n*factorial(n) / (2^(n+1)*k2);
hold on, plot([0,length(err)],[0,epsilon]*length(err)/glv.sec,'r--')
```

% test2.m 捷联惯导更新仿真

```
glvs
clear errphi errvn errpos
ts=0.1;             %采样周期
att0=[0;0;0]*glv.deg; vn0=[0;0;0]; pos0=[0*glv.deg;0;0];    %初始值设置
qnb0 = a2quat(att0);
vn = vn0; pos = pos0;
wnie = glv.wie*[0; cos(pos0(1)); sin(pos0(1))];
g = glv.g0*(1+5.27094e-3*sin(pos0(1))^2+2.32718e-5*sin(pos0(1))^4)-3.086e-6*pos0(3);
wbib = qmulv(qconj(qnb0),wnie);
fb = qmulv(qconj(qnb0),[0;0;g]);
wm=wbib*ts; vm=fb*ts;    %静止时角增量和比力增量
qnb = qmul(rv2q(-[0.5;0.5;3]*glv.min),qnb0); %加入姿态误差
kk = 1;
for k=1:3600*10
    [qnb,vn,pos]=sins(qnb,vn,pos,wm,vm,ts);
    if mod(k,10)==0
        errphi(kk,:) = -q2rv(qmul(qnb,qconj(qnb0)))'; %求姿态误差
        errvn(kk,:) = (vn-vn0)';
        errpos(kk,:) = (pos-pos0)';
        kk = kk+1;
    end
end
figure,
subplot(3,1,1),plot(errphi/glv.min), ylabel('\it\phi\rm / arcmin');
subplot(3,1,2),plot(errvn), ylabel('\it\delta V\rm / m/s');
subplot(3,1,3),plot([errpos(:,1:2)*glv.Re,errpos(:,3)]), ylabel('\it\delta P\rm / m');
xlabel('\itt\rm / s');
```

加速度计 I/F 采样对惯导调平及划船误差的影响

严恭敏
（西北工业大学自动化学院，西安 710072）

摘要：以几个比较典型和特殊的惯导系统应用环境作为研究对象，对加速度计采样 I/F 变换（电流/频率变换）脉冲当量大小的影响进行了分析。在小比力输入条件下，I/F 脉冲输出很少，甚至为零，如果调平时间较短，可能引起较大的水平调平误差；在小幅度划船运动环境下，如果 I/F 脉冲当量太大使输出为零，将导致导航解算速度和位置误差的不断积累。研究结论对优化 I/F 变换电路脉冲当量设计具有参考价值。

关键词：惯导系统；I/F 变换；调平；划船误差；计算机仿真
中图分类号：V249.3

Effects on INS leveling and sculling errors by accelerometer I/F conversion

Yan Gongmin
(Department of Automation Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: In some typical and special INS(inertial navigation system) application cases, the Effects on leveling and sculling errors by accelerometer I/F conversion(current to frequency conversion) pulse equivalent are studied. Firstly, under small accelerometer special force input environment, the I/F circuit may have very sparse pulse output, even diminishing to zero output. So, if sufficient alignment time is unavailable, the INS leveling errors may increase to unacceptabe extent. Secondly, on small amplitude sculling case, the I/F circuit may always have zero output and this will result in gradual accumulations of INS velocity and position computation errors. The study results proposed in this paper have considerable value for optimizing design of I/F conversion pulse equivalent.

Key words: inertial navigation system; I/F conversion; leveling; sculling error; computer simulation

0 引言

I/F变换（电流/频率变换）将模拟信号变换成数字信号，具有数字化、变换精度高和抗干扰能力强等优点，在自动控制、测量、微弱信号检测及惯性导航等领域有着广泛的应用[1]。惯导系统使用加速度计测量比力，由比力积分获得运载体速度和位置。在基于闭环力反馈方案设计的加速度计中，力反馈电流正比于比力输入，高精度的惯导系统往往使用I/F变换进行加速度计采样，实现模拟信号与导航计算机数字接口之间的过渡连接。I/F变换输出计数脉冲，正比于比力在一段时间内的积分（速度增量），速度增量与相应脉冲数之间的比例关系即为脉冲当量（或量化单位）。例如，加速度计感测1 g（重力加速度 $g \approx 9.8\text{m/s}^2$）比力，经过I/F变换后，在1sec内输出 N 个脉冲，则脉冲当量为 $g \cdot \text{sec}/N$，也就是1个I/F脉冲代表 $g \cdot \text{sec}/N$ 速度增量。

在普通的A/D变换中，使用采样、量化及z变换等概念和数学工具描述，取得了良好的

作者简介：严恭敏（1977-）男，博士，副教授，主要从事惯性导航与信息融合理论研究. E-mail: yangongmin@163.com

分析效果[2,3]。I/F变换采用输入电流积分和量化电荷反馈原理，加之导航计算机周期性读取计数脉冲，与常规的A/D变换相比，具有量化余量后移及无速度增量累积误差的特点，从而难以使用A/D变换的数学方法来描述计算机读取的I/F脉冲数据。惯导系统中，如果I/F变换的脉冲当量越大，特别在较小且时变的比力输入环境下，量化余量后移效应越明显，类似于控制系统频域中的相位延迟，将给惯导系统带来诸多不利的影响。目前，国内惯导系统研制单位使用的I/F变换脉冲当量各不相同，其 N 值较少者为一千左右，甚至更少，多则一万以上，甚至几万。当然，从降低量化延迟角度来说 N 值越大越好，但是，量化电荷反馈过小不易实现，或在大比力量程时高频反馈脉冲往往会降低I/F电路的性能。对于一定精度和应用环境的导航系统，在公开文献中尚未见有关于如何确定合适脉冲当量的专门讨论。针对惯导系统的几个比较典型和特殊的应用环境，如初始对准的水平调平和捷联惯导系统（SINS）导航过程中的划船运动，本文采用理论分析和仿真方法，对加速度计I/F采样可能引起的误差进行了分析，研究结论对优化I/F变换电路脉冲当量设计具有参考价值。

1 姿态对准水平调平误差分析

为简化分析，忽略地球自转影响，以 SINS 处于某一特殊角位置为例，如图 1 所示，SINS 的 x_b 轴水平并且指向东向， y_b 轴与水平夹角（即俯仰角 θ ）为小角度，理论上有

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega_{ibx}^{b} \\ \dot{v}_y = f_{sfy}^{b} - g\sin(\theta) \approx f_{sfy}^{b} - g\theta \end{cases} \tag{1}$$

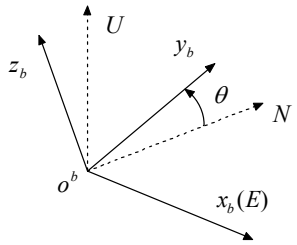


图 1　SINS 俯仰角示意图

Fig. 1　A scheme for SINS pich angle

其中 ω_{ibx}^{b} 为 x_b 轴角速率，f_{sfy}^{b} 为 y_b 轴比力。考虑到陀螺漂移误差 ε_x 、加速度计偏置误差 ∇_y ，则有

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\theta}} = \tilde{\omega}_{ibx}^{b} = \omega_{ibx}^{b} + \varepsilon_x \\ \dot{\tilde{v}}_y = \tilde{f}_{sfy}^{b} - g\tilde{\theta} = f_{sfy}^{b} + \nabla_y - g\tilde{\theta} \end{cases} \tag{2}$$

定义俯仰角误差 $\delta\theta = \tilde{\theta} - \theta$ 和速度误差 $\delta v_y = \tilde{v}_y - v_y$ ，将式(2)减去式(1)，得速度误差的变化规律

$$\begin{cases} \delta\dot{\theta} = \varepsilon_x \\ \delta\dot{v}_y = \nabla_y - g\delta\theta \end{cases} \tag{3}$$

根据式(3)，利用类似于平台惯导系统的水平调平原理[4]，设计三阶调平控制律（即 PID，比例-积分-微分控制），使用速度误差信号 δv_y 控制俯仰角误差 $\delta\theta$ 衰减，原理如图 2 所示，其中 ω_{cx} 为调平控制律的输出， k_1 、 k_2 和 k_3 为控制律参数。

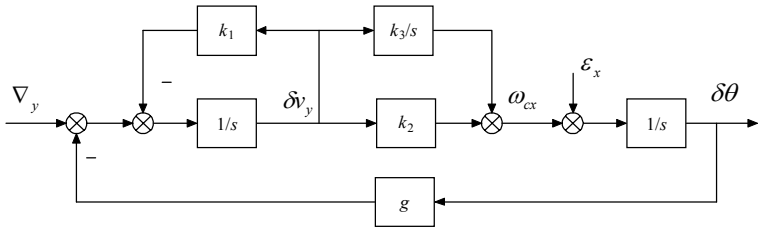


图 2　俯仰角误差控制原理

Fig. 2　Control principle of pitch angle error

由图 2 得复频域输入输出关系

$$\delta\theta = \frac{(sk_2 + k_3)\nabla_y + s(s + k_1)\varepsilon_x}{\Delta(s)} \tag{4}$$

其中特征方程式为 $\Delta(s) = s^3 + s^2 k_1 + sk_2 g + k_3 g$。通常取 $k_1 = 3\sigma$，$k_2 = (3\sigma^2 + \omega_d^2)/g$，$k_3 = (\sigma^3 + \sigma\omega_d^2)/g$，其中 σ 为衰减系数、ω_d 为阻尼振荡频率，且有 $\sigma = 2\pi\xi/(T_d\sqrt{1-\xi^2})$ 和 $\omega_d = 2\pi/T_d$，而 ξ 为阻尼系数，常取 $\xi = 0.707$，T_d 为无阻尼振荡周期。

1.1　微幅交变比力输入的影响

参见图 1，假设 SINS 绕 x_b 轴作幅值为 α、频率为 Ω 的角振动 $\theta = \alpha\cos(\Omega t)$，且加速度计敏感表头部分是理想无测量误差的，则 y_b 轴加速度计输出为

$$f_{sfy}^b = g\sin\theta \approx g\alpha\cos(\Omega t) \tag{5}$$

对其从 0 时刻至 t_k 时刻积分，得总速度增量输出

$$\Delta V_y(t_k) = \int_0^{t_k} f_{sfy}^b \mathrm{d}t = \frac{g\alpha}{\Omega}\sin(\Omega t_k) \tag{6}$$

令加速度计 I/F 变换脉冲当量为 $g\cdot\sec/N$。显然，当 $g\alpha/\Omega < g\cdot\sec/N$ 时，在前述角振动条件下 I/F 变换电路始终不会有脉冲输出，不妨假设在角振动极限值 $\alpha_{\max} = \Omega\cdot\sec/N$ 下恰好无脉冲输出。

若假设陀螺仪测量是理想的（无漂移和量化误差等），对应于角振动幅值 $\alpha_{\max}$，加速度计 I/F 脉冲输出始终为 0，此时，对误差原理图 2 而言，可等效于加速度计存在偏置误差

$$\nabla_y = -f_{sfy}^b = -g\alpha_{\max}\cos(\Omega t) = -\frac{g\cdot\sec}{N}\cdot\Omega\cos(\Omega t) \tag{7}$$

将三角函数式(7)的幅值部分代入式(4)而忽略陀螺漂移误差 ε_x，得

$$\delta\theta = -\frac{1}{N}\cdot\frac{(sk_2 + k_3)\cdot\Omega g\cdot\sec}{\Delta(s)} \tag{8}$$

令

$$\delta\theta_N = -\frac{(sk_2 + k_3)\cdot\Omega g\cdot\sec}{\Delta(s)} \tag{9}$$

当取 T_d =10 sec 时，求得式(9)的幅频特性如图 3 所示。

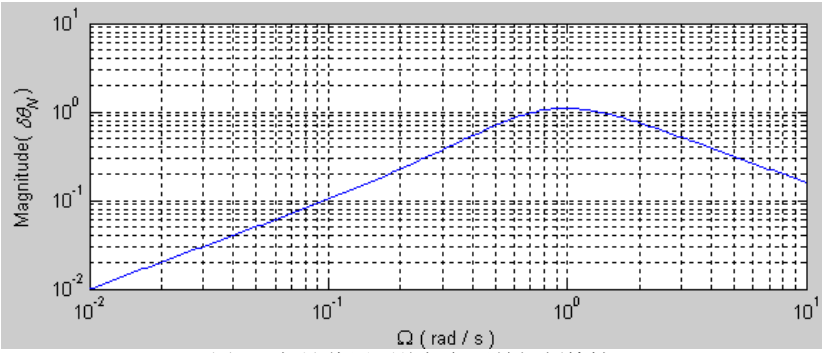


图 3　加计偏置至俯仰角误差幅频特性

Fig. 3　amplitude-frequency characteristics between accelerometer bias and pitch angle error

从图 3 中可以看出，大约在 $\Omega=1$ rad/s 时，取得最大值 $\delta\theta_N\approx1.1$。若设 I/F 脉冲当量中 N 值为 $N=1000$，则 $\delta\theta=\delta\theta_N/N\approx3.78'$（对应最大角振动幅值 $\alpha_{\max}=\Omega\cdot\sec/N=3.44'$），由此可见，在角振动环境下，$N$ 值太小对调平精度影响比较大。由式（8）可知，增大 N 值可成比例地减小俯仰角误差 $\delta\theta$，此外，通过延长时间常数 T_d，亦可从整体上降低幅频特性 $\delta\theta_N$ 的幅值。

1.2　微小常值比力输入的影响

再次参见图 1，假设俯仰角 θ 为常值，理论上有加速度计比力测量大小

$$f_{sfy}^{b}=g\sin\theta \tag{10}$$

I/F 变换电路脉冲当量为 $g\cdot\sec/N$，输出速度增量 $\Delta V_y(t_k)$ 脉冲序列的周期为 T_{IF}，则有

$$T_{IF}f_{sfy}^{b}=\frac{g\cdot\sec}{N}\qquad\text{即}\qquad T_{IF}=\frac{\sec}{N\sin\theta} \tag{11}$$

结合误差原理图 2、公式(11)、I/F 变换原理和导航计算机等周期采样特点，得出俯仰角解算原理图 4。

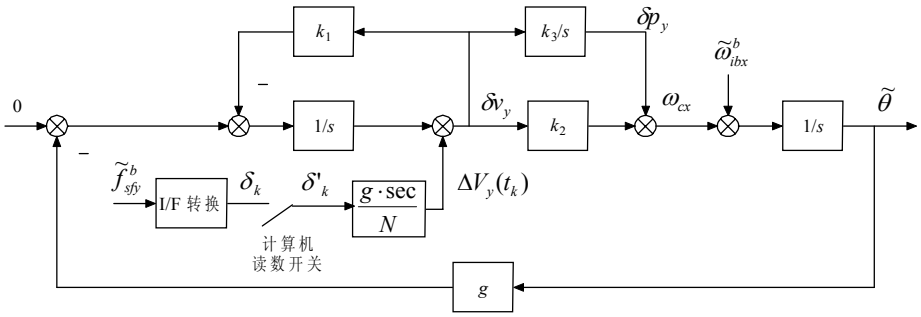


图 4　I/F 变换与俯仰角解算原理

Fig. 4　Scheme of I/F conversion and pitch angle calculation

在图 4 中，欲用数学方法描述 I/F 变换是很困难的，并且由于存在计算机读数开关环节，使得 I/F 脉冲输出 δ_k 与计算机读数脉冲 δ'_k 之间有差别，但是，在常值小比力输入条件下，若导航计算机读数开关频率很高（即周期足够短，远小于 T_{IF}），可认为 δ_k 与 δ'_k 几乎是同步一致的，近似得 I/F 脉冲输出 δ_k 至 $\tilde{\theta}$ 的传递函数

$$\tilde{\theta} = \frac{g \cdot \sec}{N} \times \frac{s(sk_2 + k_3)\delta_k}{\Delta(s)} \tag{12}$$

对上式作反拉普拉斯变换，可求得时域表示的$\tilde{\theta}$，但是计算过程和结果比较复杂。假设$N = 1000$，$\xi = 0.707$，$T_d = 10\text{sec}$，暂且忽略加速度计偏置和陀螺漂移误差，仿真结果见图5。当俯仰角真实值$\theta = 0.2'$时，I/F 脉冲输出δ_k如小图（A），俯仰角调平结果如小图（B）；当俯仰角真实值$\theta = 2'$时，I/F 脉冲输出δ_k如小图（C），俯仰角调平结果如小图（D）。图（A）的脉冲频率相对较低，结果图（B）对准误差峰值约 2′；而图（C）的脉冲频率高，结果图（D）对准误差峰值约 0.7′。进一步仿真结果表明：大致以T_d为界限，若 I/F 输出脉冲周期大于T_d，俯仰角误差基本保持不变；若 I/F 输出脉冲周期小于T_d，则俯仰角误差随T_{IF}减小而不断减小。因此，特别在俯仰角比较小时，I/F 脉冲输出稀疏，它对调平精度影响最大。仿真试验还表明在 Kalman 等水平对准估计方法中也存在着类似现象。

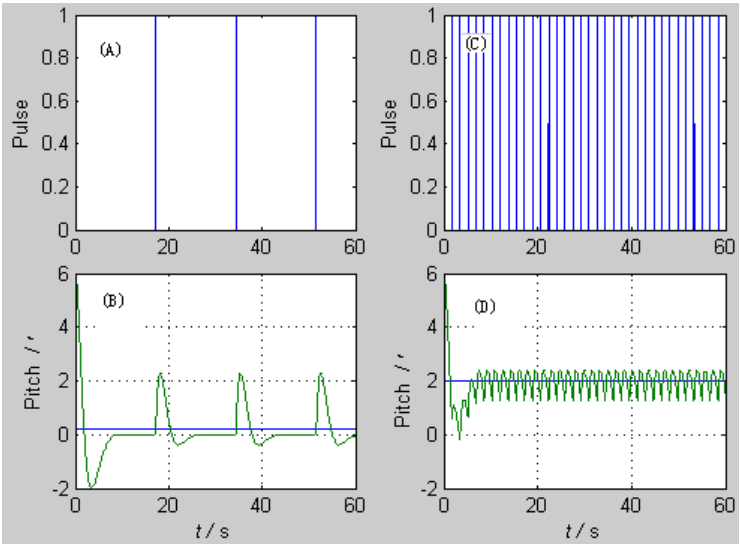


图 5　常值比力输入时的俯仰角调平

Fig. 5　Pitch angle leveling under small accelerometer output

更为浅显的特例如下所述。在某固定俯仰角下，若以一段时间段T_A内的平均 I/F 脉冲输出计算该俯仰角，则由于时间起始点选择的随机性，该时间段内可能存在 1 个脉冲的差异，其造成的俯仰角误差为

$$\delta\theta = \frac{g \cdot \sec / N}{g \cdot T_A} = \frac{\sec}{NT_A} \tag{13}$$

众所周知，由加速度计精度（主要指标为随机常值偏置∇）决定的水平角对准误差为∇ / g，因此，可以根据加速度计精度和水平对准所需最短时间T_A，比较∇ / g和$\sec/(NT_A)$，设计合适的 I/F 脉冲当量大小，按 10 倍准则计，一般需保证$10 \times \sec/(NT_A) < \nabla / g$，即$N > 10\sec/T_A \times g/\nabla$。

在惯导系统存储航向快速对准或快速零速修正等需要快速水平调平的场合[5-7]，如需在 5~10sec 内实现，借用本节的分析结论，评估 I/F 脉冲当量对水平调平精度的影响具有很好的参考价值。

2 划船运动引起导航解算误差分析

如果 SINS 姿态角固定不变，加速度计的 I/F 变换输出延迟并不会造成速度解算累计误差；但是，如果导航系统处于姿态角不断变化的环境中，同时比力方向也不断改变，延迟就可能引起严重的导航速度和位置误差，这一运动环境的典型例子是划船运动[4,8]。下文以划船运动来说明加速度计 I/F 变换对导航解算的影响。

暂不考虑重力场及惯性仪表表头测量误差，假设 SINS 测量角速度 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$ 和比力 $\boldsymbol{f}_{sf}^{b}$ 分别为

$$\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}=\begin{bmatrix}-A_{\theta}\Omega\sin\Omega t\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{f}_{sf}^{b}=\begin{bmatrix}0\\-A_{p}\Omega^{2}\cos\Omega t\\0\end{bmatrix} \tag{14}$$

不妨以惯性坐标系作为导航参考坐标系，设置参数 $A_{\theta}=1°$、$A_{p}=0.001\text{m}$、$\Omega=2\pi\text{rad/s}$，并且 SINS 初始俯仰角为 $\theta(0)=A_{\theta}=1°$、横滚角和方位角均为 0、初始速度和位置也为 0，共进行 6 s 仿真试验，图 6 是导航系下 Z 轴速度输出，图 7 是 Y-Z 平面运动轨迹图。从图 6 中可以看出，速度以线性趋势增长，其斜率（加速度）约为 $2/6\times10^{-3}\ \text{m/s}^2\approx3.4\times10^{-5}\ g$；图 7 显示，划船运动在导航坐标系的 Y 轴做反复运动，而 Z 轴坐标值加速上升。值得一提的是，Z 坐标并不像习惯上理解的那样静止不动，如欲使之不动，还必须在比力 $\boldsymbol{f}_{sf}^{b}$ 的 Z 分量上加入合适的向心加速度，其大小为载体系下 ox_b 轴角速度与 oy_b 轴速度的乘积。

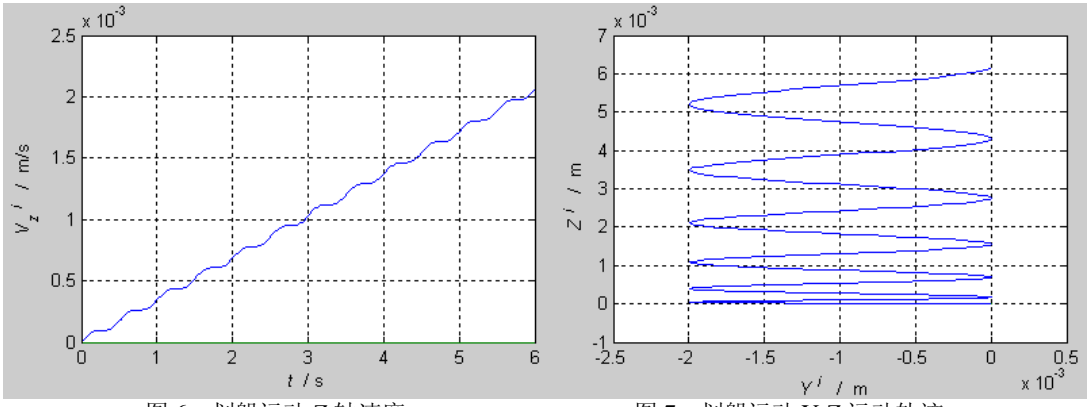


图 6 划船运动 Z 轴速度

Fig. 6 Z axis velocity under sculling

图 7 划船运动 Y-Z 运动轨迹

Fig. 7 Y-Z plane tracks under sculling

如果将式（14）的比力 $\boldsymbol{f}_{sf}^{b}$ 从 0 时刻开始积分，得理想总速度增量 $\Delta\boldsymbol{V}(t)$：

$$\Delta\boldsymbol{V}(t)=\begin{bmatrix}0\\-A_{p}\Omega\sin\Omega t\\0\end{bmatrix} \tag{15}$$

显然，如果取 I/F 变换脉冲当量中 N 值为 1000，即一个 I/F 脉冲约为 0.0098m/s，则式（15）的幅值 $A_{p}\Omega\approx0.00628\text{m/s}$ 不足一个 I/F 脉冲，即加速度计 I/F 采样始终不会有脉冲输出，从而使得导航解算指示的速度和位置一直为 0。换个角度看，也可将图 6 和图 7 看作是在 I/F 无脉冲输出时的划船运动导航解算误差，经计算 1 hur 后 Z 轴速度误差将达 1.2 m/s，Z 轴位置误差 2160 m，该误差与惯性级导航系统误差相当，在高精度惯导系统中值得引起足够重视。

3 结论

在 SINS 初始对准的水平调平和划船运动环境中，对加速度计 I/F 变换脉冲当量可能引起的水平对准和导航解算误差进行了分析。尤其在小比力输入条件下，I/F 脉冲输出很少，甚至为零，如果调平时间较短，可能引起较大的水平调平误差，通过减小 I/F 脉冲当量可成比例地提高调平精度。在小幅度划船运动环境下，如果 I/F 脉冲当量太大使输出为零，将导致导航解算速度和位置误差的不断积累。易知，文中关于 I/F 脉冲当量对导航系统负面影响的结论也完全适用于 V/F 变换（电压/频率变换）情形，亦可将文中部分研究方法稍作修改，将其应用于分析常规 A/D 量化单位的影响。

[参考文献] (References)

[1] 林春方,杜先彬,郭立. 基于 I-F 变换的弱电流测量仪的研制[J]. 上海交通大学学报,2006,40(9):1516-1518.
[2] Oppenheim A V, Schafer R W, Buck J R. Discrete-time signal processing(2nd edition)[M]. Upper Siddle River, NJ, USA, Prentice-Hall Inc.,1999.
[3] 胡寿松主编. 自动控制原理（第四版）[M]. 北京:科学出版社,2001.
[4] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京:科学出版社,2006.
[5] WANG Jin，GAO Zhong-yu，DONG Jing-xin，et al. Real Time Estimations of Position and Gravity Vector for an Inertial Survey System[C]. Symposium of Gyro Technology,Stuttgart,Germany,1995,9.
[6] 杨鹏翔，秦永元，宋丽君,等. 基于水平罗经的捷联惯导系统自动零速修正[J].中国惯性技术学报,2010,18(1):52-57.
[7] 练军想,吴文启,吴美平,等. 车载 SINS 行进间初始对准方法[J].中国惯性技术学报,2007,15(2):155-159.
[8] Roscoe K M. Equivalency between Strapdown Inertial Navigation Coning and Sculling Integrals Algorithms[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics,2001,24(2):201-205.

车载 SINS/GPS 组合卡尔曼滤波快速计算方法

严恭敏

（西北工业大学自动化学院，西安 710072）

摘要：在车载 SINS/GPS 组合导航系统中，针对系统矩阵为稀疏矩阵、量测协方差阵是对角阵且量测矩阵的非零元均为 1、以及惯导水平通道和高度通道弱耦合的特点，采取状态协方差阵预测直接展开计算、量测更新序贯滤波处理、以及将系统矩阵中次要元素强制置零和降维次优滤波等方法，提出了一种 Kalman 滤波快速计算方法，极大减少运算量，仅为常规算法的 6.59%。最后，通过跑车试验验证了所提方法的可行性。

关键词：捷联惯导系统；Kalman 滤波；计算方法；组合导航

中图分类号：V249.3

for Kalman filtering in vehicular SINS/GPS integrated system

Yan Gongmin

(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072)

Abstract: In vehicular SINS/GPS integrated navigation system, the state space model has some special characteristics, including a sparse system matrix, measurement covariance matrix to be diagonal, none zero elements in measurement matrix to be all 1, and the weak couple between SINS level channel and altitude channel. Base of the above characteristics, a new rapid computation method for Kalman filtering is proposed. In this method, the prediction of state covariance matrix is dericetly expanded rather than computing by a looping program. Sequential filtering for measurement update is also applied. Furthermore, the subsidiary elements in system matrix are set to zero and a reduced-dimensions suboptimal Kalman filter is presented. The proposed method greadly decreases computation burden, and it is only 6.59% of the classic method. In the end, a vehicular test was caried out to prove the feasibility of the filter.

Keywords: strapdown inertial navigation system; Kalman filtering; computation method; integrated navigation

0 引言

卡尔曼（Kalman）滤波是一种线性最小方差估计，在建立状态空间模型基础上采用递推计算方法实现，具有一系列优良的特性，在工程领域获得了广泛的应用。然而，Kalman 滤波常规算法的运算量（主要以乘法运算次数为指标）与状态维数的三次方成正比，状态维数越高，运算量呈几何倍数增长，高维模型滤波对于解算计算机来说是一个沉重的负担。

捷联惯导解算输入（角速率和比力）和输出（姿态、速度和位置）之间的关系是强非线性的，通常基于小量误差假设建立惯导误差线性模型，对 SINS/GPS 组合进行间接 Kalman 滤波，估计惯导误差，再修正导航参数。众所周知，在运载体机动条件下，高精度的捷联惯导系统要求较高的惯性器件采样和捷联惯导解算频率。同理，在 Kalman 滤波中，为了获得高精度的惯导误差状态及其协方差阵的预测值，也需要较高的 Kalman 滤波时间更新频率。对跑车试验的陀螺角速率和加速度计比力作频谱分析表明，高频段可达 20～30Hz，按香农采样原则，SINS/GPS 组合连续状态方程离散化和 Kalman 时间更新频率应高于高频段的 2

作者简介：严恭敏，（1977-），男，博士，副教授，主要从事惯性导航与信息融合理论研究. E-mail: yangongmin@163.com

倍，即 Kalman 滤波时间更新频率设置在 60Hz 以上才是完全可靠的。文献[1]认为“当离散周期为最小时间常数的 1/2 左右时，近似程度相当满意”，也是类似的道理。高频率的时间更新，无疑提高了对导航计算机运算能力的要求。

据分析，在 Kalman 滤波中状态协方差阵预测的运算量最多，约占 70%，文献[2]提出了一种“矩阵外积”法，使得协方差阵预测所需乘法次数降为 s^2-u^2（s,u 分别为状态转移矩阵中非零元素的个数及数值为 1 的元素个数）。车载 SINS/GPS 组合 Kalman 滤波高频率的时间更新过程必然带来巨大的运算量，有必要研究进一步减少的措施。本文提出了状态协方差阵预测直接展开的计算方法，运算量比“矩阵外积”法少，还使用了量测序贯滤波处理和降维次优滤波等手段进一步降低运算量，满足快速计算的要求。

1 SINS/GPS 组合滤波模型

若选择状态向量 $\boldsymbol{X}=\left[\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\delta v}^{n\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\delta p}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{b\mathrm{T}} \quad \nabla^{b\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\delta v}^{n},\boldsymbol{\delta p},\boldsymbol{\varepsilon}^{b},\nabla^{b}$ 分别为数学平台误差、速度误差、位置误差、陀螺常值零漂、加速度计常值偏置，以位置误差作为量测的 SINS/GPS 松组合 Kalman 滤波状态空间模型可写成

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{\Phi X}+\boldsymbol{W}\\ \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{HX}+\boldsymbol{V}\end{cases} \tag{1}$$

式中：

系统矩阵 $\boldsymbol{\Phi}=\begin{bmatrix}-(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times) & \boldsymbol{M}_1 & \boldsymbol{M}_2 & -\boldsymbol{C}_b^n & \boldsymbol{0}_{3\times3}\\ (\boldsymbol{f}_{sf}^{n}\times) & \boldsymbol{M}_3 & \boldsymbol{M}_4 & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{C}_b^n\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{M}_5 & \boldsymbol{M}_6 & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3}\\ & & \boldsymbol{0}_{6\times15} & & \end{bmatrix}$；

量测矩阵 $\boldsymbol{H}=\left[\boldsymbol{0}_{3\times6} \quad \boldsymbol{I}_{3\times3} \quad \boldsymbol{0}_{3\times6}\right]$；

系统噪声协方差阵 $\boldsymbol{Q}=Var(\boldsymbol{W})=Var(\left[\boldsymbol{0}_{1\times9} \quad \boldsymbol{w}_G^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{w}_A^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}})$，其中 $\boldsymbol{w}_G$、$\boldsymbol{w}_A$ 分别为陀螺和加速度计高斯白噪声，互不相关；

量测噪声协方差阵 $\boldsymbol{R}=Var(\boldsymbol{V})=Var(\left[v_L \quad v_\lambda \quad v_h\right]^{\mathrm{T}})$，其中 v_L、v_λ、v_h 分别为 GPS 纬度、经度和高度量测高斯白噪声，互不相关。

$\boldsymbol{\Phi}$ 中各矩阵子块符号的具体含义见文献[3]。显然，$\boldsymbol{\Phi}$ 为稀疏矩阵，它只有 58 个非零元素（包含 2 个非零对角线元素，且均在 $\boldsymbol{M}_3$ 中），具体统计过程见表 1。还应注意到量测矩阵 $\boldsymbol{H}$ 只含非零元素 1，并且 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 都是对角矩阵。

表 1 $\boldsymbol{\Phi}$ 中非零元素个数

Tab. 1 Statistic of non-zero elements in $\boldsymbol{\Phi}$

矩阵子块	$-(\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times)$	$\boldsymbol{M}_1$	$\boldsymbol{M}_2$	$-\boldsymbol{C}_b^n$	$(\boldsymbol{f}_{sf}^{n}\times)$	$\boldsymbol{M}_3$	$\boldsymbol{M}_4$	$\boldsymbol{C}_b^n$	$\boldsymbol{M}_5$	$\boldsymbol{M}_6$	合计
非零元素个数	6	3	5	9	6	8	6	9	3	3	58

在对连续系统作 Kalman 滤波之前，必须先进行离散化处理。假设离散化步长为 T_s，采取一阶泰勒线性离散方法，可得与连续模型式（1）对应的离散模型

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{X}_{k-1} + W_{k-1} \\ \boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{V}_k \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1} = \boldsymbol{I}_{15\times15} + \boldsymbol{\Phi}T_s, \boldsymbol{H}_k = \boldsymbol{H}, \boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{Q}T_s, \boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{R}$。设 s,u 分别表示状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}$ 中非零元素的个数及数值为 1 的元素个数，则通过简单计算有 $s = 58+15-2 = 71$ 和 $u = 15-2 = 13$。

2 Kalman 滤波常规算法及其运算量

Kalman 滤波常规算法的五个基本公式[4]可改写成如下形式：

（1）时间更新

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1} = \boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{P}_{k/k-1} = \boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}_{k-1} \tag{4}$$

（2）量测更新

$$\boldsymbol{P}_{xrk} = \boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{P}_{rk} = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{xrk} + \boldsymbol{R}_k,\quad \boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{xrk}\boldsymbol{P}_{rk}^{-1} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{Z}_k - \boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1},\quad \hat{\boldsymbol{X}}_k = \hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1} + \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{r}_k \tag{6}$$

$$\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_{k/k-1} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{P}_{xrk}^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

若不采取任何计算优化措施，对于具有 15 维系统方程和 3 维量测方程的 SINS/GPS 组合模型式（2），Kalman 滤波式（3）～（7）所需的乘法运算次数如表 2 中“常规算法”一行所示，此处暂不未考虑式（5）中 $\boldsymbol{P}_{rk}$ 的求逆运算量。

表 2 Kalman 滤波乘法次数统计

Tab. 2 Statistic of the multiplication numbers in Kalman filtering

公式		（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	合计
常规算法	乘法次数	15^2=225	2×15^3=6750	$3\times15^2+15\times3^2$ $+15\times3^2$=945	$3\times15+15\times3$ =90	3×15^2=675	8685
	%	2.59	77.72	10.88	1.04	7.77	100
快速算法	乘法次数	20	3×12×20/2 =360	2×12=24	2×12=24	$2\times12^2/2$=144	572

从表 2 常规算法的百分比分析可见，时间更新中状态协方差阵预测式（4）的乘法次数最多，占整个滤波过程的 77.72%。

3 减少乘法运算的措施

为了后文描述方便，分别记 $\boldsymbol{M}(i,:), \boldsymbol{M}(:,j), M(i,j)$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的第 i 行行向量、第 j 列列向量、第 i 行 j 列元素，记 $V(i)$ 为列向量 $\boldsymbol{V}$ 的第 i 行元素。同时记状态方程维数为 m，量测方程维数为 n。

3.1 改进时间更新计算方法

在 SINS/GPS 离散模型转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}$ 的 225 个元素中，仅有 71 个非零元素（包含 13 个 1 元素），因此式（4）中 $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}$ 的计算存在大量的乘 0 和部分的乘 1 过程，然而这两种无实质意义的乘法操作都是可以省略的。

改进计算方法的思路是将 $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}$ 的计算分为两步，先计算前两矩阵相乘且记

为 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}$，再计算 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}$，具体做法如下所述。

首先，计算 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}$ 时，不能采用常规的程序循环控制的矩阵相乘计算方法，而是通过直接展开 $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}$ 来表示 $\boldsymbol{B}$ 的每一个元素，例如，在 SINS/GPS 中实际编程时 $B(1,1)$ 直接写成

$$B(1,1)=\Phi_{k/k-1}(1,1)+\Phi_{k/k-1}(1,2)\cdot P_{k-1}(2,1)+\Phi_{k/k-1}(1,3)\cdot P_{k-1}(3,1)+\Phi_{k/k-1}(1,5)\cdot P_{k-1}(5,1)+\Phi_{k/k-1}(1,9)\cdot P_{k-1}(9,1)+\Phi_{k/k-1}(1,10)\cdot P_{k-1}(10,1)+\Phi_{k/k-1}(1,11)\cdot P_{k-1}(11,1)+\Phi_{k/k-1}(1,12)\cdot P_{k-1}(12,1)$$

显然，为计算 $\boldsymbol{B}$ 共需 225 条赋值程序语句，为了避免手工展开的繁琐和容易出错，可以通过软件编程实现这些符号展开式。易知，每计算 $\boldsymbol{B}$ 的一列，恰好需遍历 $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}$ 一次，换句话说，计算完 $\boldsymbol{B}$ 的一列需要 $s-u$ 次乘法运算，因此计算出 $\boldsymbol{B}$ 共需 $m(s-u)$ 次乘法。

如果按计算 $\boldsymbol{B}$ 的思路展开，计算 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}$ 当然也需要同样多的乘法次数。但是，若考虑到 $\boldsymbol{C}$ 是对称矩阵，则只需先展开上三角矩阵（或下三角矩阵），再利用对称性给另一半矩阵直接赋值即可。所以，计算 $\boldsymbol{C}$ 的乘法次数大约能够减半，粗略估计为 $m(s-u)/2$。通过展开验证发现，展开上三角矩阵和下三角矩阵的乘法运算次数一般是不相等的（具体情况与非零元在 $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}$ 中的分布位置有关，显然这里 $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}$ 的上三角非零元素较少，所以应先计算 $\boldsymbol{C}$ 的上三角矩阵），实用中选其较少者为佳。

结合以上两步骤，实现 $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}$ 的总乘法次数约为 $3m(s-u)/2$，它既与状态维数 m 成正比，也与一步转移矩阵中的非零且非一元个数 $s-u$ 成正比。就本文 SINS/GPS 组合 Kalman 滤波而言，$3m(s-u)/2$ =3×15×58/2=1305 次。与程序循环控制计算方法相比，直接展开法虽然增加了少许程序长度和降低了通用性，但是极大减少了乘法运算次数和程序循环控制开销，有利于减少数值舍入累积误差，直接展开法还考虑了协方差阵的对称性，提高了数值稳定性。因此，在实时应用中直接展开法的好处是显而易见的。顺便指出，如果采用文献[2]中“矩阵外积”法，状态协方差阵预测需要 s^2-u^2 =71^2−13^2=4872 次乘法，故本文方法更优。

显然，采用直接展开法后，状态一步预测式（3）只需 $s-u$ =58 次乘法运算。

3.2 采用序贯处理进行量测更新

通常认为，当量测维数 n 小于状态维数 m 的一半时，采用序贯处理对降低运算量效果不明显[4,5]。但是，注意到 SINS/GPS 组合滤波的量测协方差阵 $\boldsymbol{R}_k$ 是对角线矩阵，并且量测矩阵 $\boldsymbol{H}_k$ 中非零元素只有 1，因此，使用序贯滤波处理依然能够有效降低量测更新的运算量。以 SINS/GPS 组合滤波纬度误差量测 $Z_k(1)$ 为例，其序贯滤波量测更新公式为

$$\boldsymbol{P}_{xrk}^{L}=\boldsymbol{P}_{k/k-1}\cdot\boldsymbol{H}_k(1,:)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{P}_{rk}^{L}=\boldsymbol{H}_k(1,:)\cdot\boldsymbol{P}_{xrk}^{L}+R_k(1,1),\quad \boldsymbol{K}_k^{L}=\boldsymbol{P}_{xrk}^{L}(\boldsymbol{P}_{rk}^{L})^{-1} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{r}_k^{L}=Z_k(1)-\boldsymbol{H}_k(1,:)\cdot\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1},\quad \hat{\boldsymbol{X}}_k=\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}+\boldsymbol{K}_k^{L}\boldsymbol{r}_k^{L} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{P}_k=\boldsymbol{P}_{k/k-1}-\boldsymbol{K}_k^{L}(\boldsymbol{P}_{xrk}^{L})^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

容易看出，$\boldsymbol{P}_{rk}^{L}$ 和 $\boldsymbol{r}_k^{L}$ 都是标量，上式进一步简化为

$$\boldsymbol{K}_k^{L}=\boldsymbol{P}_{k/k-1}(:,7)\cdot\frac{1}{P_{k/k-1}(7,7)+R_k(1,1)} \tag{11}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k = \hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1} + \boldsymbol{K}_k^L \cdot [Z_k(1) - \hat{X}_{k/k-1}(7)] \quad (12)$$

$$\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{P}_{k/k-1} - \boldsymbol{K}_k^L \cdot \boldsymbol{P}_{k/k-1}(7,:) \quad (13)$$

再考虑到 $\boldsymbol{K}_k \cdot \boldsymbol{P}_{k/k-1}(7,:)$ 的乘积结果是对称矩阵，则上述三式乘法运算次数约为 $m + m + m^2/2 = 15+15+15^2/2 \approx 143$，此外还有一次除法运算。同理，经度和高度的序贯滤波量测更新算法与纬度完全相同，运算量也一样。所以，采用序贯处理后，总的量测更新乘法次数为 3×143=429 次，远小于表 2“常规算法”中（3）、（4）、（5）三项之和（1710 次）。

3.3 次优滤波方法

通过以上两个措施，Kalman 滤波乘法次数已大大降低，至此，系统矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 中的非零且非一元素个数和系统维数成为进一步降低运算量的瓶颈。为了更进一步降低运算量，可权衡运算量和滤波精度的实际需要，将系统矩阵中的一些次要元素强行置为 0，下面提出一种可行的处理方案：

（1）在车载导航中，高度通道不会长期单独使用，高度误差 δh 不大，对其它状态耦合影响可以忽略，将系统矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 的 $\boldsymbol{M}_2$、$\boldsymbol{M}_4$ 和 $\boldsymbol{M}_6$ 中关于 δh 的所有系数置 0；

（2）当纬度误差 δL 不太大时（如 1 海里量级），对其它状态耦合影响也可以忽略，经过（1）和（2）处理后 $\boldsymbol{M}_2$、$\boldsymbol{M}_4$ 和 $\boldsymbol{M}_6$ 均变成了零矩阵；

（3）速度误差主要来源于比力与平台误差角的耦合作用，因此可以将 $\boldsymbol{M}_3$ 置为零矩阵。

（4）天向平台误差角中只保留陀螺漂移项；

（5）车载导航系统高度不会太大，将所有 $R_M + h$ 和 $R_N + h$ 近似为地球半径 R_e；

（6）载车行驶速度 v_E^n（或 v_N^n）通常不大（如 20～30m/s），v_E^n / R_e（或 v_N^n / R_e）远小于地球自转角速率，$\boldsymbol{\Phi}$ 中与 v_E^n / R_e（或 v_N^n / R_e）有关的元素多数可以忽略。

（7）基于惯导系统水平通道与天向通道的弱耦合特性，将高度误差 δh、天向速度误差 δv_U^n 和 z 轴加速度计偏置 ∇_z^b 等三状态删去，则水平通道系统状态仅为 12 维；

（8）在车载条件下，水平姿态角一般不大，姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_b^n = (C_{ij}), (i, j = 1,2,3)$ 中近似有 $C_{13} \approx C_{23} \approx C_{31} \approx C_{32} \approx 0$。

经过精心取舍，简化后的捷联惯导误差方程如下

$$\dot{\varphi}_E = \omega_{in,U}^n \varphi_N - \omega_{in,N}^n \varphi_U - (1/R_e) \cdot \delta v_N^n - (C_{11}\varepsilon_x^b + C_{12}\varepsilon_y^b)$$

$$\dot{\varphi}_N = -\omega_{in,U}^n \varphi_E + (1/R_e) \cdot \delta v_E^n - (C_{21}\varepsilon_x^b + C_{22}\varepsilon_y^b)$$

$$\dot{\varphi}_U = -(C_{33}\varepsilon_z^b)$$

$$\delta \dot{v}_E^n = -f_U \varphi_N + f_N \varphi_U + (C_{11}\nabla_x^b + C_{12}\nabla_y^b)$$

$$\delta \dot{v}_N^n = f_U \varphi_E - f_E \varphi_U + (C_{21}\nabla_x^b + C_{22}\nabla_y^b)$$

$$\delta \dot{L} = (1/R_e) \cdot \delta v_N^n$$

$$\delta \dot{\lambda} = (\sec L / R_e) \cdot \delta v_E^n$$

容易看出，使用简化误差方程构造的连续系统矩阵 $\boldsymbol{\Phi}$ 中共有 20 个非零元（无非零对角

线元素），离散化后的一步转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}$ 中有 32 个非零元（含 12 个 1 元素）。这时再利用直接展开法进行状态协方差阵预测即可大幅降低乘法运算次数。

经过本节处理后，文中称之为 Kalman 滤波快速算法，它是一个含 12 维状态方程和 2 维量测方程的 SINS/GPS 组合滤波系统，所需乘法运算次数统计见表 2“快速算法”一行。由表 2 可见，与常规算法相比，快速算法乘法运算次数仅为前者的 6.59%。

4 试验验证

在 SINS/GPS 组合导航中，以 GPS 辅助提高 SINS 导航性能的作用主要体现在三个层次上，由低到高分别为：①位置误差、速度误差的估计和修正；②平台误差的估计或修正；③惯性器件误差的估计或修正。其中①最基本，属于低层次的，利用经典控制的重调法一般都能达到要求。对于 Kalman 滤波估计而言，②中的水平平台误差估计相对容易，而方位误差估计难度大些，需要通过精心建模和较长时间滤波才能实现。当惯导系统标定测试完善且惯性器件逐次启动重复性较好时，特别是在机动环境下，欲通过组合导航方法对惯性器件剩余误差再进行精确估计非常困难，估计结果一般也不能用于反馈修正，否则反而会污染惯导系统。将惯性器件误差列入系统状态，主要起着误差吸收和缓冲的作用，可能有助于改善其它状态的估计效果，实践表明一般比不列入的情况好。因此，本文试验将方位误差角估计作为 SINS/GPS 组合导航有效性在较高层次上的一个主要考核指标。

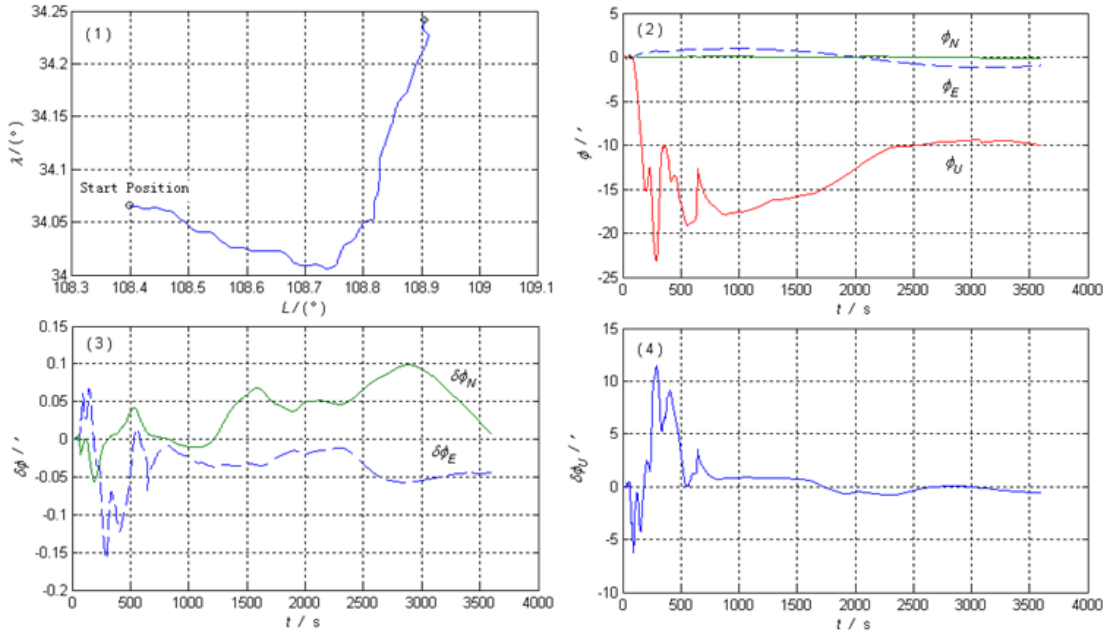


图 1　车载试验结果

Fig. 1　Vehicular experiment results

使用激光陀螺捷联惯导系统和 GPS 接收机进行车载试验验证，其中激光陀螺精度 0.01 °/h，加速度计精度 5×10^{-5}g，惯导系统采样频率 100Hz；GPS 定位精度 5m，输出频率 1Hz。试验结果如图 1 所示。子图（1）为跑车行驶路线，里程 65km，大约行车 1h，最高速度 25m/s。采用最优滤波常规算法和本文简化次优滤波快速算法两种方法对数据作处理，均为开环校正方式，Kalman 滤波时间更新 100Hz，而每当收到有效 GPS 信号时进行量测更新。为了评估平台方位误差角的滤波估计能力，在静基座初始对准后（即组合前）人为加入-0.2° 的惯导方位误差角，子图（2）为快速算法的平台误差角估计值，可见 2000s 后方位误差角获得了较好的估计效果。子图（3）和（4）分别为快速算法与常规算法之间的平台误差角估计的差值，

子图（3）显示水平平台误差角差别大多在 0.1′之内，子图（4）显示 700s 之后方位平台误差角差别小于 1′，这说明降维次优滤波方法是可行的。

5 结论

针对车载 SINS/GPS 组合 Kalman 滤波，论文分析了常规滤波的乘法运算次数，指出状态协方差阵预测所需运算量最大，成为滤波运算速度提高的瓶颈。基于系统矩阵为稀疏矩阵，量测协方差阵为对角阵且量测矩阵的非零元均为 1，以及惯导水平通道和高度通道弱耦合的特点，相应地，提出了状态协方差阵预测直接展开计算，采用量测更新序贯滤波处理，以及将系统矩阵中次要元素强制置零和降维次优滤波等措施，极大减少了 Kalman 滤波的乘法运算次数，仅为常规算法的 6.59%。最后，跑车试验验证了降维次优滤波方法的可行性。

[参考文献] (References)

[1] 张国良,曾静. 组合导航原理与技术[M]. 西安：西安交通大学出版社，2008.
[2]董绪荣,陶大欣. 一个快速 Kalman 滤波方法及其在 GPS 动态数据处理中的应用[J]. 测绘学报,1997,26(3):221-227.
[3]严恭敏. 车载自主定位定向系统研究[D]. 西安：西北工业大学博士学位论文,2006.
[4]秦永元,张洪钺,汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理[M]，西安：西北工业大学出版社，1998.
[5]Bierman G J. Factorization methods for discrete sequential estimation[M]. New York: Academic Press, 1977.

文章编号：1005-6734(2011)02-0127-04

基于外定位阻尼的捷联惯导算法设计

严恭敏[1]，郭 鹃[2]，翁 浚[1]，白 亮[1]

（1. 西北工业大学自动化学院，西安 710072；2. 船舶系统工程部，北京 100036）

摘要：传统外阻尼惯导系统以外速度作为辅助参考，但在仅能提供外定位参考的条件下，为了避免由定位信号差分求取速度时造成噪声放大负面效应，推导了基于定位误差的罗经初始对准算法，并将它与捷联惯导姿态解算相结合，得到定位阻尼捷联惯导算法。该算法具有计算量小和稳定性好等优点，但与 Kalman 滤波组合导航相比，也有它自己的应用条件并存在一些不足之处。最后，利用 GPS 定位和激光捷联惯导系统进行了车载试验，验证了所提算法的有效性。

关 键 词：捷联惯导系统；罗经效应；定位阻尼；车载试验

中图分类号： V666.1 **文献标志码：**A

Damping SINS algorithm based on outer position

YAN Gong-min[1], GUO Kun[2], WENG Jun[1], BAI Liang[1]

(1. Department of Automation Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. System Engineering Research Institute, Beijing 100036, China)

Abstract: In traditional level-damped navigation system, an outside velocity measurement is taken as its reference. To avoid the noise's increasing in calculating velocity using differential position signal, some new gyrocompass control principles based on position error are deduced for the situation that position information is the only available data. Moreover, by combining with strapdown attitude equations, the position-damped strapdown inertial navigation algorithm is obtained. The proposed algorithm has the advantages of low computation burden and high stability. By contrasting to Kalman filtering for integrated navigation, its special application conditions and insufficiencies are pointed out. The vehicular test is carried out using GPS and laser SINS, and the results verify the effectiveness of this algorithm.

Key words: strapdown inertial navigation system; gyrocompass effect; position damp; vehicular test

在进行多源导航信息综合时，例如 SINS/GPS 组合导航，普遍采用 Kalman 滤波最优估计方法，但它有时存在精确建模困难、计算量大和容易发散等问题。在传统的平台惯导系统中，速度阻尼导航方法应用十分广泛[1-2]，其原理和设计已经非常成熟，速度阻尼法能够持续抑制惯导误差的发散，亦可使较大的方位误差角逐渐收敛，它利用了罗经方位对准的基本原理。与 Kalman 滤波相比，速度阻尼法勿需精确建模，具有计算量小和稳定性好等优点。随着捷联惯性导航技术的发展，除 Kalman 滤波组合导航外，有时也使用速度阻尼法，并取得了良好的效果[3-6]，譬如法国 SAGEM 公司的车载 SIGMA 30 激光捷联惯导系统操作手册上指出它使用里程仪辅助进行罗经初始对准，能够达到 1 mil（密位）的方位精度。传统的阻尼导航是通过外参考速度实现的，然而，如果外界只能提供参考定位信息，为了应用阻尼导航算法，最简单的处理思路是对定位作差分以获得速度，但是差分可能带来噪声放大效应，影响传统阻尼导航算法的性能。本文将直接以定位信号作为阻尼参考，推导定位阻尼惯导算法，并利用跑车试验对算法的有效性进行验证。

收稿日期：2010-11-14；**修回日期：**2011-03-14

基金项目：航空科学基金（20100818012）

作者简介：严恭敏（1977—），男，博士，副教授，主要从事惯性导航与信息融合理论研究。E-mail：yangongmin@163.com

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

1 传统罗经初始对准的基本原理

在静基座下，传统平台惯导系统的罗经初始对准原理如图 1 和图 2 所示，它们分别是水平对准东向通道和罗经方位通道。罗经初始对准过程一般划分为水平对准和方位对准两个阶段，在水平对准阶段北向通道与东向通道图 1 类似，这里不再给出。

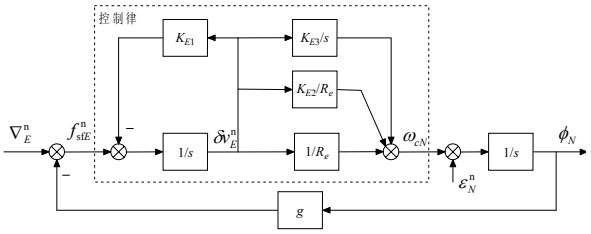


图 1 水平对准东向通道

Fig.1 East control loop of leveling alignment

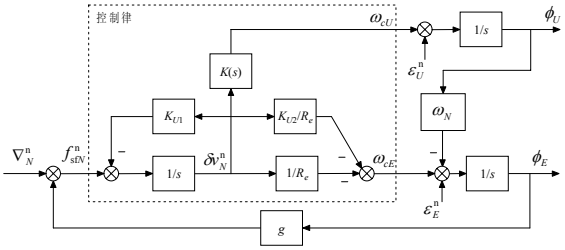


图 2 罗经方位对准

Fig.2 Header control loop of gyrocompass alignment

图中各符号的含义为：∇_E^n 和 ∇_N^n 分别为东向和北向加速度计零偏；f_{sfE}^n 和 f_{sfN}^n 分别为东向和北向等效加速度输出；ε_E^n、ε_N^n 和 ε_U^n 分别为东向、北向和天向等效陀螺漂移；ϕ_E、ϕ_N 和 ϕ_U 分别为东向、北向和天向平台失准角；ω_{cE}、ω_{cN} 和 ω_{cU} 分别为施加给平台的东向、北向和天向控制角速率；$\omega_N=\omega_{ie}\cos L$，$\omega_{ie}=2\pi/T_{ie}$；$\omega_{ie}$、$g$、$R_e$ 和 L 分别为地球自转角速率、重力加速度大小、地球半径和地理纬度，它们均是已知量，T_{ie} 是地球自转周期即 24 h。图 1 中水平对准采用三阶调平回路，图 2 中方位对准在北向二阶调平回路基础上采用四阶罗经对准回路，一般选择

$$K(s)=\frac{K_{U3}}{(s+K_{U4})\omega_N} \tag{1}$$

各参数 $K_{ij}(i=E,N,U;\ j=1,2,3,4)$ 为对准控制律参数，需根据实际控制性能要求设计，详细推导过程可参见文献[2]。

2 基于定位误差的罗经初始对准原理

从图 1 和图 2 中可以看出，传统的罗经对准以速度误差 δv_E^n（或 δv_N^n）作为“观测量”，通过局部反馈和顺馈建立控制律网络。与此类似，下面将以定位误差作为“观测量”，建立合适的控制律并求解控制参数。

2.1 水平对准东向通道

基于定位误差的水平对准东向通道原理框图如图 3 所示，图中记 $S_L=\sec L$。由图 3 可见，水平比力 f_{sfE}^n 积分得东向速度误差 δv_E^n，再次积分得经度误差 $\delta\lambda$。以 $\delta\lambda$ 作为“观测量”，建立两条局部反馈通路 G_{E1} 和 G_{E2}，并建立顺馈通路 G_{E3}/s 和 G_{E4}。

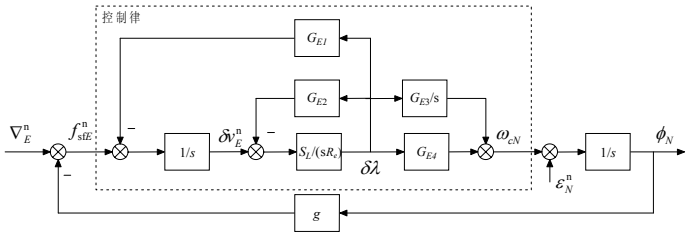


图 3 基于定位误差的水平对准东向通道

Fig.3 East control loop of leveling alignment based on position error

根据控制框图的梅逊增益求解规则，由图 3 可计算得 ∇_E^n 和 ε_N^n 至 ϕ_N 的传递函数关系如下：

$$\phi_N=\frac{\dfrac{G_{E3}S_L+sG_{E4}S_L}{R_e}\nabla_E^n+\dfrac{s(s^2R_e+sG_{E2}S_L+G_{E1}S_L)}{R_e}\varepsilon_N^n}{s^4+s^3\dfrac{G_{E2}S_L}{R_e}+s^2\dfrac{G_{E1}S_L}{R_e}+s\dfrac{G_{E4}gS_L}{R_e}+\dfrac{G_{E3}gS_L}{R_e}} \tag{2}$$

记式（2）中分母特征多项式为 $\Delta_4(s)$。不妨令阻尼比 $\xi=\sqrt{2}/2$ 并且衰减系数记为 σ，进一步设 $\Delta_4(s)=0$ 的四个特征根分别为：

$$s_1=s_2=-\sigma+j\sigma,\quad s_3=s_4=-\sigma-j\sigma$$

则 $\Delta_4(s)$ 可展开成：

$$\Delta_4(s)=(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)=s^4+4\sigma s^3+8\sigma^2s^2+8\sigma^3s+4\sigma^4 \tag{3}$$

通过比较式（2）的分母和式（3），求得水平对准东向通道的控制律参数：

$$G_{E1}=\frac{8\sigma^2R_e}{S_L},\quad G_{E2}=\frac{4\sigma R_e}{S_L},\quad G_{E3}=\frac{4\sigma^4R_e}{gS_L},\quad G_{E4}=\frac{8\sigma^3R_e}{gS_L} \tag{4}$$

基于定位误差的水平对准北向通道与东向通道基本原理和参数求解过程相同，不再赘述。

2.2 罗经方位对准通道

基于定位误差的罗经方位对准通道框图如图 4 所示，它以纬度误差 δL 作为“观测量”，建立两条局部反馈通路和两条顺馈通路，并且前向通路中 $G(s)$ 的取值形式与传统罗经回路一样，即取：

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$G(s)=\frac{G_{U4}}{(s+G_{U5})\omega_N}$$

由图 4 求得∇_N^{n}、$\varepsilon_E^{\mathrm{n}}$和$\varepsilon_U^{\mathrm{n}}$至$\phi_U$的传递函数关系如下：

$$\phi_U=\frac{\dfrac{gG_{U4}}{R_{\mathrm{e}}\omega_N}\varepsilon_E^{\mathrm{n}}+s\dfrac{G_{U4}}{R_{\mathrm{e}}\omega_N}\nabla_N^{\mathrm{n}}+s^3(s+G_{U5})\varepsilon_U^{\mathrm{n}}}{s^5+s^4\dfrac{G_{U2}+R_{\mathrm{e}}G_{U5}}{R_{\mathrm{e}}}+s^3\dfrac{G_{U1}+G_{U2}G_{U5}}{R_{\mathrm{e}}}+s^2\dfrac{G_{U1}G_{U5}+gG_{U3}}{R_{\mathrm{e}}}+s\dfrac{gG_{U3}G_{U5}}{R_{\mathrm{e}}}+\dfrac{gG_{U4}}{R_{\mathrm{e}}}} \tag{5}$$

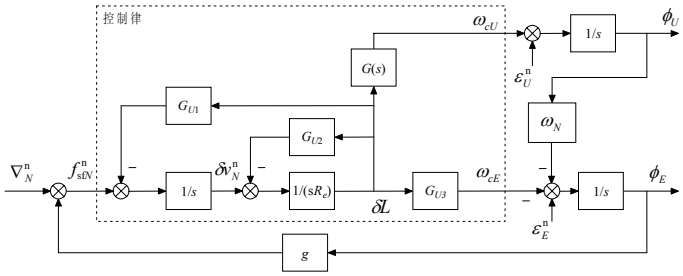


图 4　基于定位误差的罗经方位通道

Fig.4　Header control loop of gyrocompass alignment based on position error

按给定的控制性能要求，求解式（5）中的控制参数一般比较困难，下面给出一种可行的实用方法。

记式（5）中分母特征多项式为$\Delta_5(s)$，并假设$\Delta_5(s)=0$的五个根形式如下：

$$\begin{aligned}&s_1=s_2=-\sigma+j\sigma,\\&s_3=s_4=-\sigma-j\sigma,\ \ s_5=-\sigma\end{aligned} \tag{6}$$

展开$\Delta_5(s)$得：

$$\begin{aligned}\Delta_5(s)&=(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)(s-s_4)(s-s_5)\\&=s^5+5\sigma s^4+12\sigma^2s^3+16\sigma^3s^2+12\sigma^4s+4\sigma^5\end{aligned} \tag{7}$$

在给定衰减系数σ之后，对比式(5)的分母和式(7)，除G_{U4}外可得到一个关于$G_{Ui}(i=1,2,3,5)$的四元非线性方程组，再消去其中三个元后获得关于G_{U5}的一个四次方程：

$$\left(\frac{G_{U5}}{\sigma}\right)^4-5\left(\frac{G_{U5}}{\sigma}\right)^3+12\left(\frac{G_{U5}}{\sigma}\right)^2-16\frac{G_{U5}}{\sigma}+12=0 \tag{8}$$

经 Matlab 数值计算发现式(8)中G_{U5}不存在实数解，因此前述式(6)根形式的假设是不合理的。但是计算又发现，如果以复数解的绝对值$|G_{Ui}|$代替G_{Ui}后再代入式(5)，恰好可以构造出合适的特征多项式$\Delta_5(s)$，使特征根分布在左半复平面，满足控制性能要求。

此外，如果假设如下的根形式：

$$\begin{aligned}&s_1=s_2=-\sigma_1+j\sigma_1,\\&s_3=s_4=-\sigma_2-j\sigma_2,\ \ s_5=-\sigma_2\end{aligned} \tag{9}$$

通过选取不一样的σ_1和σ_2则有可能求解得实数根，具体过程不再详述。

3　基于定位阻尼的导航算法

类似于传统的外速度阻尼惯导算法[8]，若将基于定位误差的罗经初始对准控制律与捷联惯导数学平台解算结合起来，即可构成定位阻尼捷联惯导算法。现仅以罗经方位通道为例，算法原理框图如图 5 所示。

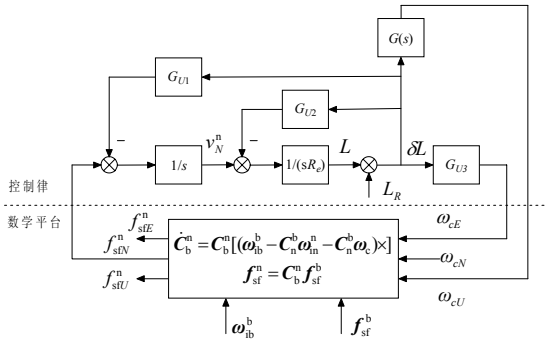


图 5　基于定位阻尼的捷联惯导算法（罗经方位通道）

Fig.5　Damping SINS algorithm based on outside position(gyrocompass loop)

图 5 中$\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$表示捷联姿态矩阵；$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ib}}^{\mathrm{b}}$和$\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{\mathrm{b}}$分别是陀螺测量角速度和加速度计测量比力；$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{n}}$是导航系旋转补偿角速度，$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{c}}=[\omega_{cE}\quad\omega_{cN}\quad\omega_{cU}]^{\mathrm{T}}$；$L_R$为外定位辅助系统提供的纬度信息，比如 GPS 或航位推算提供的纬度。将该原理框图表示的信号流程作离散化处理，就能够得到适合于计算机数值解算的阻尼导航递推算法，具体实现方法可参见文献[7-8]。

4　试验验证

使用激光陀螺捷联惯导系统和 GPS 接收机进行车载试验验证，其中激光陀螺精度 0.01 (°)/h，加速度计精度 $5\times10^{-5}\,g$，惯导系统采样频率 100 Hz；GPS 定位精度 5 m，输出频率 1 Hz。由于 GPS 输出频率比惯导系统低，因此在 GPS 输出间隔内均以最近一次的定位信息代替。

为了方便验证定位阻尼算法的有效性，设计试验方案如下所述。首先采用常规 Kalman 滤波方法对惯导系统进行静态初始对准。对准完成之后载车行驶，

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

并实施两种导航算法：一是纯惯性导航解算，将以它的姿态信息作为定位阻尼算法评估的参考基准；二是基于 GPS 定位阻尼的惯导算法，其姿态和方位初始值分别在静态初始对准基础上人为加上 10′和 0.5°的误差。

在定位阻尼算法中罗经控制律参数设置如下：

$$G_{E1}=2014,\ G_{E2}=160300,$$
$$G_{E3}=4.061\times10^{-3},\ G_{E4}=1.294;$$
$$G_{U1}=340,\ G_{U2}=66456,\ G_{U3}=0.116,$$
$$G_{U4}=7.954\times10^{-7},\ G_{U5}=6.501\times10^{-3}.$$

试验行车线路如图 6 所示，行驶时间 4500 s，里程 46 km，最高速度 25 m/s。与纯惯导参考基准相比，GPS 定位阻尼导航过程中的姿态和方位误差如图 7 所示，其中前 800 s 为水平阻尼时间，之后进入方位罗经阻尼状态。由图 7 可见，水平阻尼后姿态误差角小于 0.5 ′；方位误差在 2000 s 后基本收敛，误差在 3 ′以内。

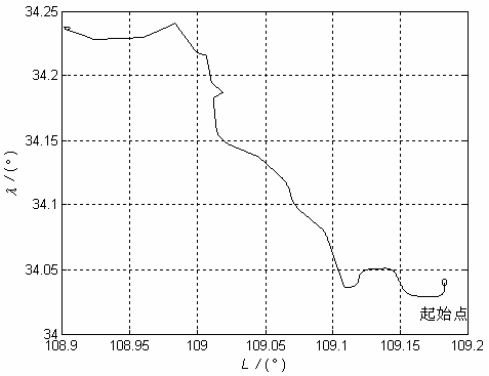


图 6 行车线路

Fig.6 Vehicular running routes

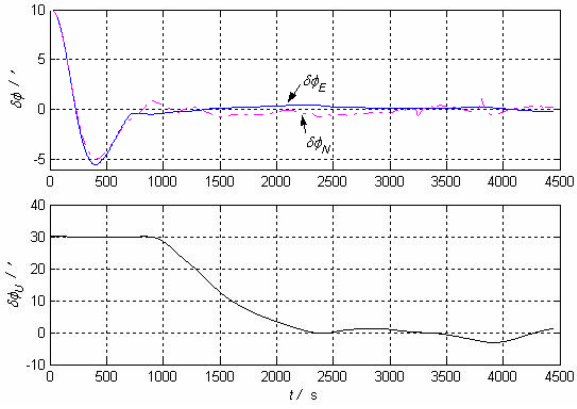


图 7 定位阻尼导航姿态误差

Fig.7 Attitude errors of damping SINS algorithm

5 结 论

在传统的平台惯导速度误差罗经初始对准原理基础上，推导了基于定位误差的罗经对准算法，并将它与捷联惯导姿态解算结合，获得定位阻尼捷联惯导算法，并且还进行了车载试验验证。

最后，将阻尼惯导算法与 Kalman 滤波组合导航作个简要的比较。

基于传统罗经原理的阻尼惯导算法虽然具有计算量小和容易实现等优点，但其不足之处也比较明显，主要表现在以下三各方面：① 罗经方法忽略了方位误差与水平比力之间的耦合影响，因而水平方向的加速度机动不能提高方位误差收敛速度和对准精度，即方位误差的收敛只能依靠罗经效应，收敛速度较慢；② 罗经方法是基于东向通道和北向通道的弱耦合特性而进行解耦设计的，并且未能对惯性器件误差建模处理，因而对惯性器件误差的估计和补偿无能为力[7]，相对于 Kalman 滤波而言是次优的；③ 当外速度或定位信息缺失时间较长时，罗经方法难以适应，而 Kalman 滤波只需作时间更新即可。由此可见，Kalman 滤波方法更适合于大机动、快速收敛和高精度等场合，比如机载和弹载导航；而阻尼惯导算法一般适用于机动小、任务时间长和准备时间充分的场合，比如车载和舰载导航等。

参考文献（References）：

[1] 陈永冰，钟斌. 惯性导航原理[M]. 北京：国防工业出版社，2007.

[2] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京：科学出版社，2006.

[3] Gaiffe T, Cottreau Y, Faussot N, et al. Highly compact fiber optic gyrocompass for applications at depths up to 3000 meters[C] // Proceedings of the 2000 International Symposium on Underwater Technology. Tokyo, Japan, 2000: 155-160.

[4] iXSea Ltd. Octans III user guide, Part 2: Octans surface UG MU-OCTIII-003-A.pdf[EB/DK]. 2004.

[5] Chen Mu-qing, Xu Jiang-ning, Liu Rui. Fiber-optic gyrocompass performance test and combined dead reckoning(DR) navigation scheme design[C]// 2nd International Conference on Signal Processing Systems(ICSPS). Dalian, China, 2010, Vol.3: 594-596.

[6] 彭蓉，严恭敏，秦永元. 箭载捷联惯导系统水平自对准的两种实用方法[J]. 中国惯性技术学报，2009，17(4)：428-435.
PENG Rong, YAN Gong-min, QIN Yong-yuan. Two practical methods of autonomous leveling alignment for launch vehicle SINS[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2009, 17(4): 428-435.

[7] 严恭敏. 捷联惯导系统动基座初始对准及其它相关问题研究[R]. 西安：西北工业大学博士后出站报告，2008.
YAN Gong-min. On SINS in-movement initial alignment and some other problems[R]. Xi'an: Postdoctoral Research Report, Northwestern Polytechnical University, 2008.

[8] 孟祥涛，蔡春龙. 罗经回路在船用航姿系统中的应用与工程实现[J]. 中国舰船研究，2008，3(6)：61-65.
MENG Xiang-tao, CAI Chun-long. Engineering application and implementation of compass loop in attitude heading reference system[J]. Chinese Journal of Ship Research, 2008, 3(6): 61-65.

© 1994-2011 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

基于频域分离算子的 SINS 抗晃动干扰初始对准算法

严恭敏，白 亮，翁 浚，秦永元
（西北工业大学自动化学院，西安 710072）

摘 要：在基于惯性参考系的捷联惯导系统（SINS）初始对准算法中，使用一次积分抑制线晃动干扰作用有限。通过分析惯性系重力矢量和晃动干扰加速度的频率特点，引入频率分离算子概念，特别是使用频率特性精心设计的无限冲击响应（IIR）滤波算子时，能够有效抑制线晃动干扰，同时对反映重力信息的比力和惯性系重力参考矢量实施同步滤波，使它们都能顺利通过，即使在滤波器输出没有稳定的情况下也可给出可靠的初始对准结果，从而实现快速精确初始对准。车载试验验证表明所提算法可直接用于 SINS 抗晃动干扰精对准。

关键词：捷联惯导系统；初始对准；抗晃动干扰；车载试验
中图分类号：V249.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-1328(2011)07-1486-05
DOI：10.3873/j.issn.1000-1328.2011.07.008

SINS Anti-Rocking Disturbance Initial Alignment Based on Frequency Domain Isolation Operator

YAN Gong-min, BAI Liang, WENG Jun, QIN Yong-yuan
(Department of Automation Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: In some initial alignment applications for strapdown inertial navigation system (SINS), an inertial reference frame and the integral method are adopted to suppress linear rocking errors, but with limited roles. Gravity vector expressed in inertial reference frame and the frequency characteristics of rocking disturbance are analyzed, then the concept of frequency domain isolation operator is introduced. Especially when an infinite impulse response (IIR) filtering operator with fine designed frequency characteristics is used, it can suppress linear rocking to the maximum extent; meanwhile, the filter will let the ideal specific force and gravity reference vector pass through peferctly. Even when the filtering output is not stable, a reliable result can also be gotten to accomplish fast and accurate initial alignment. Finally, some vehicular tests show that the presented method in this paper is applicable to SINS anti-rocking initial fine alignment even under large misalignment angles.

Key words: Strapdown inertial navigation system; Initial alignment; Anti-rocking disturbance; Vehicular tests

0 引 言

捷联惯导系统（SINS）在执行导航任务之前必须进行初始对准，一般将初始对准划分为粗对准和精对准先后两个过程，传统解析粗对准方法抗晃动干扰能力差，甚至失效[1]，其根本原因在于晃动干扰角速率远大于地球自转角速率，无法从陀螺测量中分离出有效的地球自转信息。在无法获得粗略方位角情况下，常考虑采用基于大方位失准角的非线性滤波对准方法[2-4]，但是该方法在特大失准角下存在对准时间长和难以充分收敛的缺陷[5]。

在文献[6]提出了利用重力加速度矢量在惯性空间中的变化规律来确定地理北向的新思路后，文献[7]对该方法作了详细推导，算法有效隔离了角

收稿日期：2010-06-28； 修回日期：2010-10-06

晃动干扰的影响,并使用积分运算降低线晃动干扰加速度误差,仿真和舰船系泊试验表明该算法非常适合于晃动干扰基座的粗对准[1,7-8]。与积分方法不同,文献[9]利用低通数字滤波器滤除高频扰动加速度,为了精确计算时延和降低计算量,选择线性相位有限冲击响应(FIR)滤波器并且采取了滤波器组多级抽取的级联解决方案,试验结果显示对准精度与传统罗经方法相当,且具有对准速度快和适用于任意失准角下直接进行精对准的突出优点。

但文献[9]也还存在一些不足之处,即为了有效地滤除较低频干扰加速度需选择很高阶的 FIR 滤波器,致使滤波器稳定输出的时间变长,影响初始对准的快速性。同样在惯性参考坐标系寻北新思路基础上,本文简要介绍了初始对准算法,引入频域分离算子的概念,利用它抑制线晃动干扰的影响,提高初始对准的速度和精度。最后进行试验验证,结果表明基于惯性系参考的对准法结合无限冲击响应(IIR)滤波算子可直接用于 SINS 抗晃动干扰精对准。

1　惯性参考系初始对准基本算法

基于惯性参考坐标系的抗晃动干扰初始对准中涉及到以下几个坐标系,包括:地心惯性坐标系(i 系)、地球坐标系(e 系)、导航坐标系(n 系)、捷联惯导坐标系(b 系)、初始时刻惯性坐标系(i_0 系)、初始时刻捷联惯导惯性坐标系(i_{b0} 系)等,具体含义可参见文献[10]。

晃动干扰基座下捷联姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_b^n(t)$ 一般是时变的,它可拆写成如下三个矩阵链乘形式

$$\boldsymbol{C}_b^n(t) = \boldsymbol{C}_{i_0}^n(t)\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{i_0}\boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(t) \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{C}_{i_0}^n(t)$ 由载体所处纬度 L 以及初始对准时间 t 确定,即:

$$\boldsymbol{C}_{i_0}^n(t) = \begin{bmatrix} -\sin\omega_{ie}t & \cos\omega_{ie}t & 0 \\ -\sin L\cos\omega_{ie}t & -\sin L\sin\omega_{ie}t & \cos L \\ \cos L\cos\omega_{ie}t & \cos L\sin\omega_{ie}t & \sin L \end{bmatrix} \tag{2}$$

而利用陀螺输出的角速度信息 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)$ 可对 $\boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(t)$ 进行更新解算,即:

$$\dot{\boldsymbol{C}}_b^{i_{b0}}(t) = \boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(t)[\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)^\times] \tag{3}$$

此处 $\boldsymbol{V}^\times$ 表示由三维矢量 $\boldsymbol{V}$ 构成的反对称矩阵。一般设置初值 $\boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(t_0) = \boldsymbol{I}$(但也可以取成其它单位正交阵),则通过式(3)可实现惯性参考系下角晃动干扰的实时跟踪。因此,在式(1)中求解 $\boldsymbol{C}_{i_0}^n(t)$ 和 $\boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(t)$ 相对比较容易,而主要难点在于确定两惯性坐标系之间的转动关系 —— 常值矩阵 $\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{i_0}$,计算方法如下所述。

根据捷联惯导比力方程

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n(t) = \boldsymbol{C}_b^n(t)\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t) - [\boldsymbol{\omega}_{in}^n(t)^\times + \boldsymbol{\omega}_{ie}^n(t)^\times]\boldsymbol{v}^n(t) + \boldsymbol{g}^n \tag{4}$$

当系统静止时(不存在线晃动但可有角晃动,即 $\boldsymbol{v}^n(t) = \dot{\boldsymbol{v}}^n(t) = 0$),加速度计的理想输出 $\bar{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^b(t)$ 反映的是已知的当地重力加速度矢量 $\boldsymbol{g}^n$,即有 $-\boldsymbol{C}_b^n(t)\bar{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^b(t) = \boldsymbol{g}^n$ 成立,将它投影至 i_{b0} 系得

$$\bar{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t) = \boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{G}^{i_0}(t) \tag{5}$$

其中

$$\bar{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t) = -\boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(t)\bar{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^b(t),\ \boldsymbol{G}^{i_0}(t) = \boldsymbol{C}_n^{i_0}(t)\boldsymbol{g}^n$$

若在初始对准过程中选取两个不同时刻 $t = t_1$ 和 $t = t_2$,则可通过如下方式构造 $\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{i_0}$ 矩阵

$$\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{i_0} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{G}^{i_0}(t_1)]^{\mathrm{T}} \\ [\boldsymbol{G}^{i_0}(t_1)^\times\boldsymbol{G}^{i_0}(t_2)]^{\mathrm{T}} \\ [\boldsymbol{G}^{i_0}(t_1)^\times\boldsymbol{G}^{i_0}(t_2)^\times\boldsymbol{G}^{i_0}(t_1)]^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} [\bar{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t_1)]^{\mathrm{T}} \\ [\bar{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t_1)^\times\bar{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t_2)]^{\mathrm{T}} \\ [\bar{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t_1)^\times\bar{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t_2)^\times\bar{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t_1)]^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{6}$$

至此通过式(1)进行姿态矩阵分解,完美地实现了角晃动条件下的初始对准问题。

2　频域分离算子

理论上,上一节介绍的对准算法能够完全隔离角晃动干扰的影响,但是如果同时存在线晃动干扰,则式(5)不再保持严格成立,从而会引起 $\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{i_0}$ 求解误差以及初始对准误差。线晃动时比力方程式(4)中的叉乘项影响很小,忽略后近似得

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n(t) - \boldsymbol{C}_b^n(t)\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t) = \boldsymbol{g}^n \tag{7}$$

由于线晃动干扰,假设加速度计测量输出为 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t) = \bar{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^b(t) + \boldsymbol{f}_d^b(t)$,这里 $\boldsymbol{f}_d^b(t)$ 为线晃动干扰引起的附加比力输出,代入式(7)得

$$[\dot{\boldsymbol{v}}^n(t) - \boldsymbol{C}_b^n(t)\boldsymbol{f}_d^b(t)] - \boldsymbol{C}_b^n(t)\bar{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^b(t) = \boldsymbol{g}^n \tag{8}$$

由此可见,线晃动时干扰加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}^n(t)$ 与附加比力输出相互平衡,即 $\dot{\boldsymbol{v}}^n(t) = \boldsymbol{C}_b^n(t)\boldsymbol{f}_d^b(t)$。实际系统中,干

扰 $\dot{\boldsymbol{v}}^n(t)$ 一般难以测量，只好将其忽略并在式(7)中仅利用近似式 $-\boldsymbol{C}_b^n(t)\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t)\approx\boldsymbol{g}^n$ 去估计 $\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{i_0}$。通过上述分析知，关系式 $-\boldsymbol{C}_b^n(t)\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t)\approx\boldsymbol{g}^n$ 还可写成 $-\boldsymbol{C}_b^n(t)\overline{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^b(t)-\dot{\boldsymbol{v}}^n(t)\approx\boldsymbol{g}^n$，类似式(5)投影，近似得

$$\overline{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t)-\dot{\boldsymbol{v}}^{i_{b0}}(t)\approx\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{G}^{i_0}(t)\tag{9}$$

式(9)中的线晃动干扰加速度 $\dot{\boldsymbol{v}}^{i_{b0}}(t)$ 是一个重要的对准误差源，它越小则该式越接近于理论式(5)，表明 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 的求解精度也就越高，对初始对准精度越有利。或者说，抗线晃动干扰对准的关键在于削弱比力测量 $\boldsymbol{C}_b^{i_{b0}}(t)\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t)$ 中线晃动干扰 $\dot{\boldsymbol{v}}^{i_{b0}}(t)$ 的影响，最大限度分离出反映重力加速度 $\boldsymbol{G}^{i_0}(t)$ 的理想值 $\overline{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t)$。

在式(5)中容易看出 $\boldsymbol{G}^{i_0}(t)$ 是以地球自转 24h 为周期的正弦信号(即频率约 1×10^{-5} Hz)，由于 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 是常值变换矩阵，所以理想值 $\overline{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t)$ 也是同周期的极低频信号。一般实际应用系统中，线晃动干扰的周期都在数十秒以下，因而从频域上容易实现 $\overline{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t)$ 和线晃动干扰 $\dot{\boldsymbol{v}}^{i_{b0}}(t)$ 的分离，可采取的措施有：平均法、积分法以及低通滤波法，当平均时间、积分时间或滤波阻带时间大于线晃动干扰周期时，常常能够获得一定的干扰抑制效果。平均法与积分法本质上等效，都可看作是特殊的低通滤波运算，通频带随平均或积分时间增长而成比例地减小，将干扰影响平均分散到整个时间段上。例如将式(9)作一次积分得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\overline{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(\tau)\mathrm{d}\tau-[\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(t)-\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(t_0)]\\&\approx\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\int_0^t\boldsymbol{G}^{i_0}(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{10}$$

可见系统初始时刻和末了时刻的干扰速度 $\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(t_0)$ 和 $\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(t)$ 成为重要误差源，如果干扰速度最大值固定有限，则随着积分时间增长，干扰的相对影响会越来越小。如果对式(10)再积分一次，得

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^{\tau_1}\overline{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1-[\int_0^t\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1-\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(t_0)t]\\&\approx\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\int_0^t\int_0^{\tau_1}\boldsymbol{G}^{i_0}(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau_1\end{aligned}\tag{11}$$

在式(11)中，由于线晃动干扰具有周期性反复的特点，积分 $\int_0^t\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(\tau_1)\mathrm{d}\tau_1$ 可近似为 0，所以初始干扰速度 $\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(t_0)$ 是双重积分法的主要误差源。同时，在一定长的对准时间之后有 $|\boldsymbol{v}^{i_{b0}}(t_0)|<|\int_0^{\tau_1}\overline{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(\tau)\mathrm{d}\tau|$，所以双重积分法也具有干扰影响随积分时间增长而越来越小的特点。与一次积分相比，双重积分的优势在于末了时刻的干扰速度的影响几乎可以忽略不计。

对于通用滤波器来说，可供设计的灵活性更大，如果针对外界线晃动干扰的频率特点，精心设计低通滤波器的频带特性，只有极低频信号才能通过，总的干扰抑制效果可以比积分法更好。关于滤波器的效果将在后续试验一节中获得验证。

值得指出的是，加速度计随机常值偏置误差属于低频信号，从频域上难以与 $\overline{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t)$ 分离，从而成为限制初始对准精度的重要因素，关于惯性器件误差的影响在文献[9]中有较详细的分析。

无论是平均或积分法，还是低通滤波器(离散域则对应 FIR 或 IIR 滤波器)等，现统一假设 $H(\cdot)$ 为线性运算算子，若对式(9)两边同时取 $H(\cdot)$ 线性运算，并考虑到 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 表示一个线性变换常值矩阵，则可得

$$\begin{aligned}&H(\overline{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t))-H(\dot{\boldsymbol{v}}^{i_{b0}}(t))\\&\approx H(\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{G}^{i_0}(t))=\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\cdot H(\boldsymbol{G}^{i_0}(t))\end{aligned}\tag{12}$$

至此，初始对准问题的焦点集中在设计合适的频域分离算子 $H(\cdot)$，使得抑制线晃动干扰 $\dot{\boldsymbol{v}}^{i_{b0}}(t)$ 作用明显，而理想比力 $\overline{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t)$ 与重力矢量信息 $\boldsymbol{G}^{i_0}(t)$ 又能够较好地通过。由于在等式(12)两边同时实施了频域分离算子，因此 $\overline{\boldsymbol{F}}^{i_{b0}}(t)$ 和 $\boldsymbol{G}^{i_0}(t)$ 经过算子运算后可以有损耗甚至存在非线性相位畸变(如 IIR 滤波)，但等式依然成立。

综上所述，引入惯性参考系的目的是为了隔离角晃动干扰的影响，而使用频域分离算子起着抑制线晃动干扰的作用，最后总结抗角和线晃动干扰初始对准方法如图 1 所示。

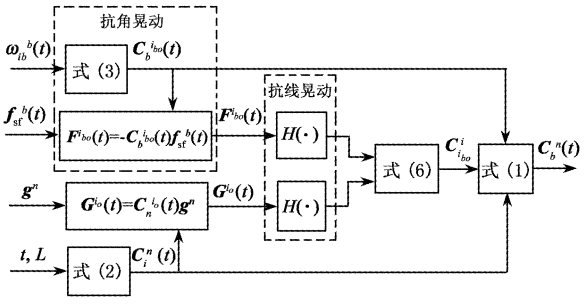


图 1 抗晃动干扰初始对准方法

Fig. 1 Scheme of anti-rocking disturbance initial alignment

3　试验验证

使用激光陀螺捷联惯导系统作车载抗晃动干扰初始对准试验验证,其中激光陀螺精度 0.01°/h,加速度计精度 $5\times10^{-5}g$, 采样频率 125Hz。惯导系统上电稳定后,先保持载车静止 600s,接着试验人员进行开关车门、上下车和车上走动等干扰,持续施加干扰 300s,将上述共计 900s 的陀螺和加速度计采样数据存盘,做事后处理。

首先,将前 600s 数据作常规的精确初始对准,对准完成后利用 600 – 900s 数据作导航解算, 进行姿态和方位跟踪,跟踪结果如图 2 所示,其中上小图中实线为俯仰角 θ,虚线为横滚角 γ,由图 2 可见,载车晃动姿态角最大变化约为 0.5°,而方位角 ψ 变化较小。另外, 由导航解算结果知 600 – 900s 内最大线晃动干扰速度约为 0.05m/s,这里不再给出它的曲线。从以上导航结果中,一方面可以了解载车角晃动和线晃动的干扰程度,另一方面将作为后续干扰条件下进行频域分离算子设计和初始对准效果检验的依据。

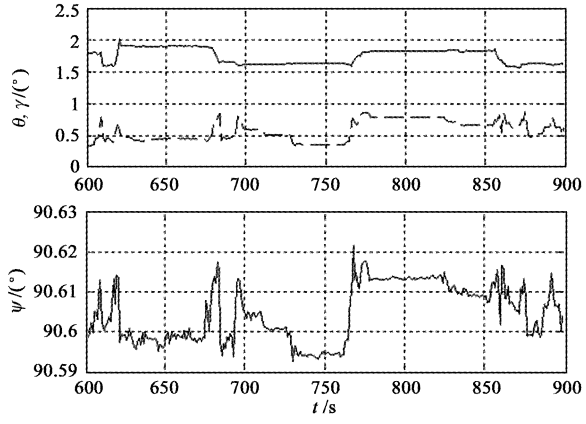


图 2　载车晃动姿态角和方位角

Fig. 2　Attitude and header angles under rocking vehicle

其次, 使用三种频域分离方法求解 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$,即分别对式(9) 作一次积分、双重积分和 IIR 低通滤波。设计低通滤波器时借助于 Matlab6.5/fdatool 工具,从工具面板中选择如下参数:“Lowpass + IIR (Butterworth) + Minimum order + Frequency Units (Hz) + Fs(125) + Fpass(0.001) + Fstop(0.05) + Magnitude Units (dB) + Apass (1) + Astop (40)”,设计结果为一 3 阶的 IIR 低通滤波器,它对频率高于 0.05Hz 的信号具有 40dB 以上的衰减作用,抗晃动干扰能力强,通带频率 0.001Hz 远大于地球自转频率 1×10^{-5}Hz,因而重力矢量信息可顺利通过。

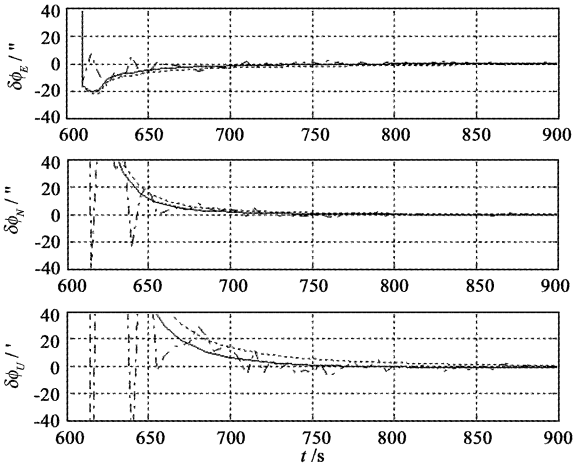


图 3　不同的 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 求解方法对应的对准误差

Fig. 3　Alignment errors of various solutions for $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$

三种方法初始对准误差如图 3 所示,其中点划线、虚线和实线分别对应一次积分、双重积分和 IIR 滤波对准误差。由图 3 可见,三种方法水平误差 $\delta\phi_E$ 和 $\delta\phi_N$ 都比较小, 对准 100s 后(图中 700s 后)误差均小于 6″。对于方位误差 $\delta\phi_U$,一次积分方法对准噪声相对较大, 而双重积分和 IIR 滤波方法的误差曲线平滑,三者在对准 300s 时(图中 900s 时)精度相当,误差都小于 1′,但 IIR 滤波方法的方位收敛速度优于双重积分法。

使用 IIR 滤波方法对准时,为充分发挥滤波器的优势,实现快速高精度的对准目标,往往要根据具体环境干扰仔细设计滤波器的频带特性,换句话说,每个滤波器具有一定的适用范围。一般而言,利用双重积分方法能够满足大多数线晃动干扰速度不大的对准应用场合,达到较好的对准效果,同时可省去环境干扰分析和设计滤波器的麻烦。

4　结　论

基于惯性参考系的初始对准方法具有抗角晃动干扰的能力,但是仍然会受到线晃动干扰影响,采取积分方法可从一定程度上降低影响。本文通过分析惯性系重力矢量和晃动干扰加速度的频率特点,引入了频域分离算子的概念,积分方法可作为频域分离算子的一个特例,除一次积分之外频域分离算子

还包括双重积分和低通滤波器,甚至是积分和滤波器的组合等。特别是利用频率特性经过精心设计的IIR滤波器分离算子,在有效抑制线晃动干扰前提条件下,再同时对反映重力信息的比力和惯性系重力参考矢量实施同步滤波,使它们都能顺利通过。若IIR滤波器初始状态均设置为0,则即使在滤波器输出没有稳定的情况下也可给出可靠的初始对准结果,从而实现快速精确初始对准。与同等性能的FIR级联滤波器相比,使用IIR滤波分离算子,还具有无需计算时延、阶次低和计算量小等优点。

参 考 文 献

[1] 徐博,孙枫,高伟. 舰船捷联航姿系统自主粗对准仿真与实验研究[J]. 兵工学报,2008,29(12):1467 - 1473. [Xu Bo, Sun Feng, Gao Wei. The coarse alignment of strap-down inertial navigation system for ship[J]. Acta Armamentarii, 2008, 29(12):1467 - 1473.]

[2] 丁杨斌, 王新龙, 王缜, 等. Unscented卡尔曼滤波在SINS静基座大方位失准角初始对准中的应用研究[J]. 宇航学报, 2006,27(6):1201 - 1204. [Ding Yang-bin, Wang Xin-long, Wang Zhen, et al. Study on unscented Kalman filter applied in initial alignment of large azimuth misalignment on static base of SINS[J]. Journal of Astronautics, 2006,27(6):1201 - 1204.]

[3] 夏家和, 秦永元, 游金川. 摇摆状态下基于非线性误差模型的惯导对准研究[J]. 宇航学报,2010, 31(2):410 - 414. [Xia Jia-he, Qin Yong-yuan, You Jin-chuan. Nonlinear error model based alignment method for SINS on swing base[J]. Journal of Astronautics,2010,31(2):410 - 414.]

[4] Julier S J, Uhlmann J K. Unscented filtering and nonlinear estimation[J]. Proc. of the IEEE Aerospace and Electronic Systems, 2004,92(3):401 - 422.

[5] 严恭敏,严卫生,徐德民. 简化UKF滤波在SINS大失准角初始对准中的应用[J]. 中国惯性技术学报,2008, 16(3):253 - 264. [Yan Gong-min, Yan Wei-sheng, Xu De-min. Application of simplified UKF in SINS initial alignment for large misalignment angles[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008,16(3):253 - 264.]

[6] Gaiffe T, Cottreau Y, Faussot N, et al. Highly compact fiber optic gyrocompass for applications at depths up to 3000 meters[C]. The 2000 International Symposium on Underwater Technology, Tokyo, Japan, May 23 - 26,2000.

[7] 秦永元,严恭敏,顾冬晴,等. 摇摆基座上基于信息的捷联惯导粗对准研究[J]. 西北工业大学学报,2005,23(5):681 - 684. [Qin Yong-yuan, Yan Gong-min, Gu Dong-qing, et al. A clever way of SINS coarse alignment despite rocking ship[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2005,23(5):681 - 684.]

[8] Gu D, El-Sheimy N, Hassan T, et al. Coarse alignment for marine SINS using gravity in the inertial frame as a reference[C]. Position, Location and Navigation Symposium, Monterey, CA, May 5 - 8,2008.

[9] 练军想,汤勇刚,吴美平,等. 捷联惯导惯性系动基座对准算法研究[J]. 国防科技大学学报,2007,29(5):95 - 99. [Lian Jun-xiang, Tang Yong-gang, Wu Mei-ping, et al. Study on SINS alignment algorithm with inertial frame for swaying bases[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2007, 29(5):95 - 99.]

[10] 严恭敏,秦永元,卫育新,等. 一种适用于SINS动基座初始对准的新算法[J]. 系统工程与电子技术,2009,31(3):634 - 637. [Yan Gong-min, Qin Yong-yuan, Wei Yu-xin, et al. New initial alignment algorithm for SINS on moving base[J]. Systems Engineering and Electronics,2009,31(3):634 - 637.]

作者简介:严恭敏(1977 -),男,副教授,博士,主要从事惯性导航与信息融合理论研究。

通信地址:陕西省西安市西北工业大学183号信箱(710072)

电话:(029)88431369

E-mail:yangongmin@163.com

(编辑:曹亚君)

捷联惯导系统内杆臂补偿方法及试验验证

严恭敏，周 琪，翁 浚，秦永元
（西北工业大学自动化学院，西安 710072）

摘 要：在实际捷联惯组中，三只加速度计的比力测量对应于不同的点位置，如果直接作为捷联惯导算法的输入，角运动条件下会引起导航误差。对于加速度计非正交安装情形，在常规静态标定模型基础上，推导了考虑内杆臂效应后的动态标定模型。以导航速度为观测量，建立了加计组合内杆臂补偿的一般模型方程。针对激光捷联惯性组合，设计了简便的试验方法用于辨识内杆臂参数，高强度的摇摆试验表明内杆臂补偿有效地提高了导航精度，速度误差降低达 77% 以上。

关键词：捷联惯导系统；内杆臂补偿；动态误差；摇摆试验
中图分类号：V249.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-1328(2012)01-0062-06
DOI：10.3873/j.issn.1000-1328.2012.01.009

Inner Lever Arm Compensation and Its Test Verification for SINS

YAN Gong-min, ZHOU Qi, WENG Jun, QIN Yong-yuan
(Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: In actual strapdown inertial measurement unit (SIMU), special force outputs of the three accelerometers are from different measuring points. If the outputs are directly put into the SINS update algorithm, it will bring navigation velocity errors under the case of SIMU angular movement. Taking into account the non-orthogonal installation scheme of accelerometer unit and based on the traditional static calibration models , new dynamic calibration models involving inner lever arm (ILA) compensation are deduced. A universal equation for accelerometer unit ILA compensation is established by taking navigation velocity as observation. Using the laser gyro SIMU, a test scheme is designed to identify the ILA parameters. In the end, a high intensity of swaying test verifies that ILA compensation can effectively improve the navigation accuracy, with the amount of errors decreasing over 77%.

Key words: Strapdown inertial navigation system (SINS); Inner lever arm; Dynamic error; Swaying test

0 引 言

在传统的捷联惯导系统(Strapdown Inertial Navigation System,SINS)数值积分导航算法研究中，重点主要集中在姿态圆锥误差、速度划船误差和位置涡卷误差的补偿上[1-3]，默认角速度和比力信息来自于捷联惯性测量组合(Strapdown Inertial Measurement Unit, SIMU)坐标系上的同一测量点，通常定义为 SIMU 坐标原点。实际上，如果将 SIMU 坐标系视为刚体，则角速度传感器——陀螺的安装位置和方位可以是任意的，只要三个敏感轴之间不相互平行和共面，经过正交标定之后均可实现空间三维角运动的测量。但是，根据刚体转动理论，在角运动时 SIMU 中不同点上的加速度是各不相同的。

由于实际加速度计物理大小和安装位置限制，三只加速度计安装敏感点的位置差异会给出不同的比力测量，如果直接将加速度计的输出代入导航算法，在角运动时势必造成导航解算误差。因此，对于由三只加速度计构成的加计组合，除了需进行常规的输入敏感轴方位正交性标定外，还需考虑各加速

收稿日期：2011-01-03； 修回日期：2011-04-05
基金项目：航空科学基金(20100818012)；教育部博士点基金(20106102120057)

度计测量敏感点位置的补偿,使比力信息等效于一个点之上。本文称这种因加速度计测量点不一致而引起的导航误差为内杆臂误差(Inner Lever Arm, ILA),有些文献称之为尺寸效应(Dimension Effect)。在三只加速度计的敏感轴近似正交安装并且相交于一点的特殊情况下,文献[4-5]分析了内杆臂效应的产生原因和规律,并且给出了对应的补偿方法。针对加速度计非正交安装情形,本文从常规静态标定模型出发,提出加计组合内杆臂补偿的一般方法,设计了简便的试验用于辨识内杆臂参数,摇摆试验验证了内杆臂补偿的有效性。

1　加计组合的静态标定模型

在 SIMU 中,假设加计组合由三只敏感轴不共面的单轴加速度计组成,各加速度计记作 $A_j(j=X,Y,Z)$,它们的输入输出关系均为最简单的线性模型关系[6],即

$$N_j = K_j(B_j + f_j) \tag{1}$$

其中 N_j, K_j, B_j, f_j 分别为加速度计的信号采样输出、标度因数、偏值和加速度(比力)输入。

利用转台或正交六面体进行多位置静态数据采集和标定处理,不难得到加计组合的静态标定模型[7]

$$\boldsymbol{f}^b = \boldsymbol{K}_A\boldsymbol{N}_A - \nabla^b \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{K}_A$ 为刻度系数矩阵,∇^b 为等效零偏,$\boldsymbol{N}_A = [N_X \quad N_Y \quad N_Z]^{\mathrm{T}}$ 是三只加速度计采样数据构成的向量。对加计组合标定就是通过一定的方法辨识标定模型参数 $\boldsymbol{K}_A$ 和 ∇^b,进而在导航应用时由采样数据 $\boldsymbol{N}_A$ 和标定模型参数求解比力 $\boldsymbol{f}^b$。理论上,比力 $\boldsymbol{f}^b$ 的参考点应处于 SIMU 坐标系(b 系)的原点,但是,使用多位置静态标定法只能确定 b 系的指向,而无法确定 b 系的原点,也不能确定每只加速度计的真实敏感点位置。

由文献[7]知,刻度系数矩阵 $\boldsymbol{K}_A$ 中隐含有三只加速度计的标度因数 K_j 以及各敏感轴指向的信息。将 $\boldsymbol{K}_A$ 求逆,记为

$$\boldsymbol{K}_A^{-1} = \begin{bmatrix} K_X C_a^b(1,1) & K_X C_a^b(2,1) & K_X C_a^b(3,1) \\ K_Y C_a^b(1,2) & K_Y C_a^b(2,2) & K_Y C_a^b(3,2) \\ K_Z C_a^b(1,3) & K_Z C_a^b(2,3) & K_Z C_a^b(3,3) \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{D}_K(\boldsymbol{C}_a^b)^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{D}_K = \mathrm{diag}(K_X, K_Y, K_Z)$,$C_a^b(i,j)$ $(i,j=1,2,3)$ 是加速度计安装矩阵 $\boldsymbol{C}_a^b$ 的第 i 行 j 列元素,若将 $\boldsymbol{C}_a^b$ 的第 j 列记为 $\boldsymbol{C}_a^b(*,j)$,则单位列向量 $\boldsymbol{C}_a^b(*,j)$ 表示加速度计 A_j 输入敏感轴在 b 系中的安装方位。此外,若记偏值向量 $\boldsymbol{B} = [B_X \quad B_Y \quad B_Z]^{\mathrm{T}}$,则等效零偏 $\nabla^b = [(\boldsymbol{C}_a^b)^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{B}$。

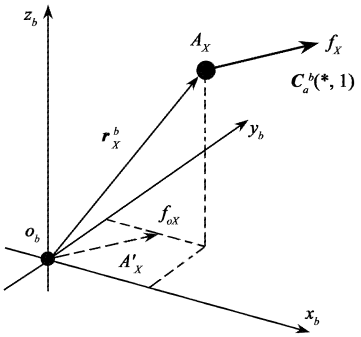


图 1　加速度计安装关系

Fig. 1　Accelerometer installation scheme

2　加计组合的动态标定模型

如图 1 所示(为简洁图中只画出 A_X 加速度计而未给出 A_Y 和 A_Z),$o_b x_b y_b z_b$ 是 SIMU 标定坐标系(b 系),A_X 加速度计的测量敏感点亦表示为 A_X,安装方位或敏感方向为 $\boldsymbol{C}_a^b(*,1)$。假设 A_X 与 b 系参考点原点 o_b 间的杆臂矢量为 $\boldsymbol{r}_X^b$,当存在角运动时,根据刚体角运动理论知 A_X 点处比力 $\boldsymbol{f}_X$ 与 o_b 点处比力 $\boldsymbol{f}_o$ 之间关系为

$$\boldsymbol{f}_X = \boldsymbol{f}_o + [(\dot{\boldsymbol{\omega}}^b\times) + (\boldsymbol{\omega}^b\times)^2]\boldsymbol{r}_X^b = \boldsymbol{f}_o + \boldsymbol{W}\boldsymbol{r}_X^b \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}^b$ 是 SIMU 转动角速度,$(\dot{\boldsymbol{\omega}}^b\times)\boldsymbol{r}_X^b$,$(\boldsymbol{\omega}^b\times)^2\boldsymbol{r}_X^b$ 分别为切向加速度和法向加速度,$(\bullet\times)$ 表示向量 $\bullet$ 构成的反对称矩阵,且简记 $\boldsymbol{W} = (\dot{\boldsymbol{\omega}}^b\times) + (\boldsymbol{\omega}^b\times)^2$,它是对称矩阵。

将式(4)沿矢量 $\boldsymbol{C}_a^b(*,1)$ 方向投影,或者将该式两边同时左乘 $[\boldsymbol{C}_a^b(*,1)]^{\mathrm{T}}$,并且记 $f_X = [\boldsymbol{C}_a^b(*,1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_X$、$f_{oX} = [\boldsymbol{C}_a^b(*,1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_o$ 和 $f_{XL} = [\boldsymbol{C}_a^b(*,1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}_X^b$,则有

$$f_X = f_{oX} + f_{XL} \tag{5}$$

这里 f_X 表示加速度计 A_X 沿输入轴敏感到的比力,f_{oX} 是 b 系原点 o_b 处的比力沿 $\boldsymbol{C}_a^b(*,1)$ 方向的投影,

f_{XL} 是由杆臂 $\boldsymbol{r}_X^b$ 引起的 A_X 和 o_b 两点之间的杆臂加速度差异。不难理解，真实加速度计测量 f_X 经过杆臂加速度 f_{XL} 补偿后就犹如在 o_b 点处存在一个虚拟的加速度计 A_X'。

将式(5)代入式(1)，得

$$N_X = K_X(B_X + f_{oX} + f_{XL}) \tag{6}$$

对加速度计 A_Y 和 A_Z 进行类似的处理，并将三只加计合在一起，可写成

$$\begin{bmatrix} N_X \\ N_Y \\ N_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_X & 0 & 0 \\ 0 & K_Y & 0 \\ 0 & 0 & K_Z \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} B_X \\ B_Y \\ B_Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{oX} \\ f_{oY} \\ f_{oZ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_{XL} \\ f_{YL} \\ f_{ZL} \end{bmatrix} \right) \tag{7}$$

或简写成

$$\boldsymbol{N}_A = \boldsymbol{D}_K(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{f}_o^a + \boldsymbol{f}_L) \tag{8}$$

其中 $f_{YL} = [\boldsymbol{C}_a^b(*,2)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}_Y^b$，$f_{ZL} = [\boldsymbol{C}_a^b(*,3)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}_Z^b$，$\boldsymbol{r}_Y^b$，$\boldsymbol{r}_Z^b$ 分别为 A_Y 和 A_Z 的杆臂。虚拟加速度计组合 A_X'，A_Y'，A_Z' 构成的非正交比力 $\boldsymbol{f}_o^a$ 与 b 系正交比力 $\boldsymbol{f}^b$ 之间的变换关系为 $\boldsymbol{f}_o^a = (\boldsymbol{C}_a^b)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}^b$，再将它代入式(8)，得

$$\boldsymbol{N}_A = \boldsymbol{D}_K[\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{C}_a^b)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}^b + \boldsymbol{f}_L] \tag{9}$$

从上式中求解 $\boldsymbol{f}^b$ 如下

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}^b &= [(\boldsymbol{C}_a^b)^{\mathrm{T}}]^{-1}(\boldsymbol{D}_K^{-1}\boldsymbol{N}_A - \boldsymbol{B} - \boldsymbol{f}_L) \\ &= [\boldsymbol{D}_K(\boldsymbol{C}_a^b)^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{N}_A - [(\boldsymbol{C}_a^b)^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{B} - [(\boldsymbol{C}_a^b)^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{f}_L \\ &= \boldsymbol{K}_A\boldsymbol{N}_A - \nabla^b - \boldsymbol{f}_L^b \end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{f}_L^b = [(\boldsymbol{C}_a^b)^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{f}_L$ 即为动态内杆臂加速度补偿项。比较式(10)和式(2)易知，动态标定模型比静态标定模型仅多了一项补偿项 $\boldsymbol{f}_L^b$，它是安装矩阵 $\boldsymbol{C}_a^b$、角速度 $\boldsymbol{\omega}^b$ 和内杆臂 $\boldsymbol{r}_j^b$ 的函数。

3 内杆臂参数的辨识模型

假设 SIMU 中陀螺组合已经过仔细标定，可以提供准确的 b 系角速度 $\boldsymbol{\omega}^b$，并且加计组合也已进行了静态多位置标定，此时安装矩阵 $\boldsymbol{C}_a^b$ 已知。显然内杆臂参数 $\boldsymbol{r}_X^b$，$\boldsymbol{r}_Y^b$，$\boldsymbol{r}_Z^b$ 均为常值参数，从前面分析可得 $\boldsymbol{f}_L^b$ 的具体表达式为

$$\boldsymbol{f}_L^b = [(\boldsymbol{C}_a^b)^{\mathrm{T}}]^{-1}\begin{bmatrix} [\boldsymbol{C}_a^b(*,1)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}_X^b \\ [\boldsymbol{C}_a^b(*,2)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}_Y^b \\ [\boldsymbol{C}_a^b(*,3)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}_Z^b \end{bmatrix} \tag{11}$$

若简记 $[(\boldsymbol{C}_a^b)^{\mathrm{T}}]^{-1} = \boldsymbol{U} = (U_{ij})$、$[\boldsymbol{C}_a^b(*,j)]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{V}_j$ 和 $\boldsymbol{Q}_{ij} = U_{ij}\boldsymbol{V}_j$，它们都是已知的常值，则有

$$\boldsymbol{f}_L^b = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_1\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}_X^b \\ \boldsymbol{V}_2\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}_Y^b \\ \boldsymbol{V}_3\boldsymbol{W}\boldsymbol{r}_Z^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{Q}_{13}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{Q}_{21}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{Q}_{22}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{Q}_{23}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{Q}_{31}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{Q}_{32}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{Q}_{33}\boldsymbol{W} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_X^b \\ \boldsymbol{r}_Y^b \\ \boldsymbol{r}_Z^b \end{bmatrix} \tag{12}$$

不妨将 b 系的原点限定为 A_Z 加速度计的测量敏感点，此时相当于增加了附加条件 $\boldsymbol{r}_Z^b = 0$，则上式进一步简化为

$$\boldsymbol{f}_L^b = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{11}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{Q}_{21}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{Q}_{22}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{Q}_{31}\boldsymbol{W} & \boldsymbol{Q}_{32}\boldsymbol{W} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_X^b \\ \boldsymbol{r}_Y^b \end{bmatrix} \triangleq \boldsymbol{S}\boldsymbol{R} \tag{13}$$

在角运动条件下进行 SINS 导航解算，如果加计组合仍然使用静态标定模型，则存在比力测量误差 $\delta\boldsymbol{f}^b = \boldsymbol{f}_L^b$。根据惯导比力方程将得到与内杆臂 $\boldsymbol{R}$ 相联系的导航速度误差 $\delta\boldsymbol{v}_L^n$，它在较短时间内的变化规律是

$$\delta\dot{\boldsymbol{v}}_L^n = \boldsymbol{C}_b^n\delta\boldsymbol{f}^b = \boldsymbol{C}_b^n\boldsymbol{f}_L^b = \boldsymbol{C}_b^n\boldsymbol{S}\boldsymbol{R} \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{C}_b^n$ 为 SINS 姿态矩阵，误差忽略不记。再将上式两边在时间区间 $[0, T]$ 积分，得

$$\delta\boldsymbol{v}_L^n(T) - \delta\boldsymbol{v}_L^n(0) = \int_0^T \boldsymbol{C}_b^n\boldsymbol{S}\mathrm{d}t \cdot \boldsymbol{R} \triangleq \boldsymbol{H}\boldsymbol{R} \tag{15}$$

至此，建立起了 SINS 导航速度误差与内杆臂参数之间关系的量测方程，通过设计合理的角运动来激励速度误差，便可辨识获得内杆臂参数 $\boldsymbol{R}$。

顺便指出，如果三只加速度计之间近似正交安装，并且各敏感轴与 b 系同名坐标轴之间的方位也近似一致，则有 $\boldsymbol{C}_a^b \approx \boldsymbol{I}$，这时式(13)就简化为

$$\boldsymbol{f}_L^b \approx \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}(1,*) & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{W}(2,*) \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_X^b \\ \boldsymbol{r}_Y^b \end{bmatrix} \tag{16}$$

4 试验验证

4.1 内杆臂参数的辨识方法

某箭载惯性级激光捷联惯性组合(LGSIMU)，陀螺零偏稳定性 0.01°/h，加速度计逐次启动零偏重复性 5×10^{-5}g。该惯组业已经过标定处理，但是对加计组合仅作了静态标定，还需进一步进行动态内杆臂参数辨识，方法和步骤简述如下：

(1) 将 LGSIMU 放置于平板上，Z 轴指天而 X

轴和 Y 轴分别近似指向东向和北向;

(2) 完成静态初始对准之后,以 0 初始速度启动导航解算, 同时递推更新量测矩阵 $\boldsymbol{H}$;

(3) 将 LGSIMU 绕天向 Z 轴迅速转动 180°,使 X 轴和 Y 轴分别近似指向西向和南向;

(4) 转动结束后静止, 导航速度记录为 $\boldsymbol{v}_Z^n$,量测矩阵为 $\boldsymbol{H}_Z$;

(5) 将 LGSIMU 的 X 轴指天而 Y 轴和 Z 轴分别近似指向东向和北向,重复试验(2) - (4),获得 $\boldsymbol{v}_X^n$ 和 $\boldsymbol{H}_X$;

(6) 将 LGSIMU 的 Y 轴指天而 Z 轴和 X 轴分别近似指向东向和北向,重复试验(2) - (4),获得 $\boldsymbol{v}_Y^n$ 和 $\boldsymbol{H}_Y$;

(7) 建立方程组 $[(\boldsymbol{v}_X^n)^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{v}_Y^n)^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{v}_Z^n)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{H}_X^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{H}_Y^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{H}_Z^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}$,由最小二乘法估计内杆臂参数 $\boldsymbol{R}$。

图 2 是内杆臂辨识过程中记录的导航速度曲线,图中实线、点划线和虚线分别对应东向、北向和天向速度。由于杆臂加速度与角速率的平方成正比,当角速率比较小时杆臂加速度激励太小,辨识结果不准;但如果角速率太大的话,可能接近陀螺的测量极限引起额外误差,因此,在本试验中 LGSIMU 绕天向轴的转动角速率约为 60°/s。经计算,内杆臂参数如下:

$$\boldsymbol{r}_X^b = [0.0025, 0.0125, -0.0387]^{\mathrm{T}}\mathrm{m},$$

$$\boldsymbol{r}_Y^b = [0.0016, -0.0237, -0.0291]^{\mathrm{T}}\mathrm{m}$$

图 3 是经过内杆臂补偿之后的导航速度。比较图 2 和图 3 可见:未经内杆臂补偿,转动前后速度相差约 0.05m/s;而补偿之后,转动前后速度相差仅为 0.002m/s,误差减少了近 96%。

4.2　高强度摇摆导航验证

将 LGSIMU 的 X 轴朝天向安装固定于摇摆台上, 完成静态初始对准后实施三轴高强度随机摇摆,最大摇摆角幅度达 20°,角速度 250°/s,频率 3Hz 左右。算法中已考虑了姿态圆锥误差补偿和速度划船误差补偿,进行 5min 纯惯性导航,导航速度如图 4 和图 5 所示,其中实线、点划线和虚线分别对应东向、北向和天向速度,速度记录周期 1s。图 4 中,在 5min 时内杆臂补偿前东向速度高达 17m/s,北向速度 -4m/s;而经过内杆臂补偿后,图 5 的速度分别减小至 1.2m/s 和 0.9m/s(相对误差分别降低了 93% 和 77%),这说明了在角动态条件下进行内杆臂补偿的必要性和有效性。注意到杆臂参数中的 X 分量都很小,因此补偿前后的天向速度效果改善不如其它两方向明显。但是相对于静态导航而言,内杆臂补偿后图 5 的速度依然存在一定的发散趋势, 这可能是由于 LGSIMU 其它方面的动态性能不够理想造成的,值得进一步分析研究。

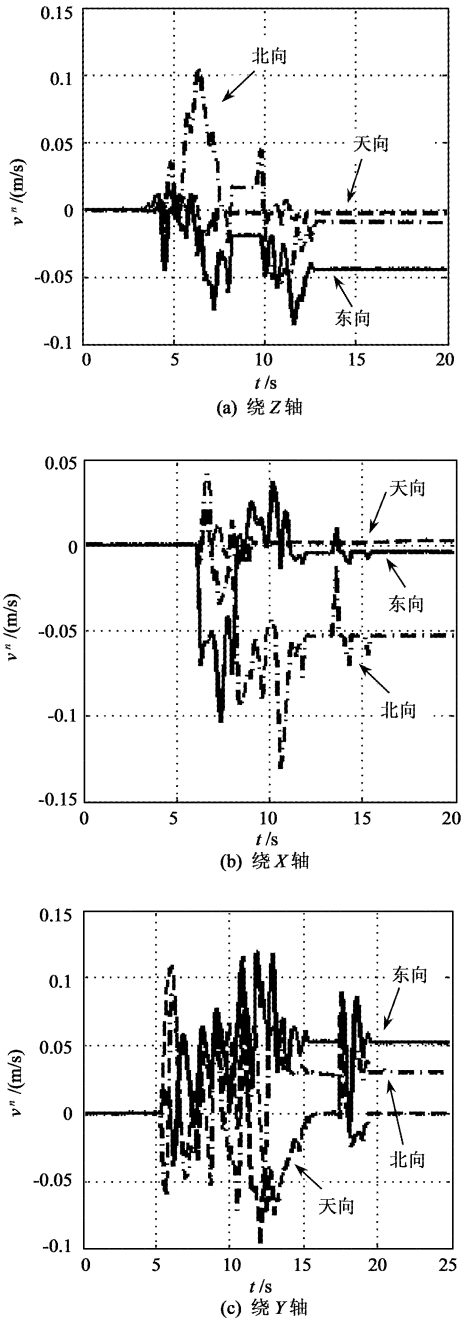
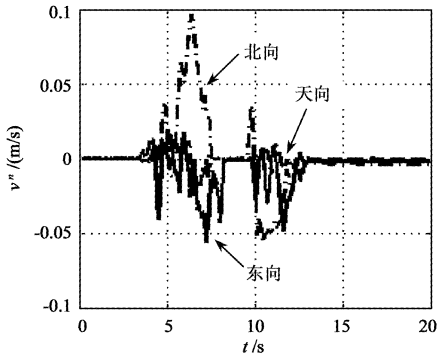
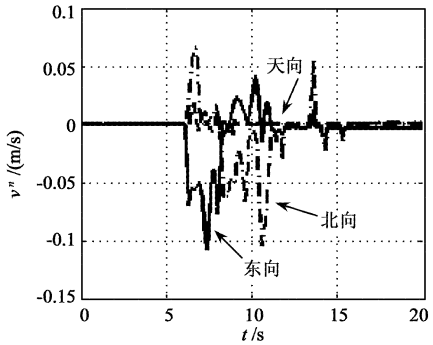


图 2　内杆臂补偿前速度

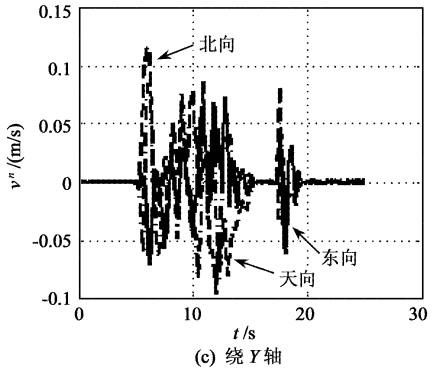
Fig. 2　Navigation velocities before inner lever arm compensation



(a) 绕 Z 轴



(b) 绕 X 轴



(c) 绕 Y 轴

图3 内杆臂补偿后速度

Fig. 3 Navigation velocities after inner lever arm compensation

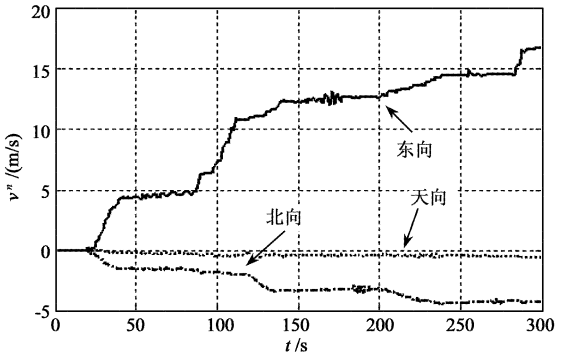


图4 内杆臂补偿前速度(摇摆)

Fig. 4 Navigation velocities before inner lever arm compensation(swaying)

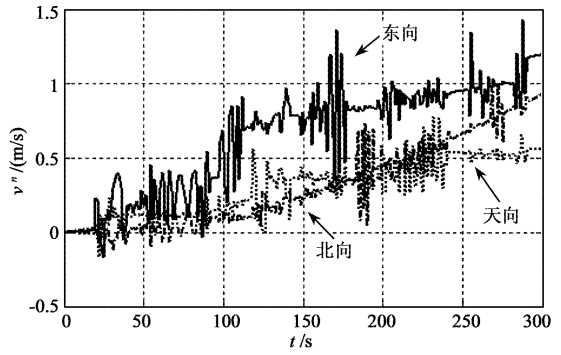


图5 内杆臂补偿后速度(摇摆)

Fig. 5 Navigation velocities after inner lever arm compensation(swaying)

5 结 论

在实际 SIMU 中,三只加速度计的比力输出并非来源于对同一点的测量,必须先进行内杆臂补偿将它们等效至同一虚拟点上(或称空间同步),再作为惯导算法的输入,否则在角运动条件下会引起内杆臂速度误差。本文提出对加计组合进行内杆臂补偿的一般方法,设计了一种简单的用于辨识内杆臂参数的试验,高强度的摇摆试验表明内杆臂补偿有效地提高了导航精度。实际上,可将内杆臂速度误差归属于动态误差,众多试验显示,在低强度角动态情况下,SINS 内杆臂补偿效果比较显著;而在高强度角动态条件下,还可能激励出更多的 SINS 动态误差,例如陀螺、加速度计的动态误差和各传感器数据之间的时间不同步误差等,限于篇幅这些误差在文中并没有充分考虑到,致使内杆臂补偿效果不如低动态时明显。为了提高 SINS 的实际使用性能,在动态误差补偿中有许多问题值得深入研究。

参 考 文 献

[1] Savage P G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 1: attitude algorithms[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998,21(2):19-28.

[2] Savage P G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 2: velocity and position algorithms[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998,21(2):208-221.

[3] 黄昊,邓正隆. 旋转矢量航姿算法的一种新的表达式[J]. 宇航学报,2001,22(3):92-98. [Huang Hao, Deng Zheng-long.

A new expression for rotation vector attitude algorithm[J]. Journal of Astronautics, 2001,22(3): 92 - 98.]

[4] 严恭敏,严卫生,徐德民. 联惯性测量组件中内杆臂效应分析与补偿[J]. 中国惯性技术学报,2008,16(2):148 - 153. [Yan Gong-min, Yan Wei-sheng, Xu De-min. Analysis and compensation on inner lever arm effect of strapdown inertial measurement unit[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(2): 148 - 153.]

[5] 严恭敏. 捷联惯导系统动基座初始对准及其它相关问题研究[R]. 西安:西北工业大学博士后研究工作报告,2008. [Yan Gong-min. On SINS in-movement initial alignment and some other problems[R]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2008.]

[6] GJB 2504—95. 石英挠性加速度计通用规范[S].

[7] 严恭敏. 惯性仪器测试与数据分析(讲义)[M]. 西安:西北工业大学,2010.

[8] Titterton D H, Weston J L. Strapdown inertial navigation technology (2nd ed.)[M]. London, The Institution of Electrical Engineers, 2004.

[9] Zhao G L, Gao W, Zhang X, et al. Research on calibration of fiber optic gyro units[C]. The 3rd International Symposium on Systems and Control in Aeronautics and Astronautics (ISSCAA), Harbin, China, June 8 - 10, 2010.

作者简介:严恭敏(1977 -),男,博士,副教授,主要从事惯性导航与信息融合理论研究。

通信地址:陕西省西安市西北工业大学自动化学院 183 号信箱(710072)

电话:(029)88431369

E-mail:yangongmin@163.com

(编辑:张宇平)

Proceedings of the 32nd Chinese Control Conference
July 26-28, 2013, Xi'an, China

一种激光陀螺SIMU标定新方法的改进

严恭敏，赵春莲，吴枫，秦永元

西北工业大学自动化学院，西安 710072
E-mail: yangongmin@163.com

摘 要：在单轴性转动测试条件下，以转角矢量的模值平方作为约束条件，构造6个不相关的转动非线性方程组，建立激光陀螺捷联惯组（SIMU）标定坐标系，利用正反转试验法有效消除地球自转和陀螺常值漂移的影响。提出了非线性方程组的线性化迭代求解方法，算法精度高。在加速度计标定模型中考虑了二阶非线性系数和交叉耦合系数。加速度计标定采用静态多位置法，在每个位置下需额外补充一次绕铅垂方向的单轴转动试验，其目的是为了从陀螺标定结果确定重力矢量在SIMU系下的投影，作为加速度计标定的比力激励基准。给出了加速度计标定的9位置方案，仿真表明加速度计的标定矩阵和常值偏置的估计精度高，但是二阶非线性系数和交叉耦合系数受测量误差影响较大。

关键词：捷联惯导系统；SIMU标定；迭代算法；仿真验证

An Improvement for the Calibration of Laser Gyro Strapdown IMU

YAN Gong-min, ZHAO Chun-lian, WU Feng, QIN Yong-yuan

Department of Automatic Control, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China
E-mail: yangongmin@163.com

Abstract: Under the condition of uniaxial rotation test and using norm restriction of the angular rotation vector, a nonlinear equations set including 6 uncorrelated rotations is established to define the SIMU calibration frame. A test scheme of clockwise & counter clockwise rotations is adopted to eliminate the effect of earth rotation and gyro drift errors. Linearization and iterative algorithm are put forward to resolve the nonlinear equations set with very high precision. In accelerometer calibration model, the two-order nonlinear coefficient and cross-coupling coefficient are both considered. The static multi-position method is used to calibrate accelerometers, but in each static position, it is necessary to conduct an extra vertical rotation test to determine gravitation vector in SIMU frame and the result can be used as accelerometer input reference. A static nine-position accelerometer calibration scheme is presented and the simulation results show that scale factor matrix and bias can be estimated with high accuracy, but the two-order nonlinear coefficient and cross-coupling coefficient are relatively affected by accelerometer measurement noise.

Key words: strapdown inertial navigation system; calibration of SIMU; iterative algorithm; simulation tests

惯导系统在使用之前必须先进行精确标定，对于捷联惯导系统（SINS），特别是在大角速度和线加速度机动环境下，陀螺和加速度计的刻度因数误差和非正交标定误差极易引起导航解算误差。捷联惯组（SIMU）的传统标定方法是分立标定法，即通过直接比较惯性元件的采样输出与给定的已知转台输入进行标定，文献[1]就是将各惯性元件视为分立器件，采用一元统计中的线性回归模型分别对各惯性器件的参数进行标定，该方法物理意义明确，但对转台设备精度要求高，转台的角位置基准误差会对标定结果产生重要影响，文献[2]提出采用姿态更新算法来减少双轴转台角位置基准误差对标定精度的影响，文献[3]研究了利用三轴转台标定时，转台角位置基准误差对激光捷联惯导系统标定精度的影响，指出在进行标定实验前应完成转台的调平、对北工作；此外惯性元件安装支架与SIMU外壳体基座之间存在的减振器非刚性连接也会影响标定的精度，从而使转台的精度优势难以充分发挥。激光陀螺作为SINS的常用元件，具有测角精度高的突出优点，早在1982年Brown就提出了利用低精度双自由度转台对激光陀螺SIMU进行系统级标定的方法[4]，它由导航速度误差反推标定误差，再修正提高标定精度，至今人们进行了较多的研究和应用[5-7]。在系统级标定中，加速度计的偏置稳定性对标定效果影响较大。

除了前述两类常见的标定方法外，文献[8]提出了一种新的标定方法，它以激光陀螺敏感轴作为参考基准建立机体坐标系和加速度计标定坐标系，文献[9]进一步考虑了加速度计二阶非线性系数和交叉耦合系数，新方法的标定精度受转台精度和减振器变形的影响小。但是，二文均未给出陀螺标定中非线性方程组的具体解法，并且文献[9]中的加速度计

*此项工作得到国家自然科学基金资助，项目批准号：61273333.

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

标定数据处理方法略显繁琐。本文针对以上问题作了进一步研究和改进，提出了陀螺标定非线性方程组的线性化迭代求解算法，给出了更加简洁的加速度计标定数据处理方法，最后进行了仿真试验验证。

1 陀螺标定模型

在激光陀螺SIMU中，假设三只陀螺的输入输出关系均为最简单的线性关系，则陀螺标定模型可以写成

$$\begin{bmatrix}\Delta\theta_x\\ \Delta\theta_y\\ \Delta\theta_z\end{bmatrix}=\int_0^T\boldsymbol{\omega}_{ib}^b\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}k_{gxx}&0&0\\ k_{gyx}&k_{gyy}&0\\ k_{gzx}&k_{gzy}&k_{gzz}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}N_{gx}\\ N_{gy}\\ N_{gz}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}N_{gx0}\\ N_{gy0}\\ N_{gz0}\end{bmatrix}T\right)\tag{1}$$

或者

$$\begin{bmatrix}\Delta\theta_x\\ \Delta\theta_y\\ \Delta\theta_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{gxx}&0&0\\ k_{gyx}&k_{gyy}&0\\ k_{gzx}&k_{gzy}&k_{gzz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_{gx}\\ N_{gy}\\ N_{gz}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\varepsilon_x^b\\ \varepsilon_y^b\\ \varepsilon_z^b\end{bmatrix}T\tag{2}$$

式中，T 是采样测量时间；$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 是SIMU坐标系（b 系）相对于惯性空间（i 系）的角速度，$\Delta\theta_m$ 是 m 轴 $(m=x,y,z)$ 在相应时间段内的角增量；N_{gm} 是陀螺输出脉冲数；N_{gm0} 是陀螺常值漂移在单位时间内的等效脉冲数，ε_m^b 表示在 b 系下投影的等效陀螺常值漂移；$[k_{gpq}]$ $(p,q=x,y,z)$ 是进行投影变换的陀螺标定矩阵。

记右上标符号 $\bullet^{j+}$ 表示SIMU绕 b 系空间中的某 j 轴（不限于坐标系轴）正转 n 圈，$\bullet^{j-}$ 表示SIMU绕 j 轴反转 n 圈，且取正反转时间相等，将正反转的陀螺采样数据分别代入模型式（2）并将两者相减，可得

$$\begin{bmatrix}\Delta\theta_x^{j\pm}\\ \Delta\theta_y^{j\pm}\\ \Delta\theta_z^{j\pm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{gxx}&0&0\\ k_{gyx}&k_{gyy}&0\\ k_{gzx}&k_{gzy}&k_{gzz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_{gx}^{j\pm}\\ N_{gy}^{j\pm}\\ N_{gz}^{j\pm}\end{bmatrix}\tag{3}$$

其中 $\Delta\theta_m^{j\pm}=\Delta\theta_m^{j+}-\Delta\theta_m^{j-}$、$N_{gm}^{j\pm}=N_{gm}^{j+}-N_{gm}^{j-}$。正反转试验方法不仅彻底消除了陀螺常值漂移的影响，根据文献[10-12]采用正反转整周标定法还能对称抵消地球自转角速度在SIMU各轴上的影响，因此式（3）左边的转角矢量模值应等于 $4n\pi$，若将该式右边展开再求模方，则有

$$\begin{aligned}&(k_{gxx}N_{gx}^{j\pm})^2+(k_{gyx}N_{gx}^{j\pm}+k_{gyy}N_{gy}^{j\pm})^2+\\&(k_{gzx}N_{gx}^{j\pm}+k_{gzy}N_{gy}^{j\pm}+k_{gzz}N_{gz}^{j\pm})^2=(4n\pi)^2\end{aligned}\tag{4}$$

假设标定理想值 k_{gpq} 的粗略近似为 k_{gpq0}，两者之间具有微小的误差 $\delta k_{gpq}=k_{gpq}-k_{gpq0}$，若将 $k_{gpq}=k_{gpq0}+\delta k_{gpq}$ 代入式（4），则有

$$\begin{aligned}&[(k_{gxx0}+\delta k_{gxx})N_{gx}^{j\pm}]^2+\\&[(k_{gyx0}+\delta k_{gyx})N_{gx}^{j\pm}+(k_{gyy0}+\delta k_{gyy})N_{gy}^{j\pm}]^2+\\&[(k_{gzx0}+\delta k_{gzx})N_{gx}^{j\pm}+(k_{gzy0}+\delta k_{gzy})N_{gy}^{j\pm}+\\&(k_{gzz0}+\delta k_{gzz})N_{gz}^{j\pm}]^2=(4n\pi)^2\end{aligned}\tag{5}$$

展开上式，忽略关于误差的二阶小量，可得

$$\begin{aligned}&\Delta\theta_{x0}^{j\pm}N_{gx}^{j\pm}\delta k_{gxx}+\Delta\theta_{y0}^{j\pm}(N_{gx}^{j\pm}\delta k_{gyx}+N_{gy}^{j\pm}\delta k_{gyy})+\\&\Delta\theta_{z0}^{j\pm}(N_{gx}^{j\pm}\delta k_{gzx}+N_{gy}^{j\pm}\delta k_{gzy}+N_{gz}^{j\pm}\delta k_{gzz})\\&\approx[(4n\pi)^2-\left|\Delta\boldsymbol{\theta}_0^{j\pm}\right|^2]/2\end{aligned}\tag{6}$$

其中

$$\begin{bmatrix}\Delta\theta_{x0}^{j\pm}\\ \Delta\theta_{y0}^{j\pm}\\ \Delta\theta_{z0}^{j\pm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{gxx0}&0&0\\ k_{gyx0}&k_{gyy0}&0\\ k_{gzx0}&k_{gzy0}&k_{gzz0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_{gx}^{j\pm}\\ N_{gy}^{j\pm}\\ N_{gz}^{j\pm}\end{bmatrix},$$

$$\left|\Delta\boldsymbol{\theta}_0^{j\pm}\right|^2=(\Delta\theta_{x0}^{j\pm})^2+(\Delta\theta_{y0}^{j\pm})^2+(\Delta\theta_{z0}^{j\pm})^2$$

显然，式（6）是关于标定误差 δk_{gpq} 的线性方程，可简记为

$$Y_j=\boldsymbol{H}_j\boldsymbol{X}_g\tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_j=[&\Delta\theta_{x0}^{j\pm}N_{gx}^{j\pm}\ \ \Delta\theta_{y0}^{j\pm}N_{gx}^{j\pm}\ \ \Delta\theta_{y0}^{j\pm}N_{gy}^{j\pm}\\&\Delta\theta_{z0}^{j\pm}N_{gx}^{j\pm}\ \ \Delta\theta_{z0}^{j\pm}N_{gy}^{j\pm}\ \ \Delta\theta_{z0}^{j\pm}N_{gz}^{j\pm}]\\ \boldsymbol{X}_g=[&\delta k_{gxx}\ \delta k_{gyx}\ \delta k_{gyy}\ \delta k_{gzx}\ \delta k_{gzy}\ \delta k_{gzz}]^{\mathrm{T}}\\ Y_j=[&(4n\pi)^2-\left|\Delta\boldsymbol{\theta}_0^{j\pm}\right|^2]/2\end{aligned}$$

容易看出，如果使用6组不相关的单轴转动测试，比如分别让SIMU的 x 轴朝天、y 轴朝天、z 轴朝天、xy 对角线朝天、xz 对角线朝天、yz 对角线朝天，便可建立满秩方程组求解出标定误差 $\boldsymbol{X}_g$，再修正粗略值 k_{gpq0} 获得更精确的标定 k_{gpq}，采用迭代方法能够不断提高标定计算精度。至于如何设置初始粗略值 k_{gpq0}，建议选 $k_{gxx0}=k_{gzx0}=k_{gzy0}=0$，而直接根据陀螺出厂参数可粗略计算 k_{gxx0}，k_{gyy0}，k_{gzz0}。

2 加速度计标定模型

考虑二阶非线性系数和交叉耦合系数后，加速度计的输入输出模型为

$$\begin{aligned}N_{am}=&K_{m0}+K_{m1}f_{mI}+K_{m2}f_{mI}^2+\\&K_{mIO}f_{mI}f_{mO}+K_{mIP}f_{mI}f_{mP}\end{aligned}\tag{8}$$

式中，下标符号 I,O,P 分别代表加速度计的输入轴、输出轴和摆轴，f_{mI} 是比力输入，N_{am} 是采样

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

输出，K_{m0},K_{m1} 分别是常值偏置和标度因数，K_{m2} 为二阶非线性系数，K_{mO},K_{mP} 分别为交叉耦合系数。式（8）可改写成

$$f_{ml}=-\frac{K_{m0}}{K_{m1}}+\frac{N_{am}}{K_{m1}}-\frac{K_{m2}}{K_{m1}}f_{ml}^2-\frac{K_{mlO}}{K_{m1}}f_{ml}f_{mO}-\frac{K_{mlP}}{K_{m1}}f_{ml}f_{mP} \tag{9}$$

假设加速度计的 I,O,P 轴安装近似平行于 b 系的三个坐标轴，例如当 $m=x$ 时 f_{xO},f_{xP} 可分别由 y 轴和 z 轴加速度计提供，将近似值 $f_{xI}\approx N_{ax}/K_{x1}$、$f_{xO}\approx N_{ay}/K_{y1}$ 和 $f_{xP}\approx N_{az}/K_{z1}$ 代入式（9）的右端，得

$$f_{xI}=-\frac{K_{x0}}{K_{x1}}+\frac{1}{K_{x1}}N_{ax}-\frac{K_{x2}}{K_{x1}^3}N_{ax}^2-\frac{K_{xlO}}{K_{x1}^2K_{y1}}N_{ax}N_{ay}-\frac{K_{xlP}}{K_{x1}^2K_{z1}}N_{ax}N_{az} \tag{10}$$

从多项式角度看，式（10）和（8）在形式上是完全相同的。

将 x,y,z 三只加速度计测得的比力式（10）向 b 系投影变换之后，便可由采样 N_{am} 计算得 b 系的比力 $\boldsymbol{f}^b$，此即加速度计的标定模型，整理成如下形式

$$\begin{bmatrix}f_x^b\\f_y^b\\f_z^b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{axx}&k_{axy}&k_{axz}\\k_{ayx}&k_{ayy}&k_{ayz}\\k_{azx}&k_{azy}&k_{azz}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}N_{ax}\\N_{ay}\\N_{az}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}N_{ax0}\\N_{ay0}\\N_{az0}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k_{2xx}N_{ax}^2\\k_{2yy}N_{ay}^2\\k_{2zz}N_{az}^2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k_{2xy}&k_{2xz}&0\\k_{2yx}&0&k_{2yz}\\0&k_{2zx}&k_{2zy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_{ax}N_{ay}\\N_{ax}N_{az}\\N_{ay}N_{az}\end{bmatrix}\right) \tag{11}$$

式中，$[k_{apq}]$ 是投影变换矩阵，或称为加速度计标定矩阵；$N_{ax0}=K_{x0}$ 是等效偏置脉冲数；k_{2pq} 是与二阶非线性系数和交叉耦合系数有关的参数，比如 $k_{2xx}=K_{x2}/K_{x1}^2$，其它参数的具体形式不再详细给出。当 x,y,z 三只加速度计的输入轴分别与 b 系的同名坐标轴之间的失准角满足小角度条件时，标定矩阵 $[k_{apq}]$ 的非对角线元素必定是小量，则式（11）还可简化为

$$\begin{bmatrix}f_x^b\\f_y^b\\f_z^b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{axx}&k_{axy}&k_{axz}\\k_{ayx}&k_{ayy}&k_{ayz}\\k_{azx}&k_{azy}&k_{azz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_{ax}\\N_{ay}\\N_{az}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\nabla_x^b\\\nabla_y^b\\\nabla_z^b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k'_{2xx}N_{ax}^2\\k'_{2yy}N_{ay}^2\\k'_{2zz}N_{az}^2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k'_{2xy}&k'_{2xz}&0\\k'_{2yx}&0&k'_{2yz}\\0&k'_{2zx}&k'_{2zy}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_{ax}N_{ay}\\N_{ax}N_{az}\\N_{ay}N_{az}\end{bmatrix} \tag{12}$$

由此可见，加速度计标定时只需求解式（12）中的相关参数，而对式（11）甚至式（10）中参数的求解都不是必需的。

不难发现，矩阵等式（12）可展开为三个分量方程，并且每个方程关于标定参数都是线性的，例如 x 分量方程如下

$$f_x^b=\boldsymbol{H}_{ax}\boldsymbol{X}_{ax} \tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{H}_{ax}=[N_{ax}\ \ N_{ay}\ \ N_{az}\ \ -1\ \ -N_{ax}^2\ \ -N_{ax}N_{ay}\ \ -N_{ax}N_{az}]$$

$$\boldsymbol{X}_{ax}=[k_{axx}\ \ k_{axy}\ \ k_{axz}\ \ \nabla_x^b\ \ k'_{2xx}\ \ k'_{2xy}\ \ k'_{2xz}]^{\mathrm{T}}$$

容易看出，使用7组不相关的静态位置测试，比如 x 轴朝天、x 轴朝地、y 轴朝天、y 轴朝地、z 轴朝天、xy 对角线朝天、xz 对角线朝天，若再已知参考比力 f_x^b 的话，便可建立满秩方程组求解出参数 $\boldsymbol{X}_{ax}$。

对于 y 和 z 分量方程的展开勿需再述，但不难验证，总共使用9组不相关的静态位置测试，比如 x 轴朝天、x 轴朝地、y 轴朝天、y 轴朝地、z 轴朝天、z 轴朝地、xy 对角线朝天、xz 对角线朝天、yz 对角线朝天，可求解出式（12）中的全部标定参数。

3 标定方案

从第1节分析可知，陀螺的标定与加速度计无关，只要有6组不相关的单轴转动测试，即可求得陀螺标定矩阵 $[k_{gpq}]$。

然而，加速度计的标定必须在陀螺标定之后才能进行，加速度计标定以陀螺标定为基础，后者为前者提供精确的参考比力基准，具体思路如下。

加速度计标定采用静态多位置法，但在每个位置下需额外增加一次单轴转动试验，其目的是为了根据陀螺标定结果确定出转动轴在SIMU系下的投影。比如转台绕SIMU的 j 轴作正反转试验，由陀螺采样与式（3）可求得SIMU旋转轴 j 轴的单位矢量

$$\boldsymbol{e}^j=\frac{1}{4n\pi}[\Delta\theta_{gx}^{j\pm}\ \ \Delta\theta_{gy}^{j\pm}\ \ \Delta\theta_{gz}^{j\pm}]^{\mathrm{T}}=\frac{1}{4n\pi}[k_{gpq}]\boldsymbol{N}_g^{j\pm} \tag{14}$$

显然，$\boldsymbol{e}^j$ 中三个分量分别代表了旋转轴在 b 系的投影分量。特别地，当且仅当 $\boldsymbol{e}^j$ 平行于地垂线方向时，进行加速度计静态位置测试，这时重力矢量 $\boldsymbol{g}^n$ 在 b 系的投影将与SIMU绕 j 轴的旋转角度无关，再假设单轴转动和静态位置两种测试状态下SIMU无相对角变形（旋转引起的向心力通常比较小，此假设容易满足），则可求得加速度计静态位置测试的参考比力

$$\boldsymbol{f}^b=-\boldsymbol{g}^b=g\boldsymbol{e}^j \tag{15}$$

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

若进行9组不相关的静态位置测试，再通过式（12）便可求得加速度计标定的所有参数。

对于陀螺常值漂移的确定，可使用简单的双位置测漂法，不再赘述。

最后指出，如果转台实际天向旋转轴与理想地垂线之间存在小角度偏差，可通过对称双位置平均法获取参考比力，以抵消铅锤误差的影响。参考图1，假设Oo^b是转台的实际天向转轴，它与理想铅垂方向OU之间存在小误差角α，过Oo^b和OU建立铅垂坐标平面OLU。假设在第一位置时SIMU的o^bx^b坐标轴也在OLU平面内且与Oo^b之间的夹角为β，则o^bx^b轴与OU的夹角是$\beta+\alpha$，易知，当绕Oo^b转动180°后，在第二位置时o^bx^b轴与OU的夹角是$\beta-\alpha$。

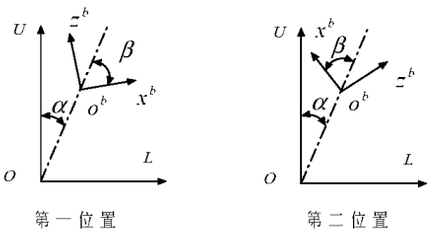


图1 加速度计标定的对称双位置平均法

不难求得两个位置下重力矢量在SIMU的o^bx^b轴投影的平均值为

$$\bar{g}_x=\frac{1}{2}[g\cos(\beta+\alpha)+g\cos(\beta-\alpha)]=g\cos\beta\cos\alpha \quad (16)$$

该平均值与不存在铅垂误差角α情况下的理想值$g\cos\beta$之间的误差为

$$|\delta g_x|=|g\cos\beta-\bar{g}_x|\approx\left|\frac{\alpha^2}{2}g\cos\beta\right|\le g\alpha^2/2 \quad (17)$$

因此采用对称双位置平均法后，参考比力误差是转台转轴不铅垂误差角的高阶小量，例如当误差角为10mrad（≈0.5°）时，参考比力误差约为5×10^{-6}g，这在惯性级SIMU标定中完全可以忽略不计。

4 仿真验证

4.1 陀螺标定仿真

为了验证非线性方程组（4）的线性化迭代求解算法的精度，进行了如下仿真。参数k_{gpq}的真值和初始粗略值设置分别如表1中第2、3行所示，第4～6行为采用迭代方法求解的估计值。显然，从表中第6行可以看出，经过3次迭代之后绝对误差均小于10^{-6}。因此，线性化迭代求解算法是可行和具有很高精度的。

表1 陀螺标定参数的线性化迭代求解

		k_{gxx}	k_{gyx}	k_{gyy}	k_{gzx}	k_{gzy}	k_{gzz}
真值		1.1	0.03	1.2	0.02	0.01	1.3
初始值		1.0	0.0	1.0	0.0	0.0	1.0
迭代次数	1	1.10565	0.0362	1.22005	0.026	0.013	1.345
	2	1.100040	0.030107	1.200167	0.020186	0.010093	1.300752
	3	1.100000	0.030000	1.200000	0.020000	0.010000	1.300000

4.2 加速度计标定仿真

假设转台的实际天向转轴与理想铅垂方向的偏差角为0.1°，加速度计的随机测量误差1×10^{-5}g（1σ），标定参数的真值如表2中第2列设置，采用静态9位置测试标定方法，参数估计结果如表2中第3列所示。从表中2可以看出，加速度计标定矩阵$[k_{apq}]$的绝对误差约为10^{-5}；常值偏置的标定精度较高；在二阶非线性系数中k'_{2yy}的误差最大，达0.000015；有些交叉耦合系数存在2×10^{-5}～5×10^{-5}的误差。因此，在1g重力场中，由于加速度计随机测量误差的影响，二阶非线性系数和交叉耦合系数的标定精度不高，若要提高它们的标定精度，必须进一步降低加速度计的测量误差（小于1×10^{-5}g），但这在常规测试中不容易做到。

表2 加速度计标定参数

参数	真值	标定值
k_{axx},k_{axy},k_{axz}	1.1, 0.01, 0.02	1.100005, 0.010015, 0.019994
k_{ayx},k_{ayy},k_{ayz}	0.03, 1.2, 0.04	0.030006, 1.199987, 0.039998
k_{azx},k_{azy},k_{azz}	0.05, 0.06, 1.3	0.049997, 0.059995, 1.300002

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$\nabla_x^b, \nabla_y^b, \nabla_z^b$	0.001, 0.002, 0.003	0.000999, 0.002001, 0.002999
$k'_{2xx}, k'_{2yy}, k'_{2zz}$	0.000010, 0.000015, 0.000020	0.000006, 0.000030, 0.000020
k'_{2xy}, k'_{2xz}	0.000025, 0.000030	0.000044, 0.000070
k'_{2yx}, k'_{2yz}	0.000035, 0.000040	0.000000, −0.000012
k'_{2zx}, k'_{2zy}	0.000045, 0.000050	0.000035, 0.000055

5 结论

在激光陀螺SIMU中如果存在引起角变形的减振器连接，一般需采用系统级标定方法。由于激光陀螺性能稳定，本文给出的标定方法将以陀螺敏感轴作为参考基准建立SIMU标定坐标系，与加速度计的精度无关。利用三轴转台实现SIMU标定，但对转台的精度要求不高，最主要的要求是：转台绕天向轴可作定轴转动并具备粗略角速率和精确角位置功能。从文中标定方案可以看出，所提标定方法与系统级标定方法一样不受SIMU翻滚引起的减振器角变形的影响。文中还给出了求解非线性方程组的线性化迭代方法，利用对称双位置平均法消除转台实际转轴铅垂误差的影响。仿真表明该方法能有效估计陀螺标定矩阵、加速度计标定矩阵和常值偏置。

参考文献

[1] Jeon C W, Kim H J, Lee J G. An LS-TLS-Based sequential identification algorithm: application to an accelerometer [J]. IEEE Trans on AES, 2001, 37(2): 607-618.

[2] 周琪，秦永元，严恭敏，等. 激光捷联惯性组件精确标定方法研究[J]. 测控技术，2008，27(9)：95-98.

[3] 邓志红，刘亚辰，王清哲，等. 转台角位置基准误差对激光捷联惯导标定的影响分析[J]. 中国惯性技术学报，17 (4): 498-504, 2009

[4] Brown A, Ebner R, Mark J. A calibration technique for a laser gyro strapdown inertial navigation system[C]. DGON Proceeding, Gyro Technology Symposium, Stuttgart, 1982.

[5] 张开东. 激光陀螺捷联惯导系统连续自动标定技术[D]. 长沙：国防科学技术大学, 2002.

[6] Rogers R M. Applied mathematics in integrated navigation systems(2nd ed.)[M]. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., Reston, Virginia, 2003.

[7] Bogatsky I, Leonets Q. A procedure for high-accuracy calibration of a strapdown IMU on a low-accuracy turntable[C]. 2010 International Symposium on Inertial Technology and Navigation, Nanjing, China, Oct. 18-20, 2010, 294-297.

[8] 袁保伦，饶谷音. 一种新的激光陀螺惯性测量组合标定方法[J]. 中国惯性技术学报, 15(1): 31-34, 2007.

[9] 杨杰，吴文启，练军想. 激光陀螺捷联系统高精度加速度计非线性模型参数标定[J]. 中国惯性技术学报, 18(5): 625-632, 2010.

[10] Camberlein L, Mazzanti F. Calibration technique for laser gyro strapdown inertial navigation systems[C]// Symposium Gyro Technology. Stuttgart, Germany, 1985.

[11] Cho S.Y, Park C.G. A calibration technique for a redundant IMU containing low-grade inertial sensors [J]. ETRI Journal, 2005, 27(4): 418-426.

[12] 严恭敏，李四海，秦永元. 惯性仪器测试与数据分析[M]. 北京：国防工业出版社,2012.

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

捷联惯导系统中加速度计的时延补偿研究

严恭敏[1]，张 强[1]，何昆鹏[2]，秦永元[1]
(1. 西北工业大学自动化学院，西安 710072；2. 哈尔滨工程大学自动化学院，哈尔滨 150001)

摘 要：针对实际捷联惯导系统中陀螺和加速度计的传递函数相移特性不一致问题，通过分析指出了在角运动环境下容易引起时间不同步导航速度误差。从系统测试角度提出了辨识加速度计时延的简便方法，即在重力场中进行惯导系统的翻滚试验和惯导解算，建立加速度计时延与导航速度误差之间的关系，从速度误差中可计算出时延参数。此外，还提出了两种方法对不同步速度误差进行补偿：一是根据加速度计传递函数模型和外推算法计算时延补偿；二是通过惯导速度更新算法直接补偿。最后，在实验室条件下利用光纤陀螺惯导系统进行了试验，时延补偿提高了系统的导航精度，验证了理论分析的正确性。

关键词：捷联惯导系统；加速度计；相频特性；时间延迟补偿
中图分类号：V249.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-1328(2013)12-1578-06
DOI：10.3873/j.issn.1000-1328.2013.12.006

Study on Time-Delay Compensation for Accelerometers in SINS

YAN Gong-min[1], ZHANG Qiang[1], HE Kun-peng[2], QIN Yong-yuan[1]
(1. College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

Abstract: In view of the phase-shift characteristic inconsisteny between gyros and accelerometers in actual SINS (Strapdown Inertial Navigation System), it's found that non-synchronization velocity errors are considerable under SINS angular motion. Through SINS systemic test, a simple and convenient way to identify the accelerometer time-delay parameter is proposed. In this way, a rolling test in gravity fields is designed and the relations between accelerometer time-delay parameter and the system's velocity error are obtained. Moreover, two kinds of methods for non-synchronization velocity error compensation are given: one is the time-delay extrapolation based on the transfer function model of accelerometer and the other is the velocity error direct compensation based on SINS velocity update algorithm. Finally, by using fiber optic gyro SINS, some experiments are carried out and the results verify that the navigation system's accuracy is improved effectively and the theoretical analysis is correct.

Key words: SINS; Accelerometer; Phase-shift characteristics; Time-delay compensation

0 引 言

传统的捷联惯导系统(Strapdown Inertial Navigation System,SINS)算法研究主要集中在姿态圆锥误差、速度划船误差和位置涡卷误差补偿上[1-4]，其隐含条件是假设惯性传感器的采样是理想的，即不存在空间上和时间上的同步误差。然而，对于工程实际中的捷联惯性测量组合(Strapdown Inertial Measurement Unit, SIMU)必须考虑非理想情况下这两种误差因素的影响，即空间同步误差和时间同步误差。针对空间同步问题，主要是指三只加速度计敏感点不重合引起的尺寸效应(或称为内杆臂)误差，文献[5-6]进行了比较详细的研究。时间同步问题将是本文研究的重点。文献[7]仅考虑了 SINS 中三只激光陀螺信号采样的时间不同步误差并进行了外推修正研究，但未涉及加速度计的同

收稿日期：2012-11-01； **修回日期**：2013-06-02
基金项目：国家自然科学基金(61273333)

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

步问题。文献[8-10]考虑了惯性传感器信号处理中滤波器幅频特性的影响,对传统圆锥和划船误差补偿系数进行了修正,在进行划船误差补偿时,将加速度计采样信号通过与处理机抖激光陀螺高频采样相同的数字滤波器,以期获得一致的时延,在 SINS 解算时实现两类信号的精确同步。但是,实际系统中陀螺和加速度计的频率特性往往是不同的,各惯性器件厂商仅根据自身器件特点对其频率特性进行优化,而极少考虑相互兼容匹配问题,比如一般情况下石英挠性加速度计的带宽为数百赫兹而光纤陀螺的带宽达数千赫兹[11-13],其中相频特性差异必然会导致信号测量的时延差别,即使在后端信号调理环节通过相同的数字滤波器,也难以实现两类信号的同步。

针对实际 SINS 中陀螺和加速度计信号的时间不同步问题,论文提出使用外推方法进行加速度计时间延迟的相位超前校正,以实现两类信号的同步,从导航系统测试的角度给出了加速度计相对于陀螺时延的测试和计算方法,并做了试验验证。

1　加速度计的传递函数模型及时延计算方法

通常将加速度计的数学模型近似成二阶传递函数,不失一般性,对如下二阶传递函数模型的加速度计进行时延分析[14]:

$$H(s) = \frac{30.899s + 12555}{s^2 + 501.35s + 42034} \tag{1}$$

注意到分母中常数项 $\sqrt{42034} \approx 205$,则当角频率 $\omega \ll 205\text{rad/s}$ 时(比如频率 $f = \omega/(2\pi) < 10\text{Hz}$ 时),传递函数式(1)在低频段可近似为如下一阶系统:

$$H(s) \approx \frac{30.899s + 12555}{501.35s + 42034} \tag{2}$$

对于输入角频率为 ω 的低频正弦比力信号(记周期 $T = 2\pi/\omega$),由式(2)计算系统输出与输入之间的相对相位滞后 $\angle\phi$,可近似得

$$\begin{aligned}\angle\phi &= \arctan\left(-\frac{30.899\omega}{12555}\right) + \arctan\left(\frac{501.35\omega}{42034}\right)\\ &\approx -\frac{30.899\omega}{12555} + \frac{501.35\omega}{42034}\\ &\approx 0.0094\omega\end{aligned} \tag{3}$$

这说明式(3)在低频段具有较理想的线性相位延迟特点。进一步计算正弦信号的时延 τ,得

$$\tau = T \times \frac{\angle\phi}{2\pi} = \frac{2\pi}{\omega} \times \frac{\angle\phi}{2\pi} = 0.0094\text{s} \tag{4}$$

由此可见,加速度计传递函数式(1)对低频输入正弦比力信号的感测至其输出响应大约存在 0.0094s的时延。在实际 SINS 中,由于 A/D 或 I/F 量化采样、信号预处理和信号传输等其他众多环节的影响,其中有些延时环节是考虑不周或较难准确建模的,致使加速度计还可能存在更大的时延,如果能够采取办法从整体上估计出时延是最理想的,这将在第 2 节中介绍。

2　时延参数的辨识方法

进行加速度计时延补偿的前提条件是获得时延参数 τ。如果已知加速度计的传递函数模型,则可很方便地通过第1节介绍的方法将 τ 计算出来,但是实际中获取加速度计传递函数的途径一般都比较复杂,比如需要采用机械振动法或电激励模拟法等方法[15],并且这些方法仅仅考虑了加速度计单表因素的影响,而未考虑其在 SINS 系统中与陀螺的相对相位关系以及其他众多时延因素。本节从 SINS 系统测试的角度出发,推导并建立起加速度计的时延与导航速度误差之间的关系,获得从导航速度误差中辨识出时延参数的方法,它综合考虑了所有时延因素的影响,测试试验操作简单且参数辨识精度高。

在实验室条件下,通过加速度计时延激励出导航速度误差的最简单方法是进行翻滚运动,即当 SIMU 的某一坐标轴处于水平并绕其旋转时,重力(或加速度计敏感的比力)在载体坐标系上将不断地改变方向。在实际系统中具有这种运动方式的典型例子是战斗机的翻滚机动或滚转弹的滚转运动。为了分析方便,假设初始时刻 SIMU 坐标系 $ox^by^bz^b$ 与东北天导航坐标系(ENU 系或 n 系)重合,当 SIMU 绕其 oy^b 轴以匀角速率 ω_y 旋转至滚动角 γ 时,如图 1 所示(oy^b 轴垂直纸面向里)。图中 ox^bz^b 表示由陀螺测量并解算确定的数学平台角位置,然而由于加速度计测量的时延,其敏感的比力实际上是在 ox^Az^A 角位置处的比力。所以,由于时延的影响,陀螺坐标系和加速度计坐标系不再重合,将引起坐标系的动态不一致误差。

当 SIMU 中使用的三只加速度计型号相同时,假设它们具有一致的时延特性(至少偏差不大),则 ox^Az^A 亦为直角坐标系(否则,如果三只加速度计的时延差别较大,则 ox^Az^A 构成非直角坐标系,并且两

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

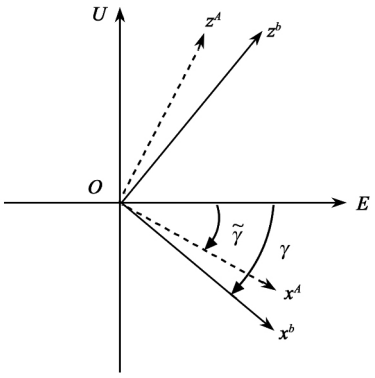


图 1 翻滚运动中加速度计的时延示意图

Fig. 1 Accelerometer time-delay in rolling motion

坐标轴之间夹角大小还与角速率 ω_y 有关，后续分析相对比较复杂）。易知，ox^Az^A 与 ox^bz^b 之间存在一个小角度误差 $\delta\gamma = \gamma - \tilde{\gamma}$，并且有

$$\delta\gamma = \gamma - \tilde{\gamma} = \omega_y\tau \tag{5}$$

根据图 1 可知，考虑时延后的加速度计的实际敏感比力输出为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^A = \tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^b &= [\tilde{f}_x^b \quad \tilde{f}_y^b \quad \tilde{f}_z^b]^{\mathrm{T}} \\ &= [-g\sin\tilde{\gamma} \quad 0 \quad g\cos\tilde{\gamma}]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{6}$$

式中：g 为当地重力加速度的大小。由此可见，oy 陀螺的输出为常值，而 ox 和 oz 加速度计的输出为正/余弦信号，即使 $\omega_y = 360(^\circ)/\mathrm{s}$，加速度计的输出也仅仅是 1Hz 的低频信号，因此一般情况下式(2)的近似是合理的。

应用中以 ENU 系作为导航参考坐标系进行导航解算时，需利用陀螺解算的数学平台 $\boldsymbol{C}_b^n$ 对比力 $\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^b$ 分解投影至导航坐标系（n 系），得

$$\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^n = \boldsymbol{C}_b^n\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^b \tag{7}$$

即

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^n &= \begin{bmatrix}\tilde{f}_E^n \\ \tilde{f}_N^n \\ \tilde{f}_U^n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{f}_x^b \\ \tilde{f}_y^b \\ \tilde{f}_z^b\end{bmatrix} \\ &= g\begin{bmatrix}-\cos\gamma\sin\tilde{\gamma} + \sin\gamma\cos\tilde{\gamma} \\ 0 \\ \sin\gamma\sin\tilde{\gamma} + \cos\gamma\cos\tilde{\gamma}\end{bmatrix} \\ &= g\begin{bmatrix}\sin(\gamma - \tilde{\gamma}) \\ 0 \\ \cos(\tilde{\gamma} - \gamma)\end{bmatrix} \approx g\begin{bmatrix}\omega_y\tau \\ 0 \\ 1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{8}$$

式(8)与理想比力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^n = -\boldsymbol{g}^n = -[0 \quad 0 \quad -g]^{\mathrm{T}}$ 相比，仅仅存在东向比力测量误差 $g\omega_y\tau$。根据惯导比力方程

$$\dot{\boldsymbol{V}}^n = \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^n + (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n)^{\times}\boldsymbol{V}^n + \boldsymbol{g}^n \approx \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^n + \boldsymbol{g}^n \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ 是地球自转角速度，$\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ 是惯导位置变化引起的导航系旋转角速度，$(\cdot)^{\times}$ 表示由向量 $(\cdot)$ 构成的反对称矩阵。因此，静基座下当 SIMU 绕 oy^b 轴旋转一圈（360°）后，将引起东向速度误差，其值为

$$\begin{aligned}\delta V_E^n &= \int(\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^n + \boldsymbol{g}^n)_E\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{|2\pi/\omega_y|} g\omega_y\tau\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{sgn}(\omega_y)2\pi g\tau\end{aligned} \tag{10}$$

式(10)就是在 SIMU 绕北向水平轴翻滚时，建立的东向速度误差与加速度计时延参数之间的关系式，它表明：时延速度误差与旋转角度成比例，而与旋转角速率无关，亦与采样频率无关。所以，在小角速率旋转情况下进行时延参数辨识试验，可能有助于减小其他与角速率有关的动态误差因素的干扰，但是试验时间长可能又会受到纯惯导速度误差（包括 SIMU 标定误差）的影响。从式(10)还可以看出，如果绕 oy^b 轴作摇摆角运动，由于角速率符号的不断交替改变，因此时延速度误差并不会不断累积。

特别指出的是，在翻滚或摇摆运动下，除了时延速度误差外还有两种常见的动态误差，即内杆臂误差和旋转效应误差。其中，旋转效应误差补偿比较简单，即 $\Delta\boldsymbol{V}_{\mathrm{rot}m} = 0.5(\Delta\boldsymbol{\theta}_m)^{\times}\Delta\boldsymbol{V}_m$（$\Delta\boldsymbol{\theta}_m$ 和 $\Delta\boldsymbol{V}_m$ 分别为 SINS 速度更新周期 $T_m = mT_s$ 内的角增量和速度增量，m 为子样数）[4]；而内杆臂误差补偿具体可参见文献[5]。对于上述三种误差，它们的主要特征总结见表 1，在试验中可根据它们的不同特征加以区分或将这些特征应用于误差分离。

表 1 三种动态速度误差的主要特征

Table 1 Main characteristics of three types of dynamic velocity errors

影响因素	误差类型		
	时延误差	内杆臂误差	旋转效应误差
翻滚运动	累积增长	不累积	累积增长
摇摆运动	不累积	累积增长	不累积
提高速度更新频率	无影响	无影响	不断减小

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3　加速度计的时延补偿方法

3.1　方法一

在基于激光陀螺或光纤陀螺的 SIMU 中,一般陀螺的带宽较高而加速度计的带宽相对较低,所以加速度计往往具有更大的时延,为了实现角速率和比力信号的同步,可将加速度计的输出时刻等效变换至陀螺的输出时刻,即只需知道这两种信号的相对时延而不必获得各自的绝对时延。

为了说明方便,这里假设陀螺为瞬时角速率采样输出 ω_{ib}^b,加速度计为瞬时比力采样输出 f_{sf}^b。SIMU 的等间隔采样时序示意图如图 2 所示,假设采样周期为 T_s 且 $T_s = t_i - t_{i-1} = t_i^G - t_{i-1}^G = t_i^A - t_{i-1}^A$,其中 t_i^G 和 t_i^A 分别表示 SIMU 在 t_i 采样时刻对应的陀螺和加速度计的实际表头敏感时刻,与陀螺相比加速度计采样的相对时延为 $\tau = t_i^G - t_i^A$。不妨假设 $T_s > \tau$,且后面将记 $\alpha = \tau/T_s$。

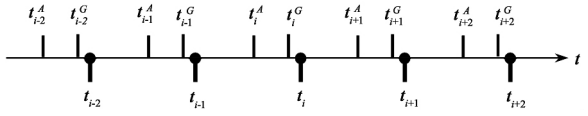


图 2　陀螺和加速度计采样时序图

Fig. 2　Sequence diagram of gyro and accelerometer sampling

在常规的 SINS 导航算法中认为 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t_i^G)$ 和 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_i^A)$ 来自于同一时刻,若将其直接作为导航算法的输入,则相当于让加速度计敏感值通过一个零阶保持器进行外推,比力信号从 t_i^A 时刻常值保持外推至 t_i^G 时刻。显然,在角动态环境下,由陀螺建立的数学平台坐标系与由加速度计测量的比力坐标系可能不会完全重合,而存在小的偏差角,如果利用数学平台对加速度计比力直接实施分解,就会引起比力分解以及导航速度解算误差。

比零阶保持更合理的改进外推方案是采用线性外推或者抛物线外推进行时延的超前校正,但这必须已知加速度计的时延参数 τ。假设参数 τ 已知,以线性外推为例,将加速度计的敏感值 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_{i-1}^A)$ 和 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_i^A)$ 线性外推至 t_i^G 时刻的公式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_i^G) &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_i^A) + \frac{\tau}{T_s}\left[\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_i^A) - \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_{i-1}^A)\right]\\ &= (1+\alpha)\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_i^A) - \alpha\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_{i-1}^A)\end{aligned} \tag{11}$$

显然,式(11)是一个一阶的 FIR 高通滤波器,具有相位超前特性,其作用还可分析如下。与式(11)对应的离散域传递函数为

$$H(z) = (1+\alpha) - \alpha z^{-1} \tag{12}$$

令 $z^{-1} = \mathrm{e}^{-sT_s} \approx 1 - sT_s = 1 - \mathrm{j}\omega T_s$,可得

$$\begin{aligned}H(\mathrm{j}\omega) &= (1+\alpha) - \alpha\mathrm{e}^{-sT_s}\\ &\approx (1+\alpha) - \alpha(1 - sT_s)\\ &= 1 + \mathrm{j}\omega\alpha T_s = 1 + \mathrm{j}\omega\tau\end{aligned} \tag{13}$$

在低频段,即当 $\omega\tau \ll 1$ 时,超前相位角为

$$\angle\phi = \arctan(\omega\tau) \approx \omega\tau \tag{14}$$

对于输入角频率为 ω 的正弦低频信号而言,其超前时间为

$$\frac{2\pi}{\omega} \times \frac{\angle\phi}{2\pi} = \tau \tag{15}$$

因此,如果取参数 $\tau = 0.0094\mathrm{s}$,则式(11)正好可以补偿加速度计传递函数式(1)的时延影响。

当然,线性外推校正式(11)对比力测量噪声也有一定的放大负作用。如果在 t_i 时刻采集的传感器不必用于实时导航解算,则在 t_i 时刻导航解算时可利用 t_{i-1}^G 时刻的陀螺信息,而 t_{i-1}^G 时刻的加速度计信息由 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_{i-1}^A)$ 和 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_i^A)$ 插值得到,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_{i-1}^G) &= \frac{T_s - \tau}{T_s}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_{i-1}^A) + \frac{\tau}{T_s}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_i^A)\\ &= (1-\alpha)\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_i^A) + \alpha\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b(t_{i-1}^A)\end{aligned} \tag{16}$$

采用插值方案的优点是对比力测量噪声具有一定的平滑作用,但导航输出存在一个采样周期的时延。

3.2　方法二

在 SINS 速度更新算法中,这里再给出加速度计时延引起的速度误差补偿的一个简洁公式。

以加速度计的敏感坐标系作为 SINS 速度更新的统一坐标系基准,将陀螺确定的数学平台(b 系)折算至加速度计敏感坐标系(A 系),对于理论上的比力变换关系 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^n = \boldsymbol{C}_A^n\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^A$,其实际计算值为

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf}}^n &= \boldsymbol{C}_b^n\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^A = \boldsymbol{C}_A^n\boldsymbol{C}_b^A\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^A\\ &\approx \boldsymbol{C}_A^n\left[\boldsymbol{I} + (\Delta\boldsymbol{\vartheta}_{Ab}^A)^{\times}\right]\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^A\\ &= \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^n + \boldsymbol{C}_A^n\left[\Delta\boldsymbol{\vartheta}_{Ab}^A)^{\times}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^A\right]\\ &\approx \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^n + \boldsymbol{C}_b^n\left[\Delta\boldsymbol{\vartheta}_{Ab}^A)^{\times}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^A\right]\end{aligned} \tag{17}$$

式中 $\Delta\boldsymbol{\vartheta}_{Ab}^A$ 是由于延迟误差引起的 b 系相对于 A 系的等效旋转矢量(是一小量),且近似有

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\vartheta}_{Ab}^A &\approx \boldsymbol{\omega}_{nb}^b\tau = (\boldsymbol{\omega}_{ib}^b - \boldsymbol{C}_n^b\boldsymbol{\omega}_{in}^n)\tau\\ &\approx (\Delta\theta_m - \boldsymbol{C}_n^b\boldsymbol{\omega}_{in}^n T_m)\tau/T_m\end{aligned} \tag{18}$$

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

由 $(\Delta\vartheta_{Ab}^{A})^{\times}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{A}$ 在速度更新周期 T_m 内积分得时延速度误差补偿增量 $\Delta\boldsymbol{V}_{\tau m}$，即

$$\Delta\boldsymbol{V}_{\tau m}=\int_0^{T_m}(\Delta\vartheta_{bA}^{A})^{\times}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{A}\mathrm{d}t\approx(\Delta\vartheta_{bA}^{A})^{\times}\Delta\boldsymbol{V}_m$$
$$=(\tau/T_m)(\Delta\theta_m)^{\times}\Delta\boldsymbol{V}_m-(\boldsymbol{C}_n^b\boldsymbol{\omega}_{in}^n\tau)^{\times}\Delta\boldsymbol{V}_m \quad (19)$$

至此，可得考虑加速度计时延误差后的 SINS 速度更新算法

$$\boldsymbol{V}_m=\boldsymbol{V}_{m-1}+\boldsymbol{C}_{m-1}(\Delta\boldsymbol{V}_m+\Delta\boldsymbol{V}_{\mathrm{rot}m}+\Delta\boldsymbol{V}_{\mathrm{scul}m}-\Delta\boldsymbol{V}_{\tau m})+\Delta\boldsymbol{V}_{g/\mathrm{cor}m} \quad (20)$$

式中除时延速度误差 $\Delta\boldsymbol{V}_{\tau m}$ 外，其它各符号的含义可参见文献[4]。

4 试验验证

利用某型号惯性级的光纤陀螺捷联惯导系统做试验验证，其中陀螺零偏稳定性 0.01(°)/h，加速度计逐次启动零偏重复性 $5\times10^{-5}g$，采样周期 5ms，惯导姿态和速度解算均采用二子样算法，在惯导算法中已经进行了内杆臂误差补偿和旋转效应误差补偿。将惯导系统安装在三轴速率转台上，惯导系统的 $x^by^bz^b$ 三轴初始方向分别近似指向 ENU 地理方向。先进行 10min 的静基座初始对准，姿态对准结果为俯仰角 $\theta=0.012°$、横滚角 $\gamma=0.015°$ 和方位角 $\psi=-0.236°$，完成初始对准之后进入纯惯性导航状态并开启转台绕 oy^b 轴旋转 9 圈，每一圈之间转台暂停 1min，旋转时各圈依次标识为 A ~ I，各圈旋转角速率设置见表 2。

表 2 旋转角速率设置及导航东向速度误差

Table 2 Angular rate settings and eastern velocity errors

各圈标示	角速率/(°/s)	速度误差变化量/(m/s)	
		测量值	均值
A	1	0.161	
B	2	0.185	
C	5	0.180	
D	10	0.169	
E	20	0.159	0.162
F	30	0.156	
G	40	0.156	
H	50	0.151	
I	60	0.147	

未做加速度计时延误差补偿前，纯惯性导航算法的东向速度误差如图 3 中实线所示(北向和天向速度误差变化不明显，不再给出和分析)，每旋转一圈前后的速度误差变化量见表 2 的第三列，统计这 9 个误差变化量的均值为 0.162m/s，再通过式(10)计算得加速度计的时延参数 $\tau=0.0026$s。

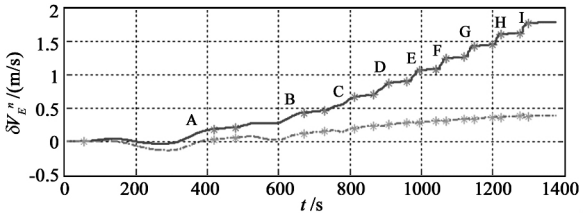


图 3 加速度计时延补偿前后的导航东向速度误差

Fig. 3 Eastern velocity errors before and after accelerometer time-delay compensation

在算法中引入加速度计时延参数补偿之后，重新利用上述试验的原始数据进行惯性导航解算，东向速度误差如图 3 中点划线所示。通过对比容易看出，经过时延补偿之后速度误差在每一圈旋转前后的变化量“台阶”都明显减小了，说明了加速度计延时补偿的有效性。

从图 3 还可以看出，速度误差在旋转的 A 圈和 B 圈中波动较大，这主要是由于导航时间较长和交叉耦合标定误差等因素引起的，但交叉耦合引起的速度误差在转动一圈之后大部分会相互抵消。综合分析可知，辨识时延参数时选择角速率大小为 10 ~ 20(°)/s 是比较合适的。

5 结 论

在实际捷联惯导系统(SINS)中，陀螺和加速度计两者之间的传递函数频率特性(这里主要关注相频特性)并非完全一致，将导致角速率和比力信息测量的时延不同，所以，特别在角动态环境下，由陀螺建立的数学平台坐标系与由加速度计测量的比力坐标系可能不完全重合，容易引起比力分解以及导航速度解算误差。与加速度计频率特性的单表级测试方法不同，本文从惯导系统的系统测试角度提出了辨识加速度计时延参数的方法，从导航速度误差中计算出时延参数，试验操作和数据处理方法都非常简单方便。文中还进行了试验验证，结果表明加速度计的时延补偿提高了导航速度精度，同时也验证了理论分析的正确性。

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参 考 文 献

[1] Miller R B. A new strapdown attitude algorithm [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1983, 6(4): 287 – 291.

[2] Park C G, Kim K J, Lee J G, et al. Formalized approach to obtaining optimal coefficients for coning algorithms [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(1): 165 – 168.

[3] Savage P G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design, part Ⅱ: velocity and position algorithm [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(2): 208 – 221.

[4] 秦永元. 惯性导航 [M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[5] 严恭敏, 周琪, 翁浚, 等. 捷联惯导系统内杆臂补偿方法及试验验证 [J]. 宇航学报, 2012, 33(1): 62 – 67. [Yan Gong-min, Zhou Qi, Weng Jun, et al. Inner lever arm compensation and its test verification for SINS [J]. Journal of Astronautics, 2012, 33(1): 62 – 67.]

[6] 吴铁军, 马龙华, 李忠涛. 应用捷联惯导系统分析 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2011.

[7] 严恭敏, 严卫生, 徐德民, 等. 激光陀螺捷联惯导系统中整周期采样的修正研究 [J]. 传感技术学报, 2008, 21(6): 998 – 1001. [Yan Gong-min, Yan Wei-sheng, Xu De-min, et al. Correction study on dithered laser gyro whole cycle sampling demodulation in SINS [J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2008, 21(6): 998 – 1001.]

[8] Mark J G, Tazartes D A. Tuning of coning algorithms to gyro data frequency response characteristics [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2001, 24(4): 641 – 647.

[9] Slusar V M. Extension of navigation sculling-algorithms design for frequency shaped IMU data [J]. Gyroscopy and Navigation, 2005, 48(1): 30 – 42.

[10] 潘献飞, 吴文启, 吴美平. 考虑信号处理特性的划摇算法优化 [J]. 中国惯性技术学报, 2007, 15(5): 536 – 541. [Pan Xian-fei, Wu Wen-qi, Wu Mei-ping. Optimization of sculling algorithms considering the signal process characteristics [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2007, 15(5): 536 – 541.]

[11] 刘润, 蔡体菁, 丁昊. 高精度石英挠性加速度计闭环系统的设计与分析 [J]. 东南大学学报, 2010, 40(2): 311 – 315. [Liu Run, Cai Ti-jing, Ding Hao. Design and analysis of closed-loop system of high resolution flexure pendulum accelerometer [J]. Journal of Southeast University, 2010, 40(2): 311 – 315.]

[12] 吴衍记, 刘淑荣. 数字闭环光纤陀螺频率特性分析与测试 [J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(6): 730 – 734. [Wu Yan-ji, Liu Shu-rong. Testing and analyzing for frequency characteristics of digital closed-loop FOG [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(6): 730 – 734.]

[13] 王妍, 张春熹. 数字闭环光纤陀螺动态特性测试研究 [J]. 北京航空航天大学学报, 2004, 30(9): 818 – 821. [Wang Yan, Zhang Chun-xi. Investigation of testing dynamic characteristics of digital closed loop fiber optic gyroscope [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2004, 30(9): 818 – 821.]

[14] 杨振宇, 沈毅, 刘志言. 力平衡加速度计在线动态测试及其传递函数辨识 [J]. 传感器与微系统, 2006, 25(10): 25 – 27. [Yang Zhen-yu, Shen Yi, Liu Zhi-yan. On-line dynamic testing and transform functions identification for force balance accelerometer [J]. Transducer and Microsystem Technologies, 2006, 25(10): 25 – 27.]

[15] 王平, 赵新民, 段尚枢, 等. 加速度传感器电激励等价性测试方法的研究 [J]. 计量学报, 1994, 15(3): 188 – 192. [Wang Ping, Zhao Xin-min, Duan Shang-shu, et al. Research on the equivalent test method of acceleration transducer with electrical stimulation [J]. Acta Metrologica Sinica, 1994, 15(3): 188 – 192.]

作者简介:

严恭敏(1977 –),男,副教授,博士,主要从事惯性导航与信息融合理论研究。

通信地址: 陕西省西安市西北工业大学 183 号信箱(710072)

电话: (029) 88431369

E-mail: yangongmin@163.com

(编辑: 曹亚君)

?1994-2014 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Chapter 68
High-Precision Simulator for Strapdown Inertial Navigation Systems Based on Real Dynamics from GNSS and IMU Integration

Gongmin Yan, Jinling Wang and Xinyi Zhou

Abstract Traditional Strapdown Inertial Navigation Systems (SINS) simulator based on pure mathematical model cannot reflect the reality of complex dynamics of a carrier. In this paper, based on the actual flight data of an airborne navigation system, navigation algorithms of high-precision carrier phase differences Global Navigation Satellite System (GNSS) and medium-precision Inertial Measurement Unit (IMU) are used, and combined with the partial feedback principle of Kalman filter and cubic spline interpolation method, to generate smooth trajectory parameters. Then, the simulation of inertial sensors is achieved with the inversed SINS algorithm, and the new algorithm considers the impacts of attitude coning error and velocity sculling error compensation. Numerical verifications of airborne flight test have demonstrated that the inertial sensor simulator has high accuracy and good frequency characteristic, and can meet the high-accuracy SINS requirements for simulated inertial sensor data source and frequency complexity.

Keywords GNSS · SINS simulator · Integrated navigation · Actual flight data

68.1 Introduction

For the simulated research of Strapdown Inertial Navigation Systems (SINS) and its integration with other systems, it is a fundamental step to obtain the carrier's trajectory parameters and the simulation outputs of inertial sensors (including

G. Yan (✉) · X. Zhou
School of Automation, Northwestern Polytechnical University,
Youyi West Rd, Xi'an 710072, Shaanxi, China
e-mail: yangongmin@163.com

J. Wang
School of Civil and Environment Engineering,
UNSW (University of New South Wales), Sydney NSW 2052, Australia
e-mail: jinling.wang@unsw.edu.au

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2015

J. Sun et al. (eds.), *China Satellite Navigation Conference (CSNC) 2015 Proceedings: Volume III*, Lecture Notes in Electrical Engineering 342,
DOI 10.1007/978-3-662-46632-2_68

gyroscopes and accelerometers). Especially for the research of high-accuracy SINS algorithms, high precision dynamic simulation for a carrier is critical [1]. In the simulation of airborne SINS, for example, traditional trajectory simulator based on pure mathematical model can only provide the carrier's simple maneuvers, including still, accelerate, climb, cruise, twists and turns, and the integration of these flight maneuvers. The above trajectory form is too simple and thus, cannot reflect the reality of complex dynamics of a carrier. However, if the impact of the pneumatic environment of the carrier aircraft is considered, physical and mathematical models are often too complex to be described. Actually, more or less, there still remains some difference between ideal model and the actual flight situation [2].

In this paper, based on the actual flight data of inertial sensors, the integrated navigation algorithms of high-precision carrier phase differences Global Navigation Satellite System (GNSS) and medium-precision Inertial Measurement Unit (IMU) are used, combined with the partial feedback principle of Kalman filter and cubic spline interpolation method, to generate smooth trajectory parameters, i.e. attitude, velocity and positioning information. The incremental outputs of inertial sensors are inversely deduced from attitude, velocity and positioning information with the use of traditional high-precision SINS updating algorithm [3–5], which can be called as inversed SINS algorithm, and the new algorithm considers the impacts of attitude coning error and velocity sculling error compensation. Then, the simulated outputs of inertial sensors are achieved with the inversed SINS algorithm. Numerical verifications and comparison analysis using airborne flight experiment have demonstrated that the simulated outputs of inertial sensors have high navigation accuracies, and such accuracies are only limited by the numerical calculation error. The power spectrum of simulated outputs and actual outputs are basically the same in the low-frequency band, indicating that simulated outputs can properly reflect the dynamic environment characteristics of the carrier flights.

68.2 Traditional Strapdown Inertial Navigation Algorithms

68.2.1 SINS Differential Equations

Firstly, some coordinate frames are briefly introduced: the *i*-frame as inertial coordinate frame, the *e*-frame as earth coordinate frame, the *n*-frame as 'East-North-Up' SINS navigation frame and the *b*-system as 'Right-Forward-Up' body frame.

SINS navigation algorithms consist of a set of differential equations, i.e. attitude, velocity and position differential equation, respectively, as

$$\dot{\boldsymbol{C}}_b^n = \boldsymbol{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b\times) \tag{68.1}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n = \boldsymbol{C}_b^n\boldsymbol{f}_{sf}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n)\times\boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{g}^n \tag{68.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{M}_{pv}\boldsymbol{v}^n \tag{68.3}$$

where:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\boldsymbol{C}_b^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_{in}^n, \quad \boldsymbol{\omega}_{in}^n = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n,\\
&\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = [\,0 \quad \omega_{ie}\cos L \quad \omega_{ie}\sin L\,]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \left[\,-\frac{v_N^n}{R_{Mh}} \quad \frac{v_E^n}{R_{Nh}} \quad \frac{v_E^n}{R_{Nh}}\tan L\,\right]^{\mathrm{T}},\\
&\boldsymbol{M}_{pv} = \mathrm{diag}(\,\sec L/R_{Nh} \quad 1/R_{Mh} \quad 1\,), \quad R_{Mh} = R_M + h,\ R_{Nh} = R_N + h,\\
&R_M = \frac{R_N(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 L)}, \quad R_N = \frac{R_e}{(1-e^2\sin^2 L)^{1/2}},\ e = \sqrt{2f - f^2},\\
&\boldsymbol{g}^n = [\,0 \quad 0 \quad -g\,]^{\mathrm{T}}, \quad g = g_0(1 + \beta_1\sin^2 L + \beta_2\sin^4 L) - \beta_3 h,
\end{aligned}$$

and where:

$\boldsymbol{C}_b^n$: transformation DCM (Direct Cosine Matrix) from the b-frame to the n-frame, i.e. SINS attitude matrix;

$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$, $\boldsymbol{f}_{sf}^b$: gyro sensed angular rate and accelerometer sensed specific force, respectively;

$\boldsymbol{v}^n = [\,v_E^n \quad v_N^n \quad v_U^n\,]^{\mathrm{T}}$: inertial navigation velocity expressed in the n-frame and v_E^n, v_N^n, v_U^n denoting velocity along east, north and up-vertical direction;

$\boldsymbol{p} = [\,\lambda \quad L \quad h\,]^{\mathrm{T}}$: SINS positioning vector and λ, L, h being longitude, latitude and altitude above the mean sea level;

R_e, f: the Earth's semi-major axis and flattening, which are R_e = 6,378,137 m and f = 1/298.257;

ω_{ie}, g_0: the Earth's angular rate and gravity magnitude at the equatorial sea-surface, which are $\omega_{ie} = 7.2921151467 \times 10^{-5}$(rad/s) and g_0 = 9.7803267714 (m/s^2);

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$: gravity magnitude coefficients related with latitude and altitude above sea level, respectively, as $\beta_1 = 5.27094 \times 10^{-3}$, $\beta_2 = 2.32718 \times 10^{-5}$ and $\beta_3 = 2g_0/R_e = 3.086 \times 10^{-6}$ (s^{-2}).

68.2.2 SINS Updating Algorithms

SINS updating algorithms, a type of dead reckoning algorithms, recursively calculate navigation information at the current moment (at time t_m) from given attitude, velocity and positioning at the previous moment (at time t_{m-1}) and the inertial sensors' outputs within the updating interval. The SINS updating interval is denoted as $T_m = t_m - t_{m-1}$. In this paper, it is assumed that the gyro sampling output is angular increment and the accelerometer output is velocity increment, and high-precision inertial navigation system always uses this type of sampling method.

For the high-precision of SINS updating algorithms and the convenience of the derivation of the inversed algorithm, the key points of SINS updating algorithms will be given with the use of 'one sample plus previous sample' error compensation method as follows [3–6].

68.2.2.1 Attitude Updating

Using the chain rule of DCM production, $\boldsymbol{C}_b^n$ at time t_m, i.e. $\boldsymbol{C}_{b_m}^{n_m}$, can be constructed as

$$\boldsymbol{C}_{b_m}^{n_m} = \boldsymbol{C}_{n_{m-1}}^{n_m}\boldsymbol{C}_{b_{m-1}}^{n_{m-1}}\boldsymbol{C}_{b_m}^{b_{m-1}} \tag{68.4}$$

where

$\boldsymbol{C}_{b_{m-1}}^{n_{m-1}}$ is the DCM at time t_{m-1};

$\boldsymbol{C}_{n_{m-1}}^{n_m}$ is the transformation matrix from the i-frame to the n-frame within updating interval T_m, which can be determined by the rotation vector $\boldsymbol{\varsigma}_m = -\boldsymbol{\omega}_{in,m-1/2}^n T_m$ and the formula is given by Eq. (68.6). Note that the subscript $m-1/2$ denotes the middle time of $[t_{m-1}, t_m]$, i.e. time $t_m - T_m/2$ and short for $t_{m-1/2}$. The Related parameters at time $t_{m-1/2}$ can be estimated by linear extrapolation algorithm, such as $L_{m-1/2} = L_{m-1} + (L_{m-1} - L_{m-2})/2$;

$\boldsymbol{C}_{b_m}^{b_{m-1}}$ is determined by rotation vector $\boldsymbol{\Phi}_m$, which is also given by Eq. (68.6). Consider the rotation vector coning compensation and use the 'one- plus-previous sample' gyro angular increment compensation algorithm, we have

$$\boldsymbol{\Phi}_m = \boldsymbol{\Delta\theta}_m + 1/12 \cdot \boldsymbol{\Delta\theta}_{m-1} \times \boldsymbol{\Delta\theta}_m \tag{68.5}$$

where $\boldsymbol{\Delta\theta}_{m-1}$, $\boldsymbol{\Delta\theta}_m$ are gyro angular increments within time interval $[t_{m-2}, t_{m-1}]$ and $[t_{m-1}, t_m]$, such that $\boldsymbol{\Delta\theta}_m = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \omega_{ib}^b \mathrm{d}t$.

The relationship between DCM $\boldsymbol{C}$ and rotation vector $\boldsymbol{V}$ is given by

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}_{3\times 3} + \frac{\sin|\boldsymbol{\Phi}|}{|\boldsymbol{\Phi}|}(\boldsymbol{\Phi}\times) + \frac{1-\cos^2|\boldsymbol{\Phi}|}{|\boldsymbol{\Phi}|^2}(\boldsymbol{\Phi}\times)^2 \tag{68.6}$$

68.2.2.2 Velocity Updating

SINS velocity v_m^n at time t_m is recursively calculated from velocity $\boldsymbol{v}_{m-1}^n$ at time t_{m-1}, as

$$\boldsymbol{v}_m^n = \boldsymbol{v}_{m-1}^n + C_{n_{m-1}}^{n_{m-1/2}} C_{b_{m-1}}^{n_{m-1}} \Delta\boldsymbol{v}_{sf,m}^{b_{m-1}} + \Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,m}^n \tag{68.7}$$

$$\boldsymbol{\Delta v}_{sf,m}^{b_{m-1}} = \boldsymbol{\Delta v}_m + \boldsymbol{\Delta v}_{rot,m} + \boldsymbol{\Delta v}_{scull,m} \tag{68.8}$$

$$\boldsymbol{\Delta v}_{g/cor,m}^n = [g_{m-1/2}^n - (2\omega_{ie,m-1/2}^n + \omega_{en,m-1/2}^n) \times \boldsymbol{v}_{m-1/2}^n]T_m \tag{68.9}$$

$\boldsymbol{C}_{n_{m-1}}^{n_{m-1/2}}$ in Eq. (68.7) is determined by rotation vector $\boldsymbol{\varsigma}_m/2$, which is similar to the calculation formula of $\boldsymbol{C}_{n_{m-1}}^{n_m}$ in attitude updating. Consider the velocity sculling

compensation and also use the algorithm of 'one-plus-previous sample' gyro angular and accelerometer velocity increment compensation, then in Eq. (68.8) we have

$$\Delta \boldsymbol{v}_{rot,m} = 1/2 \cdot \Delta \boldsymbol{\theta}_m \times \Delta \boldsymbol{v}_m \tag{68.10}$$

$$\Delta \mathbf{v}_{scull,m} = 1/12 \cdot (\Delta \boldsymbol{\theta}_{m-1} \times \Delta \boldsymbol{v}_m + \Delta \boldsymbol{v}_{m-1} \times \Delta \boldsymbol{\theta}_m) \tag{68.11}$$

where $\Delta \boldsymbol{v}_{m-1}$, $\Delta \boldsymbol{v}_m$ are the accelerometer specific increments within the time interval $[t_{m-2}, t_{m-1}]$ and $[t_{m-1}, t_m]$, i.e. $\Delta \boldsymbol{v}_m = \int_{t_{m-1}}^{t_m} f_{sf}^b \mathrm{d}t$.

68.2.2.3 Position Updating

After navigation velocity $\boldsymbol{v}_m^n$ updating, position p_m at time t_m can be recursively calculated from position p_{m-1} at previous time t_{m-1}, as

$$p_m = p_{m-1} + M_{pv,m-1/2}(\boldsymbol{v}_{m-1}^n + \boldsymbol{v}_m^n)T_m/2 \tag{68.12}$$

In Eqs. (68.9) and (68.10), $g_{m-1/2}^n, \omega_{ie,m-1/2}^n, \omega_{en,m-1/2}^n, \boldsymbol{v}_{m-1/2}^n, M_{pv,m-1/2}$ denote related calculating values at time $t_{m-1/2}$, which can also be calculated by liner extrapolation method with the navigation parameters at time t_{m-2} and t_{m-1}.

68.3 GNSS/SINS Integrated Navigation

68.3.1 GNSS/SINS Integrated Kalman Filter

The positioning accuracy of GNSS can reach centimeter level, and the carrier may experience severe maneuvers and high speed. Thus, for the navigation systems integrating of high-accuracy GNSS carrier phases and SINS, we must consider the impact of the installation lever arm error $\boldsymbol{\delta l}$ and time synchronization error δt between GNSS and SINS. A 19-dimension GNSS/SINS integrated Kalman filter is established, and the state vector and filter equations are listed respectively below:

$$x = [\boldsymbol{\phi} \;\; \boldsymbol{\delta v}^n \;\; \boldsymbol{\delta} p \;\; \varepsilon^b \;\; \nabla^b \;\; \boldsymbol{\delta l} \;\; \delta t]^{\mathrm{T}} \tag{68.13}$$

$$\dot{x} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{w} \tag{68.14}$$

$$z = \boldsymbol{p}_{SINS} - \boldsymbol{p}_{GNSS} = Hx + \boldsymbol{v} \tag{68.15}$$

Given the limited space here, please refer to Refs. [6, 7] for the symbols and the system description details.

68.3.2 The Partial Feedback Principle of Kalman Filter

In order to minimize inertial navigation system errors, that is to keep the linear of the navigation error equation and improve the accuracy of filter model, the Kalman filter state estimation should constantly feed back to inertial navigation system and correct the navigation errors. For the traditional feedback method, some states are chosen from Kalman filter and feed back to the navigation system at a time, then navigation parameters are modified and all of the feedback states are reset to zero. However, the traditional all-feedback method may easily lead to navigation outputs being severe serrated, and then affect the results of inversed SINS algorithm, which leads to large intermittent pulse distortion for inertial simulator. In order to avoid the negative affect of the all-feedback method, the partial feedback principle for Kalman filter is put forward. The state partial feedback and longitude error modification, for example, can be written respectively as

$$\lambda_m = \hat{\lambda}_m - (1-\alpha)\cdot\hat{x}_7 \tag{68.16}$$

$$\hat{x}_7^- = \alpha\cdot\hat{x}_7 \tag{68.17}$$

$$\alpha = \exp(-T_m/\tau) \tag{68.18}$$

where $\hat{\lambda}_m$ is longitude in the SINS updating algorithm, λ_m is longitude output after partial feedback, and the latter always has higher precision than the former; $\hat{x}_7$ is longitude error estimation of the Kalman filter, $\hat{x}_7^-$ is the residual estimation after partial feedback, and the latter can be used to the subsequent partial feedback or as the filter initial value in the next filtering step; α is the weight coefficient for modification. Equation (68.18) shows that the weight coefficient α can be determined by a delay time parameter τ, and the larger the τ, the smoother the navigation parameter outputs. Obviously, if $\alpha = 0$, then it indicates an all-feedback method.

The measurement updating interval of GNSS/SINS integration is generally much larger than the updating interval T_m in SINS. However, if the feedback interval is consistent with SINS updating interval and the all-feedback method is used, smoother navigation parameter outputs will be achieved, and then a more realistic trajectory will be provided to the inversed navigation simulator. Surely, two filter or smoothing algorithms can also be used to further improve the accuracy of trajectory parameters [8].

68.4 Inversed SINS Algorithms

The inversed SINS algorithm can be seen as a reverse processing problem of traditional SINS updating algorithm. In the inversed algorithm, assuming that the attitude angular and positioning information are given, one for angular motion

information and another for liner motion, then gyro angular increment and accelerometer velocity increment are inversely achieved by the transformation of traditional SINS updating algorithm to realize high-precision simulation of the inertial sensor. The key points of the inversed SINS algorithm are described as follows.

68.4.1 Cubic Spline Fitting for Attitude and Position

Taking the longitude in position vector for example, fit the longitude sequence of integrated navigation output $\ldots, \lambda_{m-1}, \lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots$ as piece-wise continuous cubic spline. Assume the cubic spline fitting equation at the time interval $t \in [t_{m-1}, t_m]$ to be

$$\lambda(t) = a_{m0} + a_{m1}t + a_{m2}t^2 + a_{m3}t^3 \tag{68.19}$$

where $a_{m0}, a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}$ are spline fitting coefficients.

The relationship between longitude and navigation east velocity is

$$\dot{\lambda}(t) = \sec L_{m-1/2}/R_{Nh,m-1/2} \cdot v_E^n(t) \tag{68.20}$$

Generally, the interval $[t_{m-1}, t_m]$ is very small, so $L(t)$ and $R_{Nh}(t)$ can be chosen as the values at time $t_{m-1/2}$ in Eq. (68.20). As the position function is known, $L_{m-1/2}$ can be achieved exactly by spline interpolation. While in the traditional SINS updating algorithm, an estimation of liner extrapolation is always used to get $L_{m-1/2}$.

Rearranging Eq. (68.20) and by the substitution of Eq. (68.19) into Eq. (68.20), the east velocity is achieved as

$$\begin{aligned} v_E^n(t) &= R_{Nh,m-1/2} \cos L_{m-1/2} \cdot \dot{\lambda}(t) \\ &= R_{Nh,m-1/2} \cos L_{m-1/2} \cdot (a_{m1} + 2a_{m2}t + 3a_{m3}t^2) \end{aligned} \tag{68.21}$$

Similarly, the north and up-vertical velocities can be achieved respectively by latitude and altitude calculation, then the position function $\boldsymbol{p}(t)$ and velocity function $\boldsymbol{v}^n(t)$ at any continuous time can be achieved. Also, if the Euler angle is manipulated by the same method, the Euler angle piece-wise fitting function can be derived, denoted as $\boldsymbol{A}(t)$. Note that special treatment is needed when there exists some singular points in attitude Euler angles.

68.4.2 Gyro Angular Increment Simulation

Assuming that the inertial sensor calculation interval in the inversed SINS algorithm is $T_k = t_k - t_{k-1}$, it may be different from T_m, always smaller than T_m, and the smaller T_k, the higher the calculation precision.

Take T_k as equal sampling time interval, then attitude angular sequence $\boldsymbol{A}_k$ can be achieved by the interpolation of angular function $\boldsymbol{A}(t)$, where $\boldsymbol{A}_k$ is equivalent to the attitude transformation matrix $\boldsymbol{C}_{b_k}^{n_k}$. By changing the time subscript from m to k and rearranging Eq. (68.4), the following relationship is established:

$$\boldsymbol{C}_{b_k}^{b_{k-1}} = (\boldsymbol{C}_{n_{k-1}}^{n_k}\boldsymbol{C}_{b_{k-1}}^{n_{k-1}})^{-1}\boldsymbol{C}_{b_k}^{n_k} \tag{68.22}$$

where $\boldsymbol{C}_{n_{k-1}}^{n_k}$ is determined by $\varsigma_k = -\omega_{in,k-1/2}^{n}T_k$. As velocity and position function are known, $\omega_{in,k-1/2}^{n}$ can be obtained accurately by spline interpolation.

By Eq. (68.6), the rotation vector $\boldsymbol{\Phi}_k$ can be inversely derived by the transformation matrix $\boldsymbol{C}_{b_k}^{b_{k-1}}$, then by Eq. (68.5), gyro angular increment can be obtained, as

$$\boldsymbol{\Delta\theta}_k = (I_{3\times3} + 1/12\cdot\boldsymbol{\Delta\theta}_{k-1}\times)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_k \approx \boldsymbol{\Phi}_k - 1/12\cdot\boldsymbol{\Delta\theta}_{k-1}\times\boldsymbol{\Phi}_k \tag{68.23}$$

In the initialization of the inversed SINS algorithm, it can be assumed that $\boldsymbol{\Delta\theta}_0 = 0$.

68.4.3 Accelerometer Velocity Increment Simulation

Also T_k is taken as sampling time interval, the interpolation of velocity cubic spline $\boldsymbol{v}^n(t)$ will lead to velocity sequence $\boldsymbol{v}_k^n$. By rearranging Eq. (68.7), we have

$$\boldsymbol{\Delta v}_{sf,k}^{b_{k-1}} = (\boldsymbol{C}_{n_{k-1}}^{n_{k-1/2}}\boldsymbol{C}_{b_{k-1}}^{n_{k-1}})^{-1}(\boldsymbol{v}_k^n - \boldsymbol{v}_{k-1}^n - \boldsymbol{\Delta v}_{g/cor,k}^n) \tag{68.24}$$

where the calculation of $\boldsymbol{C}_{n_{k-1}}^{n_{k-1/2}}$ and $\boldsymbol{\Delta v}_{g/cor,k}^n$ is not so complex, with no more repeat here.

In addition, substitute Eqs. (68.10) and (68.11) into Eq. (68.8), we get

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta v}_{sf,k}^{b_{k-1}} &= \boldsymbol{\Delta v}_k + 1/2\cdot\boldsymbol{\Delta\theta}_k\times\boldsymbol{\Delta v}_k + 1/12\cdot(\boldsymbol{\Delta\theta}_{k-1}\times\boldsymbol{\Delta v}_k + \boldsymbol{\Delta v}_{k-1}\times\boldsymbol{\Delta\theta}_k)\\ &= 1/12\cdot\boldsymbol{\Delta v}_{k-1}\times\boldsymbol{\Delta\theta}_k + [I_{3\times3} + (1/2\cdot\boldsymbol{\Delta\theta}_k + 1/12\cdot\boldsymbol{\Delta\theta}_{k-1})\times]\boldsymbol{\Delta v}_k\end{aligned} \tag{68.25}$$

By rearranging Eq. (68.25), it leads to

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta v}_k &= [I_{3\times3} + (1/2\cdot\boldsymbol{\Delta\theta}_k + 1/12\cdot\boldsymbol{\Delta\theta}_{k-1})\times]^{-1}(\boldsymbol{\Delta v}_{sf,k}^{b_{k-1}} - 1/12\cdot\boldsymbol{\Delta v}_{k-1}\times\boldsymbol{\Delta\theta}_k)\\ &\approx \boldsymbol{\Delta v}_{sf,k}^{b_{k-1}} - 1/2\cdot\boldsymbol{\Delta\theta}_k\times\boldsymbol{\Delta v}_{sf,m}^{b_{k-1}} - 1/12\cdot(\boldsymbol{\Delta\theta}_{k-1}\times{}^{b_{k-1}}_{sf,k} + \boldsymbol{\Delta v}_{k-1}\times\boldsymbol{\Delta\theta}_k)\end{aligned} \tag{68.26}$$

Here, it's also assumed that $\boldsymbol{\Delta v}_0 = 0$. Now, the accelerometer velocity increment can be obtained by Eqs. (68.24) and (68.26), and then the simulation of inertial sensor is fully completed.

68.5 Testing Data Processing and Analysis

In this section, we provide a set of airborne navigation testing data, with a gyro constant drift of about 0.03 arcdeg/h and accelerometer bias of about 200ug for SINS and positioning accuracy of 5 cm for carrier phase based GPS RTK. The SINS raw data output rate is 200 Hz, while the GPS position output rate is 1 Hz. The 1 h flight profile consists of several stages, including preparation in static base, take off and climb, turning, cruise and some specific operations in working area, which are shown in Fig. 68.1 with leveling longitude-latitude projection and '☆' marked as the start point.

The data processing scenario is described as follows.

1. Use two sub-sample attitude coning error and velocity sculling error compensation algorithm to update SINS and execute GPS/SINS integrated navigation Kalman filter. Meanwhile, SINS calculating errors are modified by partial feedback of state estimation from Kalman filter. The above processes can be well implemented by PSINS toolbox [9].
2. For 100 Hz integrated navigation attitude and position outputs, the cubic spline fittings are adopted to get piece-wise continuous trajectory descriptions $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{v}^n(t)$ and $\boldsymbol{p}(t)$.
3. For continuous $\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{v}^n(t)$ and $\boldsymbol{p}(t)$, 200 Hz equal interval interpolations are made to get discrete serials $\boldsymbol{A}_k$, $\mathbf{v}_k^n$ and $\mathbf{p}_k$.
4. The inversed SINS algorithm are used to simulate the inertial sensor sampling results $\boldsymbol{\Delta\theta}_k$ and $\boldsymbol{\Delta v}_k$. The power spectrum density (PSD) comparisons of the IMU raw sampling data and the simulated ones are shown in Fig. 68.2. Notice that only x-axis gyro and x-axis accelerometer PSD results within 1000 s-1100 s are displayed, and the PSDs of other axis and time interval are similar then with no more showing.
5. Also based on two sub-sample error compensation algorithms, inertial sensor simulated samples $\boldsymbol{\Delta\theta}_k$ and $\boldsymbol{\Delta v}_k$ are used to update pure SINS with altitude

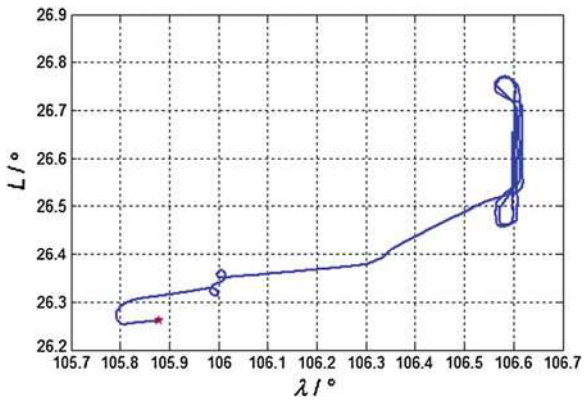


Fig. 68.1 Leveling projection for airborne flight profile

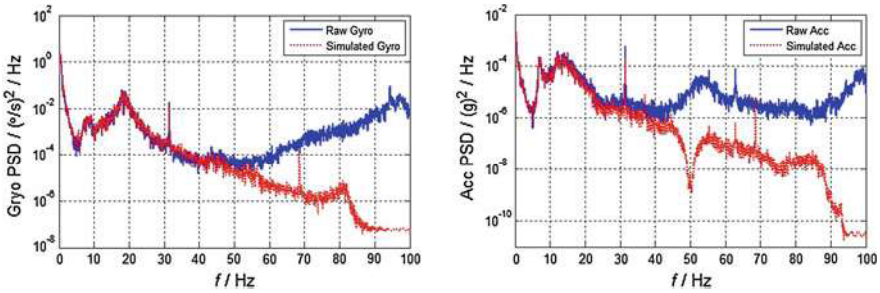


Fig. 68.2 PSD comparison for IMU raw data and simulated sampling data

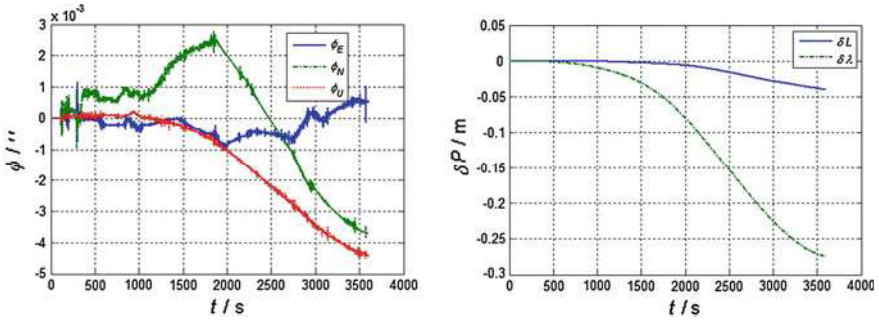


Fig. 68.3 SINS attitude and position errors based on simulated sampling data

damping. The attitude and position comparisons for pure SINS and integrated navigation outputs from step 1 are shown in Fig. 68.3.

Figure 68.2 demonstrates that the PSD of IMU raw sampling date well coincides with that of simulated sampling data in low frequency band, and it reveals that the inertial sensor simulator can simulate the airborne flight characteristic. Figure 68.3 shows the simulated sampling data is of high accuracy, with attitude error of 0.001arcsec and position error of 0.1 m within 1 h pure SINS.

68.6 Conclusions

Based on traditional high-accuracy SINS numerical updating algorithm, whose attitude, velocity and position navigation outputs are updated by inertial sensor sampling data, the inversed SINS algorithms are proposed by using attitude and position information to reversely produce simulated sampling data for inertial sensor simulator. For actual airborne flight navigation testing data, the techniques of GNSS integrated Kalman filtering and SINS error modification by partial feedback

are applied to improve navigation accuracy and get smooth trajectory parameters, which are essential for a high precision inertial sensor simulator. The testing data processing reveals that the simulator can reach a positioning accuracy of about 0.1 m within 1 h standalone SINS, which meets the high-accuracy SINS requirements for inertial sensor simulated data source. Hopefully, further decrease of simulated errors can be made by improving the simulator updating frequency. If higher frequency coincidence between IMU raw data and simulated sampling data is demanded, the increasing of the sampling frequency for raw data or using single-sample SINS updating algorithm can be applicable.

Furthermore, when using high-accuracy simulated sampling data for specific navigation task, the sensor's errors, such as stochastic errors and misalignment errors, can be modeled and added into the ideal data to implement more complex inertial navigation or integrated navigation simulations.

References

1. James H, Robert G (2014) Radio Astro Inertial Doppler Error Simulator. http://www.industrycortex.com. Accessed 20 Dec 2014
2. GPSoft LCC. Inertial Navigation System Toolbox 3.0 for Matlab User's Guide. http://gpsoftnav.com. Accessed 20 Dec 2014
3. Paul GS (1998) Strapdown inertial navigation integration algorithm design Part 1: attitude algorithms. J Guid Control Dyn 21(1):19–28
4. Paul GS (1998) Strapd-n Part 2: velocity and position algorithms. J Guid Control Dyn 21 (2):208–221
5. Yuanxin W, Jinling W, Dewen H (2014) A new technique for INS/GNSS attitude and parameter estimation using online optimization. IEEE Trans Signal Process 62(10):2642–2655
6. Gongmin Y (2006) Research on vehicular position and orientation system. Ph.D thesis, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, China
7. Chunlian Z (2014) Research on precise POS navigation algorithm in aerial photogramme try. Master thesis, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, China
8. Wanliang H, Fuping S, Jianyong C, Po C (2013) Application of two-filter smoothing to GNSS/INS integrated navigation system. In: The 4th China satellite navigation conference
9. Gongmin Y. Precise Strapdown Inertial Navigation System (PSINS) Toolbox for Matlab. http://blog.sina.com.cn/s/blog_40edfdc90101heg0.html. Accessed 20 Dec 2014

引文格式:严恭敏,WANG Jinling,周馨怡. 基于实测轨迹的高精度捷联惯导模拟器[J]. 导航定位学报,2015,3(4):27-31,37. YAN Gongmin, WANG Jinling, ZHOU Xinyi. High-Precision Simulator for Strapdown Inertial Navigation Systems Based on Real Dynamics[J]. Journal of Navigation and Positioning, 2015, 3(4): 27-31, 37. DOI: 10.16547/j.cnki.10-1096.20150406

基于实测轨迹的高精度捷联惯导模拟器

严恭敏[1], WANG Jinling[2], 周馨怡[1]

(1. 西北工业大学 自动化学院, 西安 710072;
2. School of Civil and Environment Engineering, University of New South Wales, Sydney, NSW 2052, Australia)

摘要: 针对传统的纯数学模型 SINS 惯性器件模拟器仿真效果不够逼真的问题, 本文提出了一种基于已有的真实导航系统飞行记录数据的惯性器件模拟器方法。该方法利用高精度载波相位差分 GNSS 与中等精度 IMU 融合的组合导航算法, 结合 Kalman 滤波的部分反馈修正和三次样条拟合方法, 生成平滑的轨迹参数, 再通过推导 SINS 反演算法实现了惯性器件的模拟采样仿真, 反演算法中充分考虑了姿态圆锥误差和速度划船误差的补偿。通过机载飞行实验数据验证, 结果表明所提惯性器件模拟器具有极高的精度性能和良好的频率特性, 满足高精度 SINS 对数据源仿真精度和频率复杂性的要求。

关键词: GNSS; SINS 模拟器; 组合导航; 实际飞行数据

中图分类号: V249.3　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 2095-4999(2015)-04-0027-05

High-Precision Simulator for Strapdown Inertial Navigation Systems Based on Real Dynamics

YAN Gongmin[1], *WANG Jinling*[2], *ZHOU Xinyi*[1]

(1. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. School of Civil and Environment Engineering, University of New South Wales, Sydney 2052, Australia)

Abstract: Traditional strapdown inertial navigation systems (SINS) simulator based on pure mathematical model cannot reflect the reality of complex dynamics of a carrier. In this paper, based on the actual flight data of an airborne navigation system, navigation algorithms of high-precision carrier phase differences global navigation satellite system (GNSS) and medium-precision inertial measurement unit (IMU) are used, and combined with the partial feedback principle of Kalman filter and cubic spline interpolation method, to generate smooth trajectory parameters. Then, the simulation of inertial sensors is achieved with the inversed SINS algorithm, and the new algorithm considers the impacts of attitude coning error and velocity sculling error compensation. Numerical verifications of airborne flight test have demonstrated that the inertial sensor simulator has high accuracy and good frequency characteristic, and can meet the high-accuracy SINS requirements for simulated inertial sensor data source and frequency complexity.

Key words: GNSS; SINS simulator; Integrated navigation; Actual flight data

0 引言

在惯性导航系统及其组合导航的仿真研究中, 运载体的运动轨迹参数和惯性器件(陀螺和加速度计)的数据源仿真是项基础性工作, 特别是研究高精度的捷联惯导系统(strapdown inertial navigation system, SINS)算法, 更是需要高精度的数据模拟器作为支撑[1]。以机载 SINS 仿真为例, 传统的基于纯数学模型的轨迹模拟器, 只能给出由静止、加速、爬升、巡航和盘旋转弯等简单飞行动作组合的载机运动轨迹, 运动形式过于简单, 效果不够逼真, 若要进一步考虑载机飞控特性和气动环境的影响, 物理和数学模型往往又过于复杂, 并且理想模型与实际飞行情况之间或多或少总会存

收稿日期: 2014-10-16

第一作者简介: 严恭敏(1977—), 福建建瓯人, 男, 博士, 副教授, 主要从事惯性导航与信息融合理论研究。

注: 本文于 2015 年 5 月在第六届中国卫星导航学术年会(CSNC2015)宣读过。

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

在一些差距[2]。

本文基于已有的真实导航传感器飞行记录数据，利用高精度载波相位差分全球卫星导航系统(global navigation satellite system，GNSS)与中等精度惯性测量单元(inertial measurement unit，IMU)融合的组合导航算法，结合卡尔曼(Kalman)滤波的部分反馈修正和三次样条函数拟合和插值方法，生成平滑的轨迹参数，即姿态、速度和位置信息。借助传统的高精度 SINS 数值更新算法[3-5]，推导了由姿态、速度和位置信息反向求解惯性器件增量采样输出的方法，称其为 SINS 反演算法，在反演算法中考虑了姿态圆锥误差和速度划船误差效应的影响，进行了相应误差的补偿。利用 SINS 反演算法实现了惯性器件的模拟采样输出。通过飞行实验数据验证和对比分析，惯性器件模拟采样输出具有很高的导航精度，其精度仅受限于数值算法的计算误差；惯性器件的模拟采样输出与原始真实采样输出在低频段的功率谱密度基本一致，说明了模拟采样输出能够较好地反映出载机的飞行环境特性。

1 传统的捷联惯导算法

1.1 捷联惯导系统微分方程

首先，简要说明文中涉及到的几个坐标系：惯性坐标系表示为 i 系，地球坐标系表示为 e 系，“东-北-天”导航坐标系为 n 系，“右-前-上”载体坐标系为 b 系。

SINS 导航算法包含一组微分方程，即姿态微分方程、速度微分方程和位置微分方程，可分别表示为[6]

$$\dot{\boldsymbol{C}}_b^n = \boldsymbol{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times) \tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n = \boldsymbol{C}_b^n \boldsymbol{f}_{sf}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{g}^n \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{M}_{pv}\boldsymbol{v}^n \tag{3}$$

式(1)～式(3)中：

$$\boldsymbol{\omega}_{nb}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b - (\boldsymbol{C}_b^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\omega}_{in}^n,\ \boldsymbol{\omega}_{in}^n = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = [0 \quad \omega_{ie}\cos L \quad \omega_{ie}\sin L]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\omega}_{en}^n = \left[-\frac{v_N^n}{R_{Mh}} \quad \frac{v_E^n}{R_{Nh}} \quad \frac{v_E^n}{R_{Nh}}\tan L\right]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{M}_{pv} = diag(\sec L/R_{Nh} \quad 1/R_{Mh} \quad 1),\quad R_{Mh} = R_M + h,\ R_{Nh} = R_N + h \tag{6}$$

$$R_M = \frac{R_N(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 L)},\quad R_N = \frac{R_e}{(1-e^2\sin^2 L)^{1/2}},\ e = \sqrt{2f-f^2} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{g}^n = [0 \quad 0 \quad -g]^{\mathrm{T}},\quad g = g_0(1+\beta_1\sin^2 L + \beta_2\sin^4 L) - \beta_3 h \tag{8}$$

式(4)～式(8)中，$\boldsymbol{C}_b^n$ 是从 b 系到 n 系的坐标系变换矩阵，即 SINS 的姿态矩阵；$\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 和 $\boldsymbol{f}_{sf}^b$ 分别表示陀螺测量的角速度和加速度计测量的比力；$\boldsymbol{v}^n = [v_E^n \quad v_N^n \quad v_U^n]^{\mathrm{T}}$ 是 n 系下的惯导速度矢量，v_E^n, v_N^n, v_U^n 表示沿“东-北-天”方向的投影分量；$\boldsymbol{p} = [\lambda \quad L \quad h]^{\mathrm{T}}$ 是 SINS 位置矢量，λ, L, h 分别表示地理经度、纬度和海拔高度；R_e、f：地球长半轴半径和扁率，可分别取 $R_e = 6\,378\,137$ m，$f = 1/298.257$；ω_{ie}、g_0：地球自转角速率和赤道海平面处的重力加速度大小，可分别取 $\omega_{ie} = 7.292\,115\,146\,7 \times 10^{-5}$ rad/s、$g_0 = 9.780\,326\,771\,4$ m/s^2；$\beta_1, \beta_2, \beta_3$：与地理纬度和海拔高度有关的重力加速度系数，可分别取 $\beta_1 = 5.270\,94 \times 10^{-3}$、$\beta_2 = 2.327\,18 \times 10^{-5}$、$\beta_3 = 2g_0/R_e = 3.067 \times 10^{-6}$ s^{-2}。

1.2 捷联惯导系统数值更新算法

SINS 数值更新算法是一种航位推算算法，它根据上一时刻(t_{m-1} 时刻)的已知姿态、速度和位置导航信息，结合惯性器件在更新周期内的采样输出，递推计算当前时刻(t_m 时刻)的导航信息。记 $T_m = t_m - t_{m-1}$ 为 SINS 更新周期。文中假设陀螺采样输出为角增量并且加速度计输出为速度增量，高精度的惯导系统往往都采取这种采样方式。

考虑到数值更新算法的精度和为了后续推导反演算法的方便，下面以“单子样+前一周期”误差补偿方法给出 SINS 数值更新算法的主体框架[3-6]。

1.2.1 姿态更新算法

根据姿态变换矩阵的链乘规则，t_m 时刻的姿态矩阵 $\boldsymbol{C}_{b_m}^{n_m}$ 可表示为

$$\boldsymbol{C}_{b_m}^{n_m} = \boldsymbol{C}_{n_{m-1}}^{n_m}\boldsymbol{C}_{b_{m-1}}^{n_{m-1}}\boldsymbol{C}_{b_m}^{b_{m-1}} \tag{9}$$

式(9)中，$\boldsymbol{C}_{b_{m-1}}^{n_{m-1}}$ 为 t_{m-1} 时刻的姿态矩阵；$\boldsymbol{C}_{n_{m-1}}^{n_m}$ 是在更新周期 T_m 内 n 系相对于 i 系的转动变换矩阵，可根据旋转矢量 $\boldsymbol{\zeta}_m = -\boldsymbol{\omega}_{in,m-1/2}^n T_m$ 确定，计算方法参见式(11)。这里下标 $m-1/2$ 表示 $[t_{m-1}, t_m]$ 的中间时刻，即 $t_m - T_m/2$ 时刻(或简记为 $t_{m-1/2}$)，$t_{m-1/2}$ 时刻涉及的有关参数可采用线性外推方法进行估计，比如 $L_{m-1/2} = L_{m-1} + (L_{m-1} - L_{m-2})/2$；$\boldsymbol{C}_{b_m}^{b_{m-1}}$ 由旋转矢量 $\boldsymbol{\Phi}_m$ 确定(方法亦见式(11))，这里考虑等效旋转矢量圆锥误差补偿，采用“单子样+前一周期”陀螺角增量补偿算法，则有

$$\boldsymbol{\Phi}_m = \Delta\boldsymbol{\theta}_m + 1/12 \cdot \Delta\boldsymbol{\theta}_{m-1} \times \Delta\boldsymbol{\theta}_m \tag{10}$$

式(10)中，$\Delta\boldsymbol{\theta}_{m-1}$，$\Delta\boldsymbol{\theta}_m$ 分别是陀螺在 $[t_{m-2}, t_{m-1}]$ 和 $[t_{m-1}, t_m]$ 时间段内的角增量输出，即 $\Delta\boldsymbol{\theta}_m = \int_{t_{m-1}}^{t_m} \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \mathrm{d}t$。

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

下面给出由等效旋转矢量 $\boldsymbol{\Phi}$ 计算变换矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的公式

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{I}_{3\times3}+\frac{\sin|\boldsymbol{\Phi}|}{|\boldsymbol{\Phi}|}(\boldsymbol{\Phi}\times)+\frac{1-\cos^2|\boldsymbol{\Phi}|}{|\boldsymbol{\Phi}|^2}(\boldsymbol{\Phi}\times)^2 \tag{11}$$

1.2.2　速度更新算法

由 t_{m-1} 时刻导航速度 $\boldsymbol{v}^n_{m-1}$ 递推计算 t_m 时刻速度 $\boldsymbol{v}^n_m$ 的数值方法为

$$\boldsymbol{v}^n_m=\boldsymbol{v}^n_{m-1}+\boldsymbol{C}^{n_{m-1/2}}_{n_{m-1}}\boldsymbol{C}^{m-1}_{bm-1}\Delta\boldsymbol{v}^b_{sf,m}+\Delta\boldsymbol{v}^n_{g/cor,m} \tag{12}$$

$$\Delta\boldsymbol{v}^b_{sf,m}=\Delta\boldsymbol{v}_m+\Delta\boldsymbol{v}_{rot,m}+\Delta\boldsymbol{v}_{scull,m} \tag{13}$$

$$\Delta\boldsymbol{v}^n_{g/cor,m}=\left[\boldsymbol{g}^n_{m-1/2}-(2\boldsymbol{\omega}^n_{ie,m-1/2}+\boldsymbol{\omega}^n_{en,m-1/2})\times\boldsymbol{v}^n_{m-1/2}\right]T_m \tag{14}$$

与前面姿态更新中 $\boldsymbol{C}^{n_m}_{n_{m-1}}$ 的计算方法类似，式(12)中 $\boldsymbol{C}^{n_{m-1/2}}_{n_{m-1}}$ 可由旋转矢量 $\boldsymbol{\zeta}_m/2$ 确定。如果考虑速度划船误差补偿，同样采用“单子样＋前一周期”陀螺角增量和加速度计速度增量补偿算法，则在式(13)中有

$$\Delta\boldsymbol{v}_{rot,m}=1/2\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_m\times\Delta\boldsymbol{v}_m \tag{15}$$

$$\Delta\boldsymbol{v}_{scull,m}=1/12\cdot(\Delta\boldsymbol{\theta}_{m-1}\times\Delta\boldsymbol{v}_m+\Delta\boldsymbol{v}_{m-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_m) \tag{16}$$

式(15)～式(16)中，$\Delta\boldsymbol{v}_{m-1}$，$\Delta\boldsymbol{v}_m$ 分别是加速度计在 $[t_{m-2},t_{m-1}]$ 和 $[t_{m-1},t_m]$ 时间段内的速度增量输出，即 $\Delta\boldsymbol{v}_m=\int_{t_{m-1}}^{t_m}\boldsymbol{f}^b_{sf}\,\mathrm{d}t$。

1.2.3　位置更新算法

在完成导航速度 $\boldsymbol{v}^n_m$ 的更新之后，由 t_{m-1} 时刻导航地理位置 $\boldsymbol{p}_{m-1}$ 递推 t_m 时刻位置 $\boldsymbol{p}_m$ 的数值算法为

$$\boldsymbol{p}_m=\boldsymbol{p}_{m-1}+\boldsymbol{M}_{pv,m-1/2}(\boldsymbol{v}^n_{m-1}+\boldsymbol{v}^n_m)T_m/2 \tag{17}$$

在式(14)和式(17)中，$\boldsymbol{g}^n_{m-1/2}$，$\boldsymbol{\omega}^n_{ie,m-1/2}$，$\boldsymbol{\omega}^n_{en,m-1/2}$，$\boldsymbol{v}^n_{m-1/2}$，$\boldsymbol{M}_{pv,m-1/2}$ 表示相应量在 $t_{m-1/2}$ 时刻的计算值，均可通过 t_{m-2} 和 t_{m-1} 时刻的导航参数进行线性外推估计。

2　GNSS/SINS 组合导航

2.1　GNSS/SINS 组合 Kalman 滤波

采用高精度载波相位 GNSS 与 SINS 构成组合导航系统，GNSS 可达厘米级的定位精度并且载机的机动大、飞行速度高，因此必需考虑到 GNSS 和 SINS 之间的安装杆臂误差 $\delta\boldsymbol{l}$ 以及两者之间的时间不同步误差 δt 影响。这里建立 19 维的 GNSS/SINS 组合 Kalman 滤波器，状态选取及滤波器构造为

$$\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{\phi}\quad\delta\boldsymbol{v}^n\quad\delta\boldsymbol{p}\quad\boldsymbol{\varepsilon}^b\quad\boldsymbol{\nabla}^b\quad\delta\boldsymbol{l}\quad\delta t]^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{w} \tag{19}$$

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{p}_{SINS}-\boldsymbol{p}_{GNSS}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v} \tag{20}$$

式(18)～式(20)中各符号的含义以及详细系统参数可参见文献[6-7]。

2.2　Kalman 滤波的部分反馈修正原理

为了保持惯导系统的导航误差始终为小量，即保证惯导误差方程的线性，提高滤波器模型精度，在组合导航过程中需将 Kalman 滤波的状态估计值不断反馈给惯导系统，进行惯导修正。传统的反馈方法是：选定某些状态参与反馈，将 Kalman 滤波器中的这些状态的估计值一次性全部反馈给惯导系统，修正惯导参数，再将滤波器中所有参与反馈的状态清零。但是，上述全反馈方法容易造成惯导导航输出剧烈的锯齿状波动，从而影响后续 SINS 反演算法的效果，在惯性器件模拟器上产生很大的间歇性脉冲失真。为了避免全反馈的不良影响，下面提出部分反馈修正原理，以经度误差的状态反馈修正为例，表示为

$$\lambda_m=\hat{\lambda}_m-(1-\alpha)\cdot\hat{x}_7 \tag{21}$$

$$\hat{x}_7^-=\alpha\cdot\hat{x}_7 \tag{22}$$

$$\alpha=\exp(-T_m/\tau) \tag{23}$$

式(21)～式(23)中，$\hat{\lambda}_m$ 为 SINS 更新算法的经度，λ_m 为部分反馈修正后的经度输出，后者比前者精度更高；$\hat{x}_7$ 为 Kalman 滤波器的经度误差估计值，$\hat{x}_7^-$ 为经过部分反馈修正后的残余估计值，可用于后续的部分反馈修正或作为下一步滤波初值；α 为计算修正权重的系数因子。式(23)为根据修正延迟时间参数 τ 确定权重因子 α 的公式，τ 设置越大则导航参数输出越平滑。显然，若直接取 $\alpha=0$，即为全反馈修正。

虽然 GNSS/SINS 组合导航的量测更新周期一般远大于 SINS 更新周期，但如果选择反馈修正周期与 SINS 更新周期 T_m 一致，并利用上述部分反馈修正方法，则可得到比较平滑的导航参数输出，为惯性模拟器的反演算法提供更加逼真的参考轨迹。当然，如欲进一步提高参考轨迹参数的求解精度，还可采用双向滤波或平滑等算法[8]。

3　捷联惯导反演算法

反演算法可以看作是常规 SINS 数值更新算法的逆过程。在反演算法中，假设已知姿态角和位置序列，前者为角运动信息而后者为线运动信息，再通过改造常规 SINS 更新算法，反向求解陀螺角增量和加速度计速度增量，实现惯性器件的高精度仿真

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

和模拟。SINS 反演算法的关键技术叙述如下。

3.1 姿态和位置的三次样条函数拟合

以位置信息中的经度为例，对组合导航输出的经度序列 …，λ_{m-1}，λ_m，λ_{m+1}，… 进行分段三次样条函数拟合，假设在时间区间 $t\in[t_{m-1},t_m]$ 上的拟合三次多项式函数为

$$\lambda(t)=a_{m0}+a_{m1}t+a_{m2}t^2+a_{m3}t^3 \tag{24}$$

式(24)中，a_{m0}，a_{m1}，a_{m2}，a_{m3} 为样条拟合系数。

经度与惯导东向速度之间的关系为

$$\dot{\lambda}(t)=\sec L_{m-1/2}/R_{Nh,m-1/2}\cdot v_E^n(t) \tag{25}$$

一般区间 $[t_{m-1},t_m]$ 很小，将式(25)中的 $L(t)$ 和 $R_{Nh}(t)$ 取成 $t_{m-1/2}$ 时刻的值。由于位置函数已知，这里 $L_{m-1/2}$ 可通过样条函数插值精确获得，而不象常规 SINS 更新算法中的那样需通过线性外推进行估计。

由式(25)移项，再将式(24)代入，即可求得东向速度函数

$$v_E^n(t)=R_{Nh,m-1/2}\cos L_{m-1/2}\cdot\dot{\lambda}(t)=R_{Nh,m-1/2}\cos L_{m-1/2}\cdot(a_{m1}+2a_{m2}t+3a_{m3}t^2) \tag{26}$$

同理，对纬度和高度序列进行处理，可求得北向速度和天向速度，从而获得任意时刻的位置函数 $\boldsymbol{p}(t)$ 和速度函数 $\boldsymbol{v}^n(t)$；若对欧拉角序列进行同样处理，可获得欧拉角分段拟合函数，不妨记为 $\boldsymbol{A}(t)$。值得注意的是，如果欧拉角表示姿态存在奇异点，则需做特殊处理，这里不再详述。

3.2 陀螺的角增量模拟

假设 SINS 反演算法生成惯性器件的解算周期为 $T_k=t_k-t_{k-1}$，它可以不同于 T_m，一般情况下小于 T_m，T_k 越小则解算精度越高。

以 T_k 为等时间间隔，由姿态角函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 插值可获得姿态角序列 $\boldsymbol{A}_k$，这等效于已知姿态变换矩阵序列信息 $\boldsymbol{C}_{b_k}^{n_k}$。由式(9)移项并将时间下标 m 换成 k，可得

$$\boldsymbol{C}_{b_k}^{b_{k-1}}=(\boldsymbol{C}_{n_{k-1}}^{n_k}\boldsymbol{C}_{b_{k-1}}^{n_{k-1}})^{-1}\boldsymbol{C}_{b_k}^{n_k} \tag{27}$$

式(27)中，$\boldsymbol{C}_{n_{k-1}}^{n_k}$ 可根据 $\boldsymbol{\zeta}_k=-\boldsymbol{\omega}_{in,k-1/2}^n T_k$ 计算。由于已知速度和位置函数，这里 $\boldsymbol{\omega}_{in,k-1/2}^n$ 中的相关参数可通过样条函数插值精确计算。

由变换矩阵 $\boldsymbol{C}_{b_k}^{b_{k-1}}$ 和式(11)的逆运算可求得等效旋转矢量 $\boldsymbol{\Phi}_k$，再根据式(10)求得陀螺角增量

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\theta}_k&=(\boldsymbol{I}_{3\times3}+1/12\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\times)^{-1}\boldsymbol{\Phi}_k\approx\\&(\boldsymbol{I}_{3\times3}-1/12\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\times)\boldsymbol{\Phi}_k\approx\\&\boldsymbol{\Phi}_k-1/12\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\times\boldsymbol{\Phi}_k\end{aligned} \tag{28}$$

在反演算法初始化时，可假设 $\Delta\boldsymbol{\theta}_0=0$。

3.3 加速度计的速度增量模拟

同样以 T_k 为时间间隔，对速度三次样条函数 $\boldsymbol{v}^n(t)$ 插值可获得速度序列 $\boldsymbol{v}_k^n$，由式(12)移项得

$$\Delta\boldsymbol{v}_{sf,k}^{b_{k-1}}=(\boldsymbol{C}_{n_{k-1}}^{n_{k-1/2}}\boldsymbol{C}_{b_{k-1}}^{n_{k-1}})^{-1}(\boldsymbol{v}_k^n-\boldsymbol{v}_{k-1}^n-\Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n) \tag{29}$$

式(29)中，$\boldsymbol{C}_{n_{k-1}}^{n_{k-1/2}}$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}_{g/cor,k}^n$ 的计算并不复杂，也无需详述。

另外，将式(15)和(16)代入式(13)，得

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{v}_{sf,k}^{b_{k-1}}&=\Delta\boldsymbol{v}_k+1/2\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_k\times\Delta\boldsymbol{v}_k+1/12\cdot(\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{v}_k+\Delta\boldsymbol{v}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k)=\\&1/12\cdot\Delta\boldsymbol{v}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k+[\boldsymbol{I}_{3\times3}+(1/2\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_k+1/12\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1})\times]\Delta\boldsymbol{v}_k\end{aligned} \tag{30}$$

对式(30)移项整理，得

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{v}_k&=[\boldsymbol{I}_{3\times3}+(1/2\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_k+1/12\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1})\times]^{-1}(\Delta\boldsymbol{v}_{sf,k}^{b_{k-1}}-1/12\cdot\Delta\boldsymbol{v}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k)\approx\\&[\boldsymbol{I}_{3\times3}-(1/2\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_k+1/12\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1})\times](\Delta\boldsymbol{v}_{sf,k}^{b_{k-1}}-1/12\cdot\Delta\boldsymbol{v}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k)\approx\\&\Delta\boldsymbol{v}_{sf,k}^{b_{k-1}}-1/2\cdot\Delta\boldsymbol{\theta}_k\times\Delta\boldsymbol{v}_{sf,m}^{b_{k-1}}-1/12\cdot(\Delta\boldsymbol{\theta}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{v}_{sf,k}^{b_{k-1}}+\Delta\boldsymbol{v}_{k-1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k)\end{aligned} \tag{31}$$

这里同样可假设初值 $\Delta\boldsymbol{v}_0=0$。至此，根据式(29)和式(31)即可求解得加速度计的速度增量，完成惯性器件的模拟采样仿真。

4 实验数据处理与分析

现有一组机载导航实验数据，其 SINS 中陀螺的随机常值漂移约为 0.03°/h，加速度计的逐次启动随机常值偏值约为 200 μg（特别说明：g = 9.8 m/s²，下同），原始数据输出频率 200 Hz；载波相位差分 GPS 的定位精度为 5 cm，数据输出频率1 Hz。载机飞行轨迹包括静止、滑跑起飞、转弯、巡航和在作业区域实施作业等阶段，图 1 给出了1 h飞行轨迹的水平投影图，其中左下角“☆”为轨迹起始点。

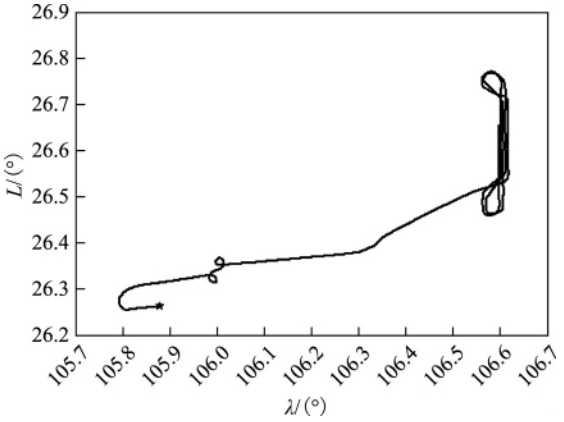


图 1 飞行轨迹

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

对实验数据进行处理，大致过程如下：

(1)采用二子样姿态圆锥误差和速度划船误差补偿算法进行 SINS 导航更新，同时进行 GPS/SINS 组合导航 Kalman 滤波，使用部分反馈修正方法修正惯导误差，这些算法均基于 PSINS 工具箱实现[9]；

(2)对组合导航输出的 100 Hz 姿态和位置数据作三次样条函数拟合，获得分段连续的轨迹函数 $\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{v}^n(t)$ 和 $\boldsymbol{p}(t)$；

(3)对轨迹函数 $\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{v}^n(t)$ 和 $\boldsymbol{p}(t)$ 作 200 Hz 等间隔插值，得到序列 $\boldsymbol{A}_k$、$\boldsymbol{v}_k^n$ 和 $\boldsymbol{p}_k$；

(4)根据 SINS 反演算法生成惯性器件模拟采样值 $\Delta\boldsymbol{\theta}_k$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}_k$，比较 IMU 原始采样数据与模拟采样数据的功率谱密度(power spectrum density，PSD)，参见图 2，图中显示的是 x 轴陀螺和 x 轴加速度计在 1 000～1 100 s 的结果，其它轴和时间段的效果类似，不再给出；

(5)选用二子样误差补偿算法，由模拟采样 $\Delta\boldsymbol{\theta}_k$ 和 $\Delta\boldsymbol{v}_k$ 进行纯惯导 SINS 解算，但对惯导的高度通道进行了阻尼，纯惯导解算结果与(1)中的组合导航结果比较，误差参见图 3。

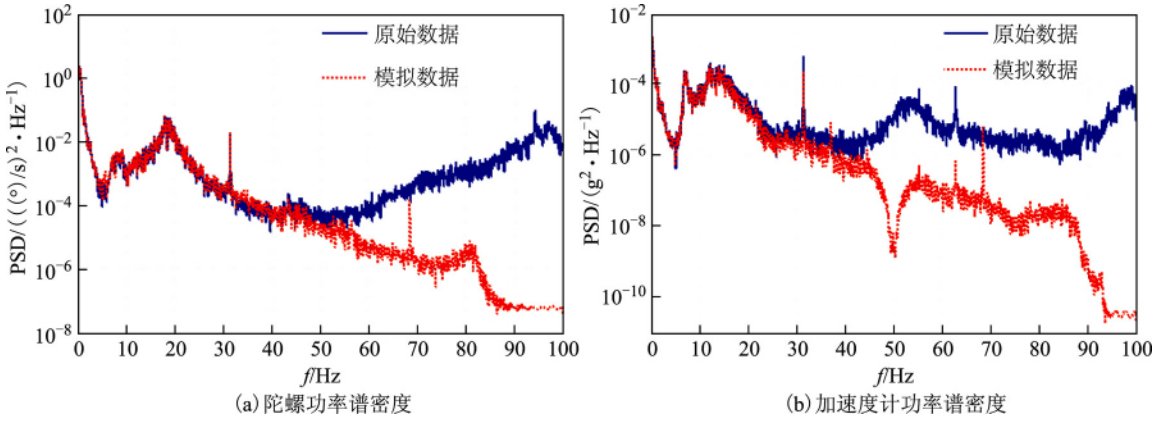


图 2　原始采样数据与模拟采样数据的功率谱密度对比

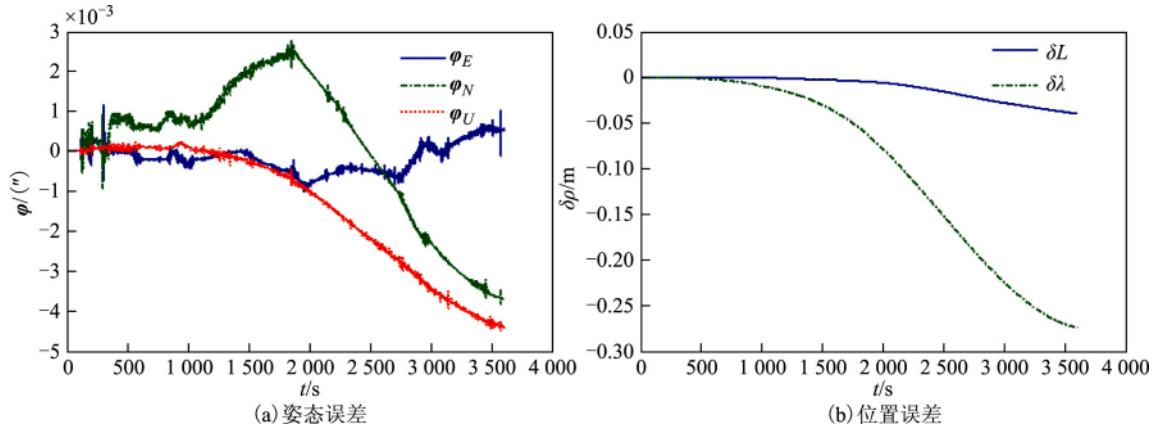


图 3　基于模拟采样数据的纯惯导误差

从图 2 可看出，原始采样数据与模拟采样数据的功率谱密度在低频段吻合得很好，说明了惯性器件模拟器能够模拟出载机的低频运动特性。图 3 表明，模拟采样数据具有很高的导航精度，在 1 h 内纯惯导的姿态误差为 0.001″量级、位置误差为 0.1 m 量级。

5　结束语

根据传统的高精度 SINS 数值更新算法，它由惯性器件输出求解姿态、速度和位置等导航信息，提出了 SINS 反演算法，即如果已知姿态和位置轨迹信息，反向模拟求解惯性器件采样值，实现惯性器件模拟器的仿真。针对实际载机的飞行数据，需要结合 GNSS 进行组合导航和使用部分反馈修正技术处理，提高导航精度和获得平滑的轨迹参数，才能作为惯性器件模拟器的理想输入。实验数据处理结果表明，所提惯性模拟器具有在 1 h 内纯惯导位置误差 0.1 m 量级的精度，完全满足高精度惯导系统对数据源仿真精度的要求，如果增加模拟器求解频率，还有望进一步减少仿真计算误差；惯性器件的模拟采样数据频谱与实际采样数据频谱在低频段基本相同，如果有更高的高频一致

(下转第 37 页)

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

(3)数据流：STR 记录类型。

源信息表的结构是可扩展的，可在必要时引入新的记录类型。所有用户节点必须能够解码 STR 记录类型，而解码 CAS 和 NET 类型是可选的。

4　结束语

本文系统分析了国内外互联网传输卫星导航增强信息的发展现状，通过分析 SISNeT、Ntrip、RT-IGS 这三种主要的网络播发导航增强信息的传输协议，论述了选择以广泛采用的 Ntrip 协议作为基础制定标准的过程。本文描述了卫星导航增强信息数据互联网播发的网络架构，提出 GNSS 互联网播发的四个网络实体为数据源、数据服务器、播发服务器、用户节点，并论述了网络实体之间采用的 HTTP、RTSP、简单 RTP 的三种通信接口协议要求。

参考文献

[1] MATHUR A R,TORÁN F,VENTURA-TRAVESET J. SISNeT user interface document V3. 1[EB/OL]. (2006-05-15)[2015-02-15]. http://www. egnos-pro. esa. int/Publications/SISNET/SISNET_UID_3_1. pdf.

[2] The Radio Technical Commission for Maritime Services. Networked transport of RTCM via internet protocol (Ntrip)-version 2. 0[EB/OL]. (2011-06-28)[2015-02-15]. https://ssl29. pair. com/dmarkle/puborder. php? show=3.

[3] 赵军，王继龙，吴建平. 基于互联网的导航定位增强信息大规模实时播发研究[J]. 宇航学报，2006，27(4)：819-823.

[4] FIELDING R,IRVINE U C,GETTYS J,et al. Hypertext transfer protocol-HTTP/1. 1[EB/OL]. (1999-06-11)[2015-02-15]. http://www. ietf. org/rfc/rfc2616. txt.

[5] SCHULZRINNE H,COLUMBIA U,RAO A,et al. Real time streaming protocol (RTSP)[EB/OL]. [2015-02-15]. http://tools. ietf. org/html/rfc2326.

[6] SCHULZRINNE H,CASNER S,FREDERICK R,et al. RTP: A transport protocol for real-time applications[EB/OL]. [2015-02-15]. http://tools. ietf. org/html/rfc3550.

[7] The IGS Real-time Pilot Project Committee. International GNSS Service real-time pilotroject[EB/OL]. (2007-06-26)[2015-02-15]. http://www. rtigs. net/docs/IGS-RT-Pilot-Project-Call-For-Participation. pdf.

(上接第 31 页)

性要求，可通过增加实际数据的采集频率或者采用单子样算法进行 SINS 解算来实现。

当然，在高精度的模拟器数据源之后，还可针对特定的任务需求，再加入随机漂移误差和不正交安装误差等建模误差，进行更深层次的惯性导航或组合导航仿真。

参考文献

[1] HUDDLE J,GRETHEL R. Radio astro inertial Doppler error simulator[EB/OL]. [2014-06-12]. http://www. industry-cortex. com.

[2] GPSoft. SatNav toolbox 3. 0 for Matlab[EB/OL]. [2014-06-12]. http://gpsoftnav. com/products/satellite-navigation-satnav-toolbox-3-0/.

[3] PAUL G S. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 1: attitude algorithms[J]. Journal of Guidance,Control and Dynamics,1998,21(1):19-28.

[4] PAUL G S. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 2: velocity and position algorithms[J]. Journal of Guidance,Control and Dynamics,1998,21(2):208-221.

[5] WU Yuanxin,WANG Jinling,HU Dewen. A new technique for INS/GNSS attitude and parameter estimation using online optimization[J]. IEEE Trans. on Signal Processing,2014,62(10):2642-2655.

[6] 严恭敏. 车载定位定向系统研究[D]. 西安：西北工业大学，2006：16-27，82-84.

[7] 赵春莲. 航空摄影测量中高精度 POS 导航算法研究[D]. 西安：西北工业大学，2014：60-64.

[8] 郝万亮，孙付平，崔建勇，等. 双向滤波平滑在 GNSS/INS 组合导航中的应用[C]//中国卫星导航系统管理办公室学术交流中心. 第四届中国卫星导航学术年会论文集. 北京：中国卫星导航系统管理办公室，2013：1-4.

[9] 严恭敏. 高精度捷联惯性导航系统 Matlab 工具箱[EB/OL]. (2013-09-16)[2014-06-12]. http://blog. sina. com. cn/s/blog_40edfdc90101heg0. html.

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Journal of Systems Engineering and Electronics
Vol. 26, No. 2, April 2015, pp.346–352

EXCLUSIVELY AVAILABLE VIA
IEEE Xplore® DIGITAL LIBRARY

Time-asynchrony identification between inertial sensors in SIMU

Gongmin Yan[1,*], Xi Sun[1], Jun Weng[1], Qi Zhou[2], and Yongyuan Qin[1]

1. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. Xi'an Flight Automatic Control Research Institute, Xi'an 710065, China

Abstract: Traditional strapdown inertial navigation system (SINS) algorithm studies are based on ideal measurements from gyros and accelerometers, while in the actual strapdown inertial measurement unit (SIMU), time-asynchrony between each inertial sensor is inevitable. Testing principles and methods for time-asynchrony parameter identification are studied. Under the single-axis swaying environment, the relationships between the SINS platform drift rate and the gyro time-asynchrony are derived using the SINS attitude error equation. It is found that the gyro time-asynchrony error can be considered as a kind of pseudo-coning motion error caused by data processing. After gyro testing and synchronization, the single-axis tumble test method is introduced for the testing of each accelerometer time-asynchrony with respect to the ideal gyro triad. Accelerometer time-asynchrony parameter identification models are established using SINS specific force equation. Finally, all of the relative time-asynchrony parameters between inertial sensors are well identified by using fiber optic gyro SIMU as experimental verification.

Keywords: strapdown inertial navigation system (SINS), time-asynchrony, pseudo-coning error, velocity error.

DOI: 10.1109/JSEE.2015.00040

1. Introduction

The traditional strapdown inertial navigation system (SINS) algorithms mainly focus on the compensation of attitude coning error, velocity sculling error and position scrolling error [1–7], where a basic assumption is implied that all of the measurements from inertial sensors are fully synchronized in space and in time. However, for measurements from different sensors in the actual engineering strapdown inertial measurement unit (SIMU), there inevitably exist spatial and temporal asynchrony errors. In recent years, many effective methods have been acquired for spatial asynchrony issues [7–12], whereas the time asynchrony problem is comparatively concealed and complicated, still remaining as a hot topic to be resolved. Researchers have proposed a bunch of correction or compensation methods for coning and sculling errors based on the analysis of the frequency characteristics of actual inertial sensors [13–16]. For example, in [15], in order to achieve time synchronization between accelerometer triad and gyro triad, accelerometer sampling signals are manipulated via a specific digital filter, which is just the same filter used to process the high-frequency sampling signals for ring laser gyros. However, the phase-frequency characteristics of these two types of inertial sensors, gyros and accelerometers, are mutually different in actual SIMU, so the approach presented in [15] is quite incomplete. Reference [16] gives a correction method for sculling error compensation on the basis of accelerometer phase-shift error, but it relies on the precondition that the transfer function models of accelerometers have been obtained. Even so, these models are very difficult to set up accurately in most cases for a real system. Besides, some other time-delay factors, like the signal transmission delays, are not comprehensively considered in these literature.

Based on the synchronized assumption between gyro triads and between accelerometer triads, experimental methods presented in [17] estimate the relative time-delay (or phase shift) between the accelerometer triad and the gyro triad. It has been proved that the time-delay effects are crucial in increasing the SINS velocity updating accuracy under the tumble test circumstance. However, if going a step further, it can be concluded accordingly that the time asynchrony errors between gyro triads, and between accelerometer triads, have not yet been fully considered, which will severely affect high-precision SINS, especially under a high-dynamic environment. These remaining issues are studied in depth in this paper, and testing methods are also brought forward for time-asynchrony between gyros, as well as between accelerometers. Finally, some testing experiments are carried out by using the fiber-optic

Manuscript received April 18, 2014.
*Corresponding author.
This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (61273333).

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

gyro (FOG) SIMU to realize time synchronization between all inertial sensors.

2. Principles for time-asynchrony testing between gyros

As shown in Fig. 1, $ox^by^bz^b$ represents the body coordinate system of SIMU, denoted as b-frame for short. If SIMU experiences sinusoidal swaying about a fixed axis oo' with angular rate $\alpha\Omega\cos(\Omega t)$, it is obvious that the projections of the angular magnitude to SIMU coordinate axes are $\alpha_i\Omega(i=x,y,z)$, where $\alpha=\sqrt{\alpha_x^2+\alpha_y^2+\alpha_z^2}$. Therefore, the swaying angular velocity can be expressed in a component form:

$$\boldsymbol{\omega}=\Omega\cos(\Omega t)\cdot[\alpha_x\quad\alpha_y\quad\alpha_z]^{\mathrm{T}}. \tag{1}$$

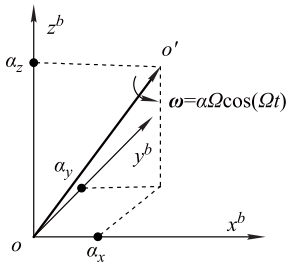


Fig. 1 SIMU swaying along fixed axis oo'

With the integral of (1) over time interval from 0 to t, the angular increment is

$$\boldsymbol{\theta}=\sin(\Omega t)\cdot[\alpha_x\quad\alpha_y\quad\alpha_z]^{\mathrm{T}}. \tag{2}$$

Due to the swaying of fixed-axis rotation in Fig. 1, the corresponding equivalent rotation vector can be obviously simplified as $\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{\theta}$.

Under a small swaying angle assumption and according to the relationship between the attitude transformation matrix and the equivalent rotation vector, an approximation could be given by

$$\boldsymbol{C}_t^0=\boldsymbol{I}+\frac{\sin\Phi}{\Phi}(\boldsymbol{\Phi}\times)+\frac{1-\cos\Phi}{\Phi^2}(\boldsymbol{\Phi}\times)^2\approx$$

$$\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{\Phi}\times)=\boldsymbol{I}+\sin(\Omega t)\cdot\begin{bmatrix}0&-\alpha_z&\alpha_y\\\alpha_z&0&-\alpha_x\\-\alpha_y&\alpha_x&0\end{bmatrix} \tag{3}$$

where $\boldsymbol{I}$ is a 3×3 identity matrix, $\Phi=|\boldsymbol{\Phi}|$ is the magnitude of equivalent rotation vector $\boldsymbol{\Phi}$, and $\boldsymbol{C}_t^0$ denotes the transformation matrix from time t to 0.

The time-asynchrony effect of angular rate outputs between gyro triads should be considered in actual SIMU. Taking the navigation computer sampling time t as reference and assuming each time delay in the gyro triad to be $\tau_{G,i}$ $(i=x,y,z)$, the actual outputs of the gyro angular velocity can be obtained by rewriting (1) as follows:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}=\Omega\cdot\begin{bmatrix}\alpha_x\cos[\Omega(t-\tau_{G,x})]\\\alpha_y\cos[\Omega(t-\tau_{G,y})]\\\alpha_z\cos[\Omega(t-\tau_{G,z})]\end{bmatrix}. \tag{4}$$

Subtracting (1) from (4), the gyro angular output errors can be obtained, as

$$\delta\boldsymbol{\omega}=\tilde{\boldsymbol{\omega}}-\boldsymbol{\omega}=$$

$$\Omega\cdot\begin{bmatrix}\alpha_x\cos[\Omega(t-\tau_{G,x})]-\alpha_x\cos(\Omega t)\\\alpha_y\cos[\Omega(t-\tau_{G,y})]-\alpha_y\cos(\Omega t)\\\alpha_z\cos[\Omega(t-\tau_{G,z})]-\alpha_z\cos(\Omega t)\end{bmatrix}. \tag{5}$$

If the 'East-North–Up' $(\mathrm{E}-\mathrm{N}-\mathrm{U})$ local-level-north-slaved coordinate system is selected as the navigation reference coordinate system, denoted as n-frame for short, the differential equation of SINS platform misalignment angles $\boldsymbol{\phi}=[\phi_x\quad\phi_y\quad\phi_z]^{\mathrm{T}}$ is given by [18]

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}_{in}^n+\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n-\boldsymbol{C}_b^n\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b. \tag{6}$$

After SINS initial fine alignment and within a short period of pure inertial navigation, the first two terms in (6), i.e. $\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}_{in}^n$ and $\delta\boldsymbol{\omega}_{in}^n$, are reasonably small enough to neglect, so the following emphasis is put on the analysis of the last term.

Assume that b-frame is coincident with n-frame at the initial navigation time 0. Replacing $\boldsymbol{C}_b^n$ and $\delta\boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ with $\boldsymbol{C}_t^0$ and $\delta\boldsymbol{\omega}$ respectively in (6), and inserting with (3) and (5), yield

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}=-\left(\boldsymbol{I}+\sin(\Omega t)\cdot\begin{bmatrix}0&-\alpha_z&\alpha_y\\\alpha_z&0&-\alpha_x\\-\alpha_y&\alpha_x&0\end{bmatrix}\right)\times$$

$$\left(\Omega\cdot\begin{bmatrix}\alpha_x\cos[\Omega(t-\tau_{G,x})]-\alpha_x\cos(\Omega t)\\\alpha_y\cos[\Omega(t-\tau_{G,y})]-\alpha_y\cos(\Omega t)\\\alpha_z\cos[\Omega(t-\tau_{G,z})]-\alpha_z\cos(\Omega t)\end{bmatrix}\right). \tag{7}$$

Expanding (7) and analyzing the x-component, it is found that

$$\dot{\phi}_x=-\alpha_x\Omega[\cos(\Omega(t-\tau_{G,x}))-\cos(\Omega t)]+$$
$$\alpha_y\alpha_z\Omega[\sin(\Omega t)\cos(\Omega(t-\tau_{G,y}))-$$
$$\sin(\Omega t)\cos(\Omega(t-\tau_{G,z}))]. \tag{8}$$

Assuming a small product value $\Omega\tau_{G,i}$ between the swaying frequency and the time-asynchrony delay, there is the approximation

$$\sin(\Omega t)\cos[\Omega(t-\tau_{G,i})]=$$
$$[\sin(\Omega(2t-\tau_{G,i}))+\sin(\Omega\tau_{G,i})]/2\approx$$
$$[\sin(\Omega(2t-\tau_{G,i}))+\Omega\tau_{G,i}]/2. \tag{9}$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Substituting (9) into (8), the DC component in $\dot{\phi}_x$ can be given by

$$\dot{\bar{\phi}}_x = \alpha_y\alpha_z\Omega^2(\tau_{G,y} - \tau_{G,z})/2. \tag{10}$$

Similarly, the DC components of $\dot{\phi}_y$ and $\dot{\phi}_z$ in (7) are respectively shown as

$$\dot{\bar{\phi}}_y = \alpha_z\alpha_x\Omega^2(\tau_{G,z} - \tau_{G,x})/2 \tag{11}$$

$$\dot{\bar{\phi}}_z = \alpha_x\alpha_y\Omega^2(\tau_{G,x} - \tau_{G,y})/2. \tag{12}$$

It is well known that there exist noncommutativity errors in SINS attitude updating for finite rotation, which means the SINS attitude updating is highly affected by the rotation order of angular movements. Under an angular motion environment, the time-asynchrony outputs from gyros will result in a false attitude updating, which is not well consistent with actual angular motion sequence and will lead to attitude noncommutativity errors. Therefore, the time-asynchrony error can be essentially seen as a kind of noncommutativity errors caused by attitude computation, or it can be regarded as a pseudo-coning motion error [19,20]. Thus, in this paper, this error is called time-asynchrony pseudo-coning error due to phase-shift introduced by non-ideal gyro outputs.

Now, considering (12), if $\alpha_x = \alpha_y = \sqrt{2}\alpha/2$ and $\alpha_z = 0$, which indicates the direction of angular velocity $\boldsymbol{\omega}$ is along the diagonal of ox^b axis and oy^b axis within SIMU, then it gives $\dot{\bar{\phi}}_x = \dot{\bar{\phi}}_y = 0$ and

$$\dot{\bar{\phi}}_z = \alpha^2\Omega^2(\tau_{G,x} - \tau_{G,y})/4. \tag{13}$$

In particular, assume $\alpha = 10°$, $\Omega = 2\pi$ rad/s (or 1 Hz) and $\tau_{G,x} - \tau_{G,y} = 0.01$ ms in (13), then an average misalignment drift rate of $\dot{\bar{\phi}}_z$= 0.62 (°)/h can be obtained, which is much larger than the drift error of the inertial-grade gyro (0.01 (°)/h). This numerical example shows that much more attention should be paid to high precision SINS especially under an intense circumstance.

Conversely, the above analyses also provide a perfect idea for the time-asynchrony error identification between gyros, which can be implemented by introducing time-asynchrony pseudo-coning errors through experimental methods. If SIMU undergoes fixed-axis swaying motion using the turntable under the laboratory condition, then with no much arrangement from (10)–(12), the following matrix equation can be easily gotten

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{G,x} \\ \tau_{G,y} \\ \tau_{G,z} \end{bmatrix} = \frac{2}{\Omega^2} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\bar{\phi}}_x/(\alpha_y\alpha_z) \\ \dot{\bar{\phi}}_y/(\alpha_z\alpha_x) \\ \dot{\bar{\phi}}_z/(\alpha_x\alpha_y) \end{bmatrix} \tag{14}$$

where sinusoidal swaying frequency Ω, amplitude α_i, and misalignment angle drift rate $\dot{\bar{\phi}}_i$ are all known parameters in the experiment.

Unfortunately, in (14) the rank of the coefficient matrix about the unknown time-asynchrony parameters is 2. As a result, only the relative time-asynchrony, $\tau_{G,i}-\tau_{G,j}$ $(i, j = x, y, z;\ i \neq j)$, between any two gyros will be calculated, but none of the absolute time-asynchrony $\tau_{G,i}$ can be separately identified.

When obtaining the time-asynchrony parameters between gyro triads, a linear extrapolation or interpolation algorithm can be used to exactly adjust the output times of any two gyros to the third gyro, so that all of the output times in gyro triads will be well synchronized. The synchronization algorithms were derived in [17]. In the following section for accelerometer time-asynchrony analysis, we assume that the time-asynchrony between gyros has been fully tested and compensated, that is to say, the gyro outputs are considered to be ideally synchronized.

3. Principles for time-asynchrony testing between accelerometers

As shown in Fig. 2, the SIMU oy^b axis lies in horizontal and north directions, pointing inside and being perpendicular to the paper plane in this diagram. If b-frame coincides with n-frame at the initial navigation time 0, and SIMU rotates around the oy^b axis with a constant angular rate ω_y to roll angle γ, then ox^bz^b represents the new orientation of b-frame computed and determined by the ideal gyro triad. Thus, the SIMU attitude direction cosine matrix can be described as

$$\boldsymbol{C}_b^n = \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix}. \tag{15}$$

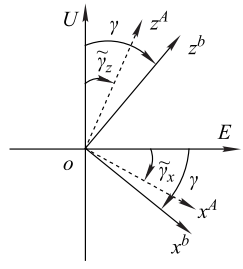


Fig. 2 Time-delay diagram for accelerometer rolling motion

At the angular position ox^bz^b, the ideal specific force, or named as virtual specific force, projecting in b-frame can be calculated via transformation matrix $\boldsymbol{C}_b^n$, with the result being

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b = [f_{\mathrm{sf},x}^b \quad f_{\mathrm{sf},y}^b \quad f_{\mathrm{sf},z}^b]^{\mathrm{T}} = -(\boldsymbol{C}_b^n)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}^n = [-g\sin\gamma \quad 0 \quad g\cos\gamma]^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

where $\boldsymbol{g}^n = [0 \quad 0 \quad -g]^{\mathrm{T}}$ and g is the magnitude of local gravity, which is approximately 9.8 m/s^2.

However, because of the time-asynchrony of accelerometer outputs with respect to gyro triads, the sensitive axis of the ox^b-axis accelerometer is actually along the ox^A orientation, as shown in Fig. 2. Hence, there exists a small roll angle error $\delta\gamma_x = \angle x^A o x^b = \gamma - \tilde{\gamma}_x$, and then the actually sensed output of the ox^b-axis accelerometer is expressed by

$$\tilde{f}^b_{\mathrm{sf},x} = -g\sin\tilde{\gamma}_x = -g\sin(\gamma - \delta\gamma_x) \approx -g(\sin\gamma - \cos\gamma\cdot\delta\gamma_x) \tag{17}$$

where $\sin\delta\gamma_x \approx \delta\gamma_x$ and $\cos\delta\gamma_x \approx 1$.

Similarly, the actual sensitive axis of the oz^b-axis accelerometer is along the oz^A orientation. By defining another roll angle error $\delta\gamma_z = \angle z^A o z^b = \gamma - \tilde{\gamma}_z$, the oz^b-axis accelerometer output is given by

$$\tilde{f}^b_{\mathrm{sf},z} = g\cos\tilde{\gamma}_z = g\cos(\gamma - \delta\gamma_z) \approx g(\cos\gamma + \sin\gamma\cdot\delta\gamma_z). \tag{18}$$

Whereas, for the oy^b-axis accelerometer, its sensitive axis is always along the horizontal direction with zero output, $\tilde{f}^b_{\mathrm{sf},y} \equiv 0$, so the oy^b-axis accelerometer is absolutely insensitive to the time-asynchrony in the oy^b-axis tumble test.

In the following part of this section, two data processing methods for deriving accelerometer time-asynchrony parameters will be introduced. For convenience and simplification, the symbol $\tau_{A,i}$ is denoted as the time-asynchrony of the oi^b-axis $(i = x, y, z)$ accelerometer with respect to gyro triads.

3.1 Method I

By combining actual specific force output $\tilde{f}^b_{\mathrm{sf},x}$ from the ox^b-axis accelerometer with the virtual specific forces $f^b_{\mathrm{sf},y}$ and $f^b_{\mathrm{sf},z}$ from the other two axes, here a new specific force vector is defined as

$$\tilde{\boldsymbol{f}}^b_{\mathrm{sf}} = [\tilde{f}^b_{\mathrm{sf},x} \quad f^b_{\mathrm{sf},y} \quad f^b_{\mathrm{sf},z}]^{\mathrm{T}}. \tag{19}$$

Now, if $\tilde{\boldsymbol{f}}^b_{\mathrm{sf}}$ is applied to the approximated version of specific force equation [17], $\dot{\boldsymbol{V}}^n \approx \boldsymbol{C}^n_b\tilde{\boldsymbol{f}}^b_{\mathrm{sf}} + \boldsymbol{g}^n$, then

$$\dot{\boldsymbol{V}}^n \approx \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -g(\sin\gamma - \cos\gamma\cdot\delta\gamma) \\ 0 \\ g\cos\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} = g\begin{bmatrix} \cos^2\gamma\cdot\delta\gamma \\ 0 \\ -\sin\gamma\cos\gamma\cdot\delta\gamma \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Let roll angle $\gamma = \omega_y t$ and the roll angle error of the ox^b-axis accelerometer $\delta\gamma_x = \omega_y\tau_{A,x}$. After m cycles of uniform rolling, i.e. a rotation of $m\times360^\circ$, the variation of the SINS eastern velocity can be obtained from the integral of (20), with the following result

$$\Delta V^n_E = \int_0^{\frac{2m\pi}{\omega_y}} \dot{V}^n_E \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{2m\pi}{\omega_y}} g\cos^2\omega_y t\cdot\omega_y\tau_{A,x}\mathrm{d}t = m\pi g\tau_{A,x}. \tag{21}$$

For example, if $m = 1$ and $\tau_{A,x} = 1$ ms, the velocity variation is approximately $\Delta V^n_E \approx 0.031$ m/s.

On the other hand, if the new specific force vector is constructed as $\tilde{\boldsymbol{f}}^b_{\mathrm{sf}} = [f^b_{\mathrm{sf},x} \quad f^b_{\mathrm{sf},y} \quad \tilde{f}^b_{\mathrm{sf},z}]^{\mathrm{T}}$, by using the same data processing method shown in (20) and (21), it can be easily obtained that

$$\Delta V^n_E = m\pi g\tau_{A,z}. \tag{22}$$

Equations (21) and (22) show that if SIMU rotates about an axis along the horizontal and north orientations, the accelerometer time-asynchrony parameters of the other two axes can be identified from the SINS eastern velocity errors by constructing new specific force vectors and implementing SINS velocity updating.

3.2 Method II

In contrast with Method I, directly applying the actual specific force output vector $\tilde{\boldsymbol{f}}^b_{\mathrm{sf}} = [\tilde{f}^b_{\mathrm{sf},x} \quad 0 \quad \tilde{f}^b_{\mathrm{sf},z}]^{\mathrm{T}}$ to $\dot{\boldsymbol{V}}^n \approx \boldsymbol{C}^n_b\tilde{\boldsymbol{f}}^b_{\mathrm{sf}} + \boldsymbol{g}^n$, gives the result

$$\dot{\boldsymbol{V}}^n \approx \begin{bmatrix} \cos\gamma & 0 & \sin\gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -g(\sin\gamma - \cos\gamma\cdot\delta\gamma_x) \\ 0 \\ g(\cos\gamma + \sin\gamma\cdot\delta\gamma_z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} = g\begin{bmatrix} \cos^2\gamma\cdot\delta\gamma_x + \sin^2\gamma\cdot\delta\gamma_z \\ 0 \\ \sin\gamma\cos\gamma(\delta\gamma_z - \delta\gamma_x) \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Similar to (21), assuming m cycles of uniform rolling rotation and integrating (23), the variation of SINS eastern velocity errors is given by

$$\Delta V^n_E = \int_0^{\frac{2m\pi}{\omega_y}} \dot{V}^n_E \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{2m\pi}{\omega_y}} g(\cos^2\omega_y t\cdot\omega_y\tau_{A,x} + \sin^2\omega_y t\cdot\omega_y\tau_{A,z})\mathrm{d}t = m\pi g(\tau_{A,x} + \tau_{A,z}). \tag{24}$$

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Obviously, parameters $\tau_{A,x}$ and $\tau_{A,z}$ cannot be separated in (24) by only one single-axis rotation testing. Assuming $\tau_{A,x} = \tau_{A,z}$, (24) is completely consistent with the result in [17]. Therefore, the research in [17] can be seen as a special case study in this paper.

It is noted that there are some differences between these two data processing methods. In Method II, actual specific force outputs are directly used for the navigation velocity updating. It avoids the inconvenience of constructing virtual specific forces, but three rotation tests, by placing ox^b, oy^b and oz^b axes in the horizontal and the north orientations respectively, are demanded to separately identify all of the time-asynchrony parameters. While in Method I, two time-asynchrony parameters can be obtained within the individual rotation test. Therefore, only two rotation tests, such as rotations about ox^b-axis and oy^b-axis, are enough to solve all of the three parameters.

4. Testing and analyses

The fiber optic gyro (FOG) SIMU and the swaying turntable are two kinds of main equipment used in the following laboratory experiments, where the FOG-SIMU is close to inertial-grade with a gyro bias stability of about 0.01 (°)/h and an accelerometer bias repeatability of about $5 \times 10^{-5}g$. Although the gyro and accelerometer outputs for this FOG-SIMU are in angular and velocity increment mode, it can be proved easily that the results from (14), (22) and (24) are still applicable.

The main performances of the turntable are as follows: angular position accuracy 2″, angular rate accuracy and smoothness 5×10^{-5} (within 360°), swaying amplitude $\geqslant 10°$, swaying frequency $\leqslant$1 Hz.

4.1 Gyro testing

Firstly, the FOG-SIMU is installed on the swaying turntable with $x^by^bz^b$ coordinate axes approximately pointing to $\mathrm{E-N-U}$ geographic orientations respectively. After a 10 min initial fine alignment on the stationary base, FOG-SIMU goes into a navigation mode of attitude updating, and the velocity updating can be negligible or directly set to 0. Record the turntable's initial angular position and keep stationary for a short time, then undertake sinusoidal swaying about the diagonal of FOG-SIMU ox^b and oy^b axes with swaying amplitude 10° and frequency 1 Hz. The swaying duration is about 33 s. When it stops, restore the turntable to its initial position and keep stationary for short time.

Fig. 3 shows the azimuth variation in the SINS attitude updating process. It indicates that azimuth variation changes very slowly in both stationary stages, but an obvious and linear drift trend occurs during the swaying stage, which is obviously caused by the time-asynchrony error between ox^b and oy^b gyros.

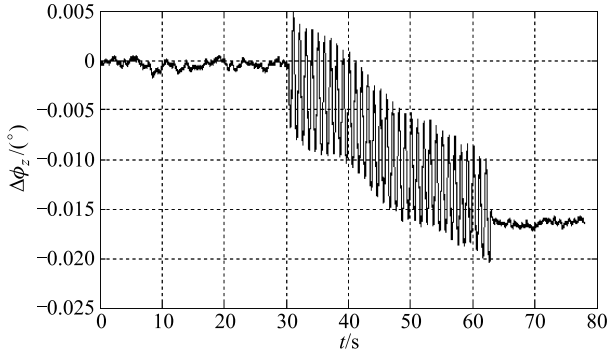


Fig. 3 Relative azimuth variation for gyro testing

In Fig. 3, the azimuth variation between two stationary stages is about –0.016°, which is equivalent to the misalignment drift angle $\Delta\bar{\phi}_z$. Substituting the aforementioned experimental parameters into (13), yields $\dfrac{-0.016^\circ}{33\ \mathrm{s}} = (10^\circ)^2 \times (2\pi \times 1\ \mathrm{Hz})^2 \times \dfrac{\tau_{G,x} - \tau_{G,y}}{4}$, then gives the solution with arrangement $\tau_{G,x} - \tau_{G,y} = -0.028\ \mathrm{ms}$.

Due to the gyro random drift error, about 0.001° variation in Fig. 3 during stationary stages, plus the turntable accuracy 2″, the uncertainty of the gyro time-asynchrony error is estimated by $0.028\ \mathrm{ms} \times (0.001^\circ + 2'')/0.016^\circ \approx 0.003\ \mathrm{ms}$.

Similarly, when the turntable sways about the diagonal of FOG-SIMU y^bz^b axes, the result of $\tau_{G,y} - \tau_{G,z} = 0.039$ ms can be obtained from the testing. While swaying about the diagonal of SIMU y^bz^b axes, $\tau_{G,z} - \tau_{G,x} = -0.017$ ms is gotten.

Finally, it is easy to verify that the above three time-asynchrony error values in these tests can almost form a closed-loop relationship, as $(\tau_{G,x} - \tau_{G,y}) + (\tau_{G,y} - \tau_{G,z}) + (\tau_{G,z} - \tau_{G,x}) = (-0.028\ \mathrm{ms}) + 0.039\ \mathrm{ms} + (-0.017\ \mathrm{ms}) = -0.006\ \mathrm{ms} \approx 0$.

4.2 Accelerometer testing

In the previous subsection of gyro time-asynchrony testing and compensation, the oz^b-axis gyro output time is taken as synchronization reference, so the gyro triad is considered to be well synchronized. In this subsection, assume that inner lever arm errors for accelerometers have been pre-compensated before the time-asynchrony testing.

Similar to the FOG-SIMU installation for gyro testing, let $x^by^bz^b$ coordinate axes approximately point to $\mathrm{E-N-U}$ geographic orientations respectively. After a 10 min initial fine alignment on the stationary base, FOG-SIMU carries out both attitude and velocity updating simultaneously. In the attitude updating algorithm, it takes

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

advantage of the gyro data with time-asynchrony compensation to minimize attitude errors. While in the velocity updating algorithm, it utilizes the new specific force vector constructed by (19) as the input. Rotate the turntable about FOG-SIMU oy^b-axis with an angular rate 50 (°)/s. After each cycle of turntable rotations, keep it stationary for a short time, and a total rotation of three cycles is experienced. Using the data processing method presented in Subsection 3.1, the SINS eastern velocity variation is obtained and shown in Fig. 4.

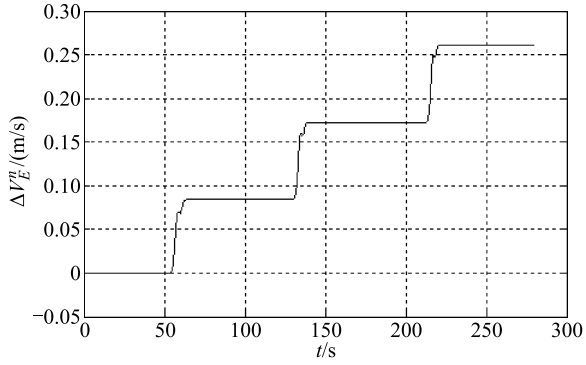


Fig. 4 Eastern velocity variation for accelerometer testing

In Fig. 4, the total eastern velocity variation within three cycles of turntable rotation is 0.262 m/s. Substituting the above experimental parameters into (21), we will get the solution.

$$\tau_{A,x} = \frac{\Delta V_E^n}{m\pi g} = \frac{0.262\ \mathrm{m/s}}{3 \times \pi \times 9.8\ \mathrm{m/s^2}} \approx 2.837\ \mathrm{ms}$$

In a similar way as getting $\tau_{A,x}$, we will have $\tau_{A,y} = 2.262$ ms and $\tau_{A,z} = 2.442$ ms according to more laboratory experiments, but with no detail necessarily repeated here.

To sum up all the testing results of gyros and accelerometers, a schematic diagram for time-asynchrony relationships between FOG-SIMU sensors is shown in Fig. 5, where $G_x, G_y, G_z, A_x, A_y, A_z$ are denoted as gyros and accelerometers respectively,

$$\tau_{G,x} - \tau_{G,z} = 0.017\ \mathrm{ms}$$
$$\tau_{G,y} - \tau_{G,z} = 0.039\ \mathrm{ms}$$
$$\tau_{A,y} = 2.262\ \mathrm{ms}$$
$$\tau_{A,z} = 2.442\ \mathrm{ms}$$
$$\tau_{A,x} = 2.837\ \mathrm{ms}.$$

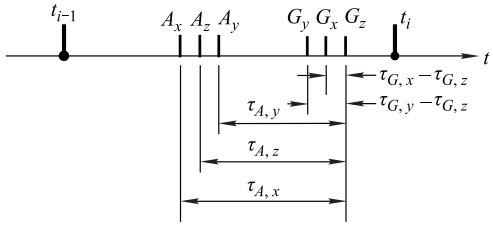


Fig. 5 Time-asynchrony diagram for FOG-SIMU

It shows that the time-asynchrony errors between gyros are relatively small, only in the order of 0.01 ms, and the time-asynchrony errors between accelerometers are in the order of 0.1 ms, while the time-asynchrony errors between gyros and accelerometers are comparatively large, in the order of 1 ms. Note that the time interval between the gyro G_z output and the navigation computer sampling time t_i has not yet been solved by the testing method in this paper. Surely, this time difference affects little on the accuracy of the pure inertial navigation algorithm, but it is likely to bring negative impact when SIMU is integrated with other devices, such as in high-precision SINS/GPS integrated navigation solution, which needs further studies.

5. Conclusions

In actual SIMU, in addition to the time-asynchrony between the gyro triad and the accelerometer triad, the time-delay characteristics of each gyro or each accelerometer are always not identical, and these will also lead to corresponding time-asynchrony errors in SINS attitude and velocity updating algorithms. In this paper, the formulas between time-asynchrony parameters and platform misalignment angles, and between time-asynchrony parameters and navigation velocity errors, are derived in detail, which provides a theoretical basis for laboratory testing design and also provides methods for time-asynchrony parameter identification. Finally, relative time-asynchrony parameters between inertial sensors are obtained in experimental testing using FOG-SIMU. The testing results show that the time-asynchrony parameters between gyros or between accelerometers are much smaller than that between the gyro triad and the accelerometer triad. Even so, more attention is worthy to be paid to these small parameters especially for high-precision SINS under the severe environment. Careful testing and compensation is of great importance for the improvement of SINS navigation accuracy.

References

[1] R. B. Miller. A new strapdown attitude algorithm. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1983, 6(4): 287 – 291.

[2] C. G. Park, K. J. Kim, J. G. Lee, et al. Formalized approach to obtaining optimal coefficients for coning algorithms. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 1999, 22(1): 165 – 168.

[3] P. G. Savage. Strapdown inertial navigation integration algorithm design, part II: velocity and position algorithm. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1998, 21(2): 208 – 221.

[4] M. B. Ignagni. Optimal sculling and coning algorithms for analog-sensor systems. *Journal of Guidance,Control,and Dynamics*, 2012, 35(3): 851 – 860.

[5] Y. Chen, Y. Zhao, Q. S. Li, et al. Coning compensation algorithm with angular rate considering gyroscope frequency characteristics. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2013, 39(9): 1228 – 1232. (in Chinese)

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[6] P. G. Savage. *Strapdown analytics*. 2nd ed. Maple Plain: Strapdown Associates Inc, 2007.
[7] Y. X. Wu, J. L. Wang, D. W. Hu. A new technique for INS/GNSS attitude and parameter estimation using online optimization. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2014, 62(10): 2642 – 2655.
[8] J. S. Xu, Y. J. Wang, Z. C. Xiao. Rapid transfer alignment for SINS of carrier craft. *Journal of Systems Engineering and Electronics*, 2013, 24(2): 303 – 308.
[9] G. M. Yan, W. S. Yan, D. M. Xu. Analysis and compensation on inner lever arm effect of strapdown inertial measurement unit. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2008, 16(2): 148 – 153. (in Chinese)
[10] G. M. Yan, Q. Zhou, J. Weng, et al. Inner lever arm compensation and its test verification for SINS. *Journal of Astronautics*, 2012, 33(1): 62 – 67. (in Chinese)
[11] L. Ren, J. B. Du, M. E. Wang. Error analysis and compensation of size effect in INS with IMU rotation. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2013, 34(6): 1424 – 1435. (in Chinese)
[12] C. W. Tan, S. Park. Design of accelerometer-based inertial navigation systems. *IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement*, 2005, 54(6): 2520 – 2530.
[13] J. G. Mark, D. A. Tazartes. Tuning of coning algorithms to gyro data frequency response characteristics. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2001, 24(4): 641 – 647.
[14] P. G. Savage. Coning algorithm design by explicit frequency shaping. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2010, 33(4): 1123 – 1132.
[15] X. F. Pan, W. Q. Wu, M. P. Wu. Optimization of sculling algorithms considering the signal process characteristics. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2007, 15(5): 536 – 541. (in Chinese)
[16] P. G. Savage. Strapdown sculling algorithm design for sensor dynamic amplitude and phase-shift error. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2012, 35(6): 1719 – 1729.
[17] G. M. Yan, Q. Zhang, K. P. He, et al. Study on time-delay compensation of accelerometers in SINS. *Journal of Astronautics*, 2013, 34(12): 1578 – 1583. (in Chinese)
[18] Y. Y. Qin. *Inertial navigation*. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2014. (in Chinese)
[19] Y. Yu, H. Y. Zhang. Coning motion and pseudo-coning motion of SINS. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2006, 4(5): 1 – 4. (in Chinese)
[20] P. G. Savage. Explicit frequency shaped coning algorithms for pseudoconing environments. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, 34(3): 774 – 782.

Biographies



Gongmin Yan was born in 1977. He received his B.S. degree in automatic control and Ph.D. degree in navigation, guidance and control in Northwestern Polytechnical University in 2000 and 2006, respectively. Now he is an associate professor in the School of Automation, Northwestern Polytechnical University. He has authored more than 30 scientific publications including one book. His research interests include inertial navigation, integrated navigation and data fusion.
E-mail: yangongmin@163.com



Xi Sun was born in 1990. She received her B.S. degree in automation in Northwestern Polytechnical University in 2012. Now she is a postgraduate student in the School of Automation, Northwestern Polytechnical University. Her research interests are inertial navigation and IMU calibration.
E-mail: susanxi2008@163.com



Jun Weng was born in 1988. He received his M.S. degree in precise instrument and mechanics from Northwestern Polytechnical University in 2013. Now he is a Ph.D. candidate in the School of Automation, Northwestern Polytechnical University. His research interests mainly include inertial navigation and integrated navigation.
E-mail: npu_wengjun@sina.com



Qi Zhou was born in 1984. He received his B.S. and Ph.D. degrees in Northwestern Polytechnical University in 2007 and 2013, respectively. Now he is an engineer in Xi'an Flight Automatic Control Research Institute, Aviation Industry Corporation of China. His research interests are inertial navigation and integrated navigation.
E-mail: zhouqis@139.com



Yongyuan Qin was born in 1946. He received his M.S. degree of engineering in Northwestern Ploytechnical University in 1981. He is a professor and a Ph.D. supervisor in the School of Automation, Northwestern Polytechnical University. His research interests include gyro technology, inertial navigation, Kalman filtering, data fusion and fault detection.
E-mail: qinyongyuan@nwpu.edu.cn

?1994-2015 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

引文格式:严恭敏,苏幸君,翁浚,等. 基于惯导和无时延滤波器的舰船升沉测量[J]. 导航定位学报,2016,4(2):91-93,107. (YAN Gongmin, SU Xingjun, WENG Jun, et al. Measurement of ship's heave motion based on INS and zero-phase-delay digital filter[J]. Journal of Navigation and Positioning, 2016, 4(2): 91-93, 107.) DOI: 10.16547/j.cnki.10-1096.20160219.

基于惯导和无时延滤波器的舰船升沉测量

严恭敏, 苏幸君, 翁　浚, 秦永元
(西北工业大学 自动化学院, 西安　710072)

摘要: 在利用惯导测量舰船的升沉运动中, 针对传统方法设计的高通数字滤波器存在较大的相位滞后误差(即信号处理后的时间延迟误差)问题, 提出一种滤波器设计方法: 通过先设计传统的无限冲激响应低通滤波器, 再采用互补方法将其转换为无相位滞后的高通滤波器, 解决了信号时延问题; 阐述了舰船升沉测量信号处理过程, 即根据舰船上惯导姿态信息和加速度计采样输出, 解算并给出天向加速度, 通过积分和无时延高通滤波处理, 获得升沉运动信息。最后, 利用海上舰船试验数据进行验证, 结果表明该方法的升沉测量精度提高了一个数量级。

关键词: 升沉运动测量; 惯导; 无时延数字滤波器; 海试
中图分类号: V249.3　　**文献标志码**: A　　**文章编号**: 2095-4999(2016)02-0091-04

Measurement of ship's heave motion based on INS and zero-phase-delay digital filter

YAN Gongmin, *SU Xingjun*, *WENG Jun*, *QIN Yongyuan*
(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: INS (Inertial Navigation System) is always used as a key device to determine the ship's heave motion, while the technique by using a traditional high-pass digital filter exists a large phase delay error, that is, the filtered heave signal output is severely delayed compared with its actual heave motion. Aiming at the mentioned problems, a method for high-pass filter design was proposed. At first a traditional IIR (Infinite Impulse Response) low-pass filter was designed, then with a so-called complementary technique the low-pass filter was converted into zero-phase-delay high-pass filter, which could effectively solve the problem of signal delay. In ship's heave application, the INS accelerometers' specific force outputs were transformed by INS attitude matrix to form vertical acceleration, and then processed by integral and zero-delay high-pass filter to obtain the ship's heave motion parameters. Finally, a sea-trial data was processed offline and the results verified an improvement of one order of magnitude with the proposed filter design technique.

Keywords: heave measurement; INS; zero-phase-delay digital filter; sea-trial

0　引言

舰船在海上航行过程中, 不可避免地会受到海浪和海风等复杂海洋环境因素的扰动, 被动地产生 6 自由度的摇荡运动, 包括 3 个角运动纵摇、横摇和艏摇, 以及 3 个线运动横荡、纵荡和垂荡(即升沉), 其中纵横摇和升沉运动对舰船的影响和危害最大[1]。舰船一般体型大并且吨位重, 其加减速和转向都需要较长时间, 这些主动航行运动通常被视为低频运动, 周期在 30 s 以上; 相比而言, 被动的摇荡运动是与海浪运动频率大体一致的往复运动, 可视为高频运动, 周期通常在 10 s 左右[2-3]。在许多场合, 舰船升沉信息的实时精确测量具有非常重要的应用价值, 比如舰载机的起降、舰载武器的发射、气垫船登陆、钻井平台升沉补偿装置的补偿设计以及舰船补给等[2]。

目前利用惯导和卫星进行组合导航容易实现舰船的高精度 3 维定位, 可达 m 级的绝对定位精度; 但是在升沉应用中往往要求 cm 级的短时相对测量精度, 这是常规组合导航方法难以达到的。

收稿日期: 2015-10-22
第一作者简介: 严恭敏(1977—), 福建建瓯人, 男, 博士, 副教授, 主要从事惯性导航与信息融合理论研究。

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

所以，舰船升沉运动测量还主要是依靠惯导，即利用惯导在垂荡方向的综合加速度输出，通过积分求解升沉运动信息。然而由于惯导系统的误差累积和高度通道发散特性，导致其不适合于精确测量长周期的位移变化，只能用于测量短周期的相对运动。通常借助高通数字滤波器滤除舰船长周期运动和加速度计偏值测量误差的影响[1-5]；但需尽量保留短周期的运动信息，从而实现前述的舰船主动和被动运动频段的分离，获得准确的升沉运动信息。

论文首先介绍了传统高通数字滤波器的设计方法，针对其不足之处改进设计了互补高通滤波器；再给出了利用惯导进行舰船升沉运动测量的基本方法；最后对舰船实测海试数据进行了验证。

1 传统高通滤波器设计方法

数字滤波器设计包括 2 种典型的类型，即有限冲激响应滤波器(finite impulse response，FIR)和无限冲激响应滤波器(infinite impulse response，IIR)。在许多应用场合，FIR 虽然具有严格线性相位的优点，但是其阶数通常比较高[6]。比如当信号采样频率 10 Hz(即周期 0.1 s)时，欲设置通带频率 0.02 Hz(周期 50 s)的滤波器，则大约至少需要 2×10/0.02=1000 阶，在实时处理时计算量较大。因而常常选用 IIR 滤波器，能够有效降低计算量。IIR 滤波器采用递归算法，一般阶数比较低时就能满足高性能信号处理对幅频特性的要求。目前 IIR 和 FIR 2 类数字滤波器的设计方法都已非常成熟，但手动按规则逐步设计还是非常繁琐[7]，往往需借助相应软件工具来实现，比如 Matlab/fdatool 滤波器设计和分析工具。以下主要讨论 IIR 高通数字滤波器的设计。

使用 Matlab/fdatool 工具设计 Butterworth 型高通滤波器，其中采样频率 10 Hz、通带频率 0.02 Hz(0 dB)、阻带频率 0.002 Hz(−40 dB)，结果滤波器传递函数为一个 3 阶的系统，其幅相特性如图 1 所示。从图 1 中可以看出，该滤波器的幅频特性比较完美，但相频特性在靠近阻带附近时存在较大的相位滞后，比如图中在频率 0.02 Hz 处相位滞后约为 1 rad，这相当于 1 rad/2π/0.02 Hz≈8 s 时延。即使有用信号的频段落在高通滤波器通带范围内，相位滞后也会使得滤波输出信号不能实时反映输入的变化，从而带来时延测量误差，比如图 1 中在频率 0.1 Hz 处，时延约为 0.2 rad/2π/0.1 Hz≈0.3 s，这是传统数字滤波器设计方法难以避免的。

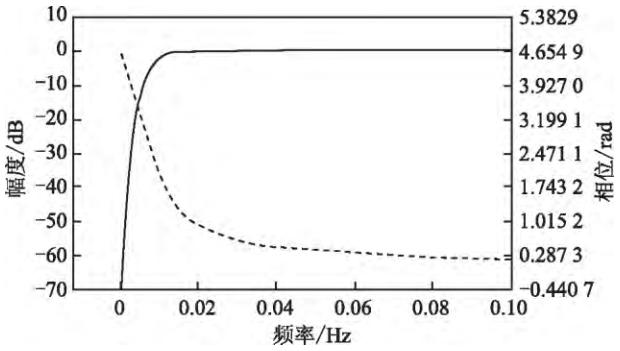


图 1 IIR 高通滤波器的幅相特性

2 无时延互补高通滤波器设计方法

同样以 IIR 滤波器为例，通过互补方法设计无时延高通滤波器的基本思路介绍如下：

对于宽频带的输入信号 $x(z)$，如果信号通过低通滤波器 $H_l(z)$，则输出信号为

$$y_l(z) = H_l(z)x(z)。 \tag{1}$$

它是低频信号。显然，被低通滤波器 $H_l(z)$ 滤除的信号为 $x(z)-y_l(z)$，滤除的主要成分必然是高频的。从互补角度看，如果想保留高频分量，则可定义高频信号为

$$y_h(z) = x(z) - y_l(z)。 \tag{2}$$

即有

$$\begin{aligned} y_h(z) &= x(z) - H_l(z)x(z) = \\ &[1 - H_l(z)]x(z) = H_h(z)x(z)。 \end{aligned} \tag{3}$$

式中

$$H_h(z) = 1 - H_l(z)。 \tag{4}$$

式(4)即为所需的互补高通滤波器的传递函数，它是通过设计传统的低通滤波器 $H_l(z)$ 间接实现的：当 $H_l(z)$ 的阻带衰减足够大时，$H_l(z)$ 对高频信号阻止性强；反过来看，根据互补性可知 $H_h(z)$ 恰好能够让高频信号畅通无阻，并且时延很小，可忽略不计，所以文中称 $H_h(z)$ 为无时延高通滤波器。由此可见，与传统直接设计高通滤波器相比，文中通过转换设计思路，采用互补方法设计的高通滤波器能够有效避免时延问题的影响。

例如，首先设计一个 Butterworth 型低通滤波器，其中采样频率 10 Hz、通带频率 0.002 Hz(0 dB)、阻带频率 0.02 Hz(−40 dB)，再利用上述互补方法如式(4)生成高通滤波器，其幅相特性如图 2 所示。

图 2 显示，利用互补法设计的高通滤波器在高频段(>0.02 Hz)相位滞后近似为零，即几乎不存在时延。当然，互补法滤波器在阻通过渡带的幅频特性不够理想，图中大约在 0.005 Hz 处存在峰

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

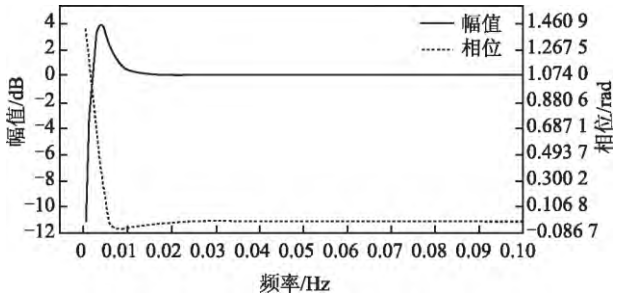


图 2　基于互补法设计的高通滤波器幅相特性

值 4 dB 的增益，这是以高频段的相频特性改善为代价的。

3　舰船升沉运动测量原理

如果舰船上安装捷联惯导系统，它能够给出姿态阵信息 $\boldsymbol{C}_b^n$，利用姿态阵对加速度计测量比力矢量 $\boldsymbol{f}_{sf}^b$ 进行坐标转换可得天向比力(若为平台惯导则无需此转换)，再扣除当地重力加速度 $\boldsymbol{g}^n$，便可获得沿垂荡方向的舰船加速度。以上描述过程根据的是惯导比力方程，具体公式[8]为

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n = \boldsymbol{C}_b^n \boldsymbol{f}_{sf}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{g}^n 。 \quad (5)$$

一般情况下，舰船的航行速度不高，比如小于 30 节，式(5)右端的地球自转和哥氏补偿项 $(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n$ 可忽略不计，简化为

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n = \boldsymbol{C}_b^n \boldsymbol{f}_{sf}^b + \boldsymbol{g}^n 。 \quad (6)$$

取式(6)中的天向分量便是舰船沿垂荡方向的舰船加速度，简记为 a，即令 $a = \dot{v}_U^n$。如果对加速度 a 作 1 次和 2 次积分，则可得天向速度和位移，分别简记为 v 和 h；但是由于加速度计测量中存在零偏误差和噪声，若仅仅是进行简单的积分运算，解得的天向速度和位移会随时间缓慢发散：因此需要滤除加速度、速度和位移中的低频成分影响而仅保留高频成分，即进行高通数字滤波处理，才能获得有用的舰船升沉运动信息。综上所述，升沉运动信号处理过程如图 3 所示，共包含 2 个积分和 3 个高通滤波环节。

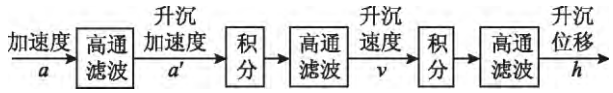


图 3　升沉运动信号处理过程

在图 3 中积分运算在离散域的传递函数表示为

$$H_i(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} 。 \quad (7)$$

如果采用纯积分环节的话，在图 3 中即使高通滤波器 $H_h(z)$ 是稳定的，从加速度输入 a 到升沉位移输出 h 之间的传递函数也是临界稳定的。为了保证整个升沉运动信号处理系统的绝对稳定性，须将纯积分环节修改为惯性积分环节，可令

$$H_i(z) = \frac{1}{1 - e^{T_s/\tau} z^{-1}} 。 \quad (8)$$

式中：T_s 为离散化积分步长(即采样周期)；τ 为惯性积分环节的惯性时间常数，一般选择 τ 大于升沉运动中的最长升沉周期参数。

至此，如果将纯积分改为惯性积分，并将多个高通滤波器合并为 1 个更高阶的高通滤波器，信号处理图 3 可等效为图 4。

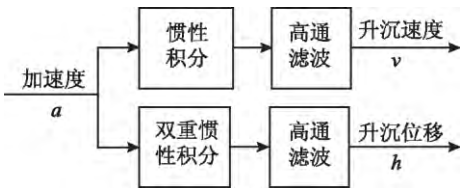


图 4　等效的升沉运动信号处理过程

4　海试验证

利用某型号光纤惯导系统在舰船上进行海试，惯导中陀螺的随机常值漂移约为 0.03°/h，加速度计的逐次启动随机常值偏值约为 200 μg(g = 9.8 m/s²)。舰船大约以 16 节匀速航行，记录下惯导的姿态信息以及原始加速度计采样数据，作事后升沉运动处理和分析。为了评判本文所提升沉运动处理算法的精度，这里同时使用 Matlab 中的零相位滤波器函数 filtfilt(即无时延滤波器，它不能用于实时处理而只能作为事后处理使用[9-10])处理数据，以其输出作为升沉位移精度的参考基准。

图 5 给出了试验数据在 580～610 s 时间段内的升沉位移曲线，图中实线为使用 filtfilt 滤波处理的升沉参考值，升沉幅值最大约 0.2 m、周期约在 4～6 s 之间；虚线为采用本文新方法滤波的结果，它与参考值吻合得比较好，说明了本文算法的高精度；此外，图 5 中还给出了传统高通滤波器的处理结果，如点划线所示，很明显传统方法存在较大的时间延迟误差，时延大约为 0.5 s。

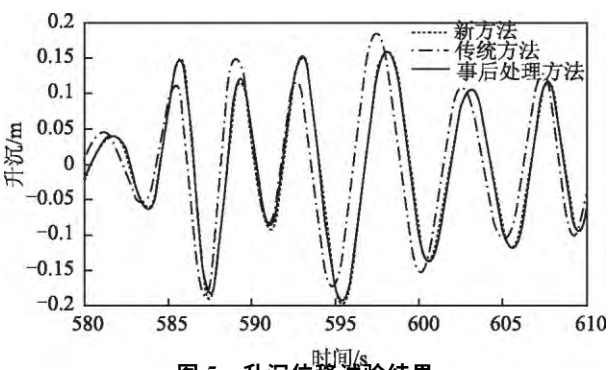


图 5　升沉位移试验结果

(下转第 107 页)

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

sas. VA：ION，2002：816-823.
[10] ALI A S，SUMSUNG L，RIZOS C. Functional models of ordinary kriging for real-time kinematic positioning based on the virtual reference station technique[C]// The Institute of Navigation(ION). Proceedings of the 23rd International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation. Manassas. VA：ION，2010：2513-2521.
[11] 毛田，万卫星，孙凌峰. 用 Kriging 方法构建中纬度区域电离层 TEC 地图[J]. 空间科学学报，2007，27(4)：279-285.
[12] 杨聪. GPS 虚拟参考站算法研究及软件开发[D]. 北京：清华大学，2009：66-67.
[13] 王家华，高海余，周叶. 克里金地质绘图技术—计算机的模型和算法[M]. 北京：石油工业出版社，1990：150-154.
[14] WIELGOSZ，GREJNER B D，ALI A S. Regional ionosphere mapping with Kriging and multiquadric methods[J]. Journal of Global Positioning Systems，2003，2(1)：48-55.
[15] 翟进乾. 克里金(Kriging)插值方法在煤层分布检测中的应用研究[D]. 太原：太原理工大学，2008：30-37.
[16] 颜慧敏. 空间插值技术的开发与实现[D]. 成都：西南石油学院，2005：14-17.

(上接第 93 页)

同样以 filtfilt 滤波结果作为参考基准，表 1 给出了传统升沉处理方法和本文方法的均方根值(root meam square，RMS)精度统计结果。由表 1 可见：由于时延的影响，传统方法的实时升沉测量精度不高，误差约为最大升沉幅值的 1/3；而新方法的精度提高了约 1 个数量级。

表 1　升沉测量精度统计

	传统方法	新方法
RMS/cm	5.57	0.52

5　结束语

舰船在航行过程中由于受到海浪等因素干扰，会产生 6 自由度摇荡，对其进行实时测量和补偿具有重要的应用价值。传统方法设计的数字高通滤波器不可避免地存在较大的相位滞后或时延问题，论文通过转变滤波器的设计思路，即先设计低通数字滤波器，再基于互补方法转换为高通滤波器，从而获得无时延高通数字滤波器。最后，对舰船海上航行捷联惯导实测数据进行了升沉运动信号处理和分析，结果表明该滤波器具有明显的测量无时延和精度高等优点。

参考文献

[1] 王允峰. 船舶纵横摇和升沉运动预报方法研究[D]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学，2010：1-2.
[2] 孙伟，孙枫. 基于惯导解算的舰船升沉测量技术[J]. 仪器仪表学报，2012，33(1)：167-172.
[3] 李德彪. 激光陀螺捷联惯导垂向通道测量研究[J]. 光学与光电技术，2012，10(3)：51-54.
[4] iXBlue. ixblue-ps-octans_v-04-2015. pdf[EB/OL]. (2015-04-01)[2015-11-15]. http://www. ixblue. com/products/octans.
[5] 刘星伯. 基于捷联航姿系统的舰船瞬时线运动信息测量研究[D]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学，2009：2-3.
[6] 奥本海姆 A V，谢弗 R W，巴克 J R. 离散时间信号处理[M]. 刘树棠，黄建国，译. 2 版. 西安：西安交通大学出版社，2001：352-412.
[7] 刘兴，张鹤. 基于 MATLAB 的 IIR 数字滤波器的设计与仿真分析[J]. 机电设备，2015(5)：67-72.
[8] 秦永元. 惯性导航[M]. 2 版. 北京：科学出版社，2015：224-226.
[9] 纪跃波，秦树人，汤宝平. 零相位数字滤波器[J]. 重庆大学学报，2000，23(6)：4-7.
[10] 吴国乔，王兆华. 基于全相位的零相位数字滤波器的设计方法[J]. 电子与信息学报，2007，29(3)：574-577.

?1994-2016 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

一种求解姿态不可交换误差补偿系数的通用方法

严恭敏，杨小康，翁 浚，秦永元
（西北工业大学自动化学院，西安 710072）

摘 要：针对捷联惯导姿态更新算法中的不可交换误差补偿系数求解问题，论文在多项式角运动条件下建立了角速度多项式、角增量多项式与多子样角增量采样之间的线性关系，根据等效旋转矢量微分方程中不可交换误差多项式的向量叉乘特点，将叉乘转化为多项式系数的卷积运算，推导给出了计算任意子样数不可交换误差补偿系数的数值方法，新方法易于软件编程实现。最后，通过仿真计算给出了 2～6 子样误差补偿系数，其中 2～4 子样结果与已有文献完全相同，而 5、6 子样为首次给出。

关键词：捷联姿态更新算法；等效旋转矢量；不可交换误差；数值解
中图分类号：V249．3 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-1328(2017)07-0723-05
DOI：10.3873/j.issn.1000-1328.2017.07.007

A General Method to Obtain Noncommutativity Error Compensation Coefficients for Strapdown Attitude Algorithm

YAN Gong-min, YANG Xiao-kang, WENG Jun, QIN Yong-yuan
(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: In a strapdown attitude updating algorithm, a general numerical method for obtaining the multi-sample noncommutativity error compensation coefficients is presented. Under the condition of the angular motion expressed as polynomial, the linear relationships between the angular velocity polynomial, angular increment polynomial and multi-sample angular increments are established in this paper. According to the vector cross product operation of the noncommutativity error polynomial in the equivalent rotation vector differential equation, the cross product is converted into the convolution operation of the polynomial coefficients. Then, the numerical methods to compute the noncommutativity error compensation coefficients of the arbitrary multiple samples are presented in deduction, which are easy to be implemented with computer programming. Finally, simulations are carried out to obtain the 2 ~ 6-sample compensation coefficients, in which the 2 ~ 4-sample coefficients are consistent with the existing literatures and the 5 or 6-sample coefficients are firstly proposed by the authors.

Key words: Strapdown attitude algorithm; Equivalent rotation vector; Noncommutativity error; Numerical solution

0 引 言

目前，捷联惯导系统的姿态更新算法中普遍采取的思路是[1-2]：根据不可交换误差补偿算法，使用陀螺角增量的多子样采样构造等效旋转矢量，尽量消除转动不可交换误差，再利用等效旋转矢量计算姿态更新四元数，实现姿态更新。等效旋转矢量多子样算法的数学理论基础是等效旋转矢量微分方程（Bortz 方程）[3]。由 Bortz 方程求解多子样不可交换误差补偿系数的方法主要有两类：一是在纯圆锥运动假设条件下求解的所谓优化圆锥误差补偿系数，该问题业已得到了比较圆满的解决，理论上获得了求解任意子样系数的通式[4-6]；二是在多项式角运动假设条件下，基于等效旋转矢量泰勒级数展开法

收稿日期：2017-03-14； **修回日期**：2017-05-15
基金项目：航空科学基金（20165853041）

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的不可交换误差补偿系数求解，虽然研究者们求得了一系列不同子样数的误差补偿系数[7-10]，甚至有研究者考虑了 Bortz 方程不可交换误差高阶项的影响，提出了高阶补偿算法[11]，但是目前还没有得到这些方法的求解通式，每当遇到一种新的子样数算法就得重新推导补偿系数，特别在高子样数情况下，推导过程异常繁琐。

在多项式角运动条件下，论文放弃了传统的冗长而繁琐的公式推导思路，而通过仔细分析基于等效旋转矢量泰勒级数展开法求解不可交换误差补偿系数的特点，给出了求解补偿系数的通用数值算法，新算法简洁，易于软件编程实现。论文求解不可交换误差系数的方法与传统方法相比，基本理论是一样的，都是基于 Bortz 方程的一阶近似，在圆锥误差积分中以角增量代替等效旋转矢量，通过角速度的多项式假设和等效旋转矢量的泰勒级数展开，比较级数低阶项与角增量叉乘的系数，联立起来建立方程组，从而求得误差补偿系数；但是论文提出的数值求解方法，在建立方程组和求解系数时都非常方便，省去了传统采用公式直接推导的繁琐，具有很好的通用性。论文通过仿真计算，首次正确给出了 5 子样和 6 子样误差补偿系数。

1 角运动的多项式表示

在实际捷联惯导系统中，大多数陀螺采样直接获得的是角增量信息，而姿态等效旋转矢量更新算法的推导过程需要用到角速度作为输入，因此，在角运动为多项式形式假设条件下先给出由角增量信息构造角速度的方法。

假设角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 为关于时间 t 的 $(N-1)$ 次多项式，即

$$\boldsymbol{\omega}(t) = [\boldsymbol{w}_{N-1} \quad \boldsymbol{w}_{N-2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_0] \begin{bmatrix} t^{N-1} \\ t^{N-2} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_x \\ \boldsymbol{W}_y \\ \boldsymbol{W}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{N-1} \\ t^{N-2} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{W} \begin{bmatrix} t^{N-1} \\ t^{N-2} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

式中：$\boldsymbol{w}_j(j = N-1, N-2, \cdots, 0)$ 为列向量，$\boldsymbol{W}_i(i = x, y, z)$ 为行向量，$\boldsymbol{W}$ 为 $3 \times N$ 系数矩阵。

对式(1)积分，可得相对于 0 时刻的总角增量为

$$\Delta\boldsymbol{\theta}(t) = \int_0^t \boldsymbol{\omega}(t)\,\mathrm{d}t = [\boldsymbol{a}_N \quad \boldsymbol{a}_{N-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_1] \begin{bmatrix} t^N \\ t^{N-1} \\ \vdots \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_x \\ \boldsymbol{A}_y \\ \boldsymbol{A}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^N \\ t^{N-1} \\ \vdots \\ t \end{bmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} t^N \\ t^{N-1} \\ \vdots \\ t \end{bmatrix} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{a}_j$ 为列向量且有 $\boldsymbol{a}_{j+1} = \boldsymbol{w}_j/(j+1)$，$\boldsymbol{A}_i$ 为行向量，$\boldsymbol{A}$ 为 $3 \times N$ 系数矩阵。

假设陀螺采样间隔为 h，在时间段 $(-ph, nh]$ 内进行了 N 次角增量采样($p \geqslant 0, n > 0$ 且 $p + n = N$)，分别记为 $\Delta\boldsymbol{\theta}_j(j = -p+1, -p+2, \cdots, n)$，对角速度积分可得角增量采样，如下

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} \boldsymbol{\omega}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{t_j^N - t_{j-1}^N}{N}\boldsymbol{w}_{N-1} + \frac{t_j^{N-1} - t_{j-1}^{N-1}}{N-1}\boldsymbol{w}_{N-2} + \cdots + (t_j - t_{j-1})\boldsymbol{w}_0 \tag{3}$$

式中：简记 $t_j = jh$，当 $t_j > 0$ 时表示当前姿态更新周期内的角增量采样；而当 $t_j \leqslant 0$ 时表示利用了前面姿态更新周期的角增量信息。

根据式(3)，将相继 N 次角增量采样合并在一起写成矩阵形式，有

$$\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{\Gamma} \tag{4}$$

式中：记

$$\boldsymbol{\Theta} = [\Delta\boldsymbol{\theta}_{-p+1} \quad \Delta\boldsymbol{\theta}_{-p+2} \quad \cdots \quad \Delta\boldsymbol{\theta}_n]$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \begin{bmatrix} \dfrac{t_{-p+1}^N - t_{-p}^N}{N} & \dfrac{t_{-p+2}^N - t_{-p+1}^N}{N} & \cdots & \dfrac{t_n^N - t_{n-1}^N}{N} \\ \dfrac{t_{-p+1}^{N-1} - t_{-p}^{N-1}}{N-1} & \dfrac{t_{-p+2}^{N-1} - t_{-p+1}^{N-1}}{N-1} & \cdots & \dfrac{t_n^{N-1} - t_{n-1}^{N-1}}{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{-p+1} - t_{-p} & t_{-p+2} - t_{-p+1} & \cdots & t_n - t_{n-1} \end{bmatrix}$$

由式(4)容易求解得到以角增量表示的多项式系数矩阵

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \tag{5}$$

由此可见，根据相继的 N 次角增量采样，通过式(5)和式(1)可以构造一个 $N-1$ 次的多项式角速度拟合；显然，角速度系数 $\boldsymbol{w}_j$ 及角增量系数 $\boldsymbol{a}_j$ 都是所有角增量采样 $\Delta\boldsymbol{\theta}_j$ 的线性函数。

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

2　不可交换误差与补偿系数之间关系推导

等效旋转矢量微分方程(Bortz 方程) 为[3]:

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}(t)\times\boldsymbol{\omega}(t) + \frac{1}{|\boldsymbol{\phi}(t)|^2}\left(1-\frac{|\boldsymbol{\phi}(t)|}{2}\cot\frac{|\boldsymbol{\phi}(t)|}{2}\right)\times[\boldsymbol{\phi}(t)\times]^2\boldsymbol{\omega}(t) \tag{6}$$

式(6) 在理论上严格成立,但较复杂,不便于工程使用,通行的做法是将右端第三项视为小量,并将第二项中的等效旋转矢量近似为角增量,从而近似有

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) \approx \boldsymbol{\omega}(t) + \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{U}(t) \tag{7}$$

式中: 简记 $\boldsymbol{U}(t) = \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\boldsymbol{\omega}(t)$。

若将式(1) 和式(2) 的列向量系数多项式表示法代入式(7) ,可得

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) + \frac{1}{2}\left([\boldsymbol{a}_N \quad \boldsymbol{a}_{N-1} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}_1]\begin{bmatrix} t^N \\ t^{N-1} \\ \vdots \\ t \end{bmatrix}\right)\times\left([\boldsymbol{w}_{N-1} \quad \boldsymbol{w}_{N-2} \quad \cdots \quad \boldsymbol{w}_0]\begin{bmatrix} t^{N-1} \\ t^{N-2} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{\omega}(t) + [\boldsymbol{u}_{2N-2} \quad \boldsymbol{u}_{2N-3} \quad \cdots \quad \boldsymbol{u}_2]\begin{bmatrix} t^{2N-2} \\ t^{2N-3} \\ \vdots \\ t^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega}(t) + \boldsymbol{U}\begin{bmatrix} t^{2N-2} \\ t^{2N-3} \\ \vdots \\ t^2 \end{bmatrix} \tag{8}$$

式中: $\boldsymbol{u}_m = \frac{1}{2}\sum_{i+j=m}\boldsymbol{a}_i\times\boldsymbol{w}_j\ (m = 2,3,\cdots,2N-2;\ i = 1,2,\cdots,N;\ j = 0,1,\cdots,N-1)$,即 $\boldsymbol{u}_m$ 为所有时间幂次之和为 m 的角增量系数 $\boldsymbol{a}_i$ 与角速度系数 $\boldsymbol{w}_j$ 叉乘和。实际上,由于 $\boldsymbol{a}_N = \boldsymbol{w}_{N-1}/N$,因而有 $\boldsymbol{a}_N\times\boldsymbol{w}_{N-1} = \boldsymbol{0}$,这说明叉乘 $\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\boldsymbol{\omega}(t)$ 的 t^{2N-1} 项系数必为 0; 由于 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{w}_0$,因而 $\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\boldsymbol{\omega}(t)$ 的一次项系数也为 0。

由式(1) 和式(2) 的行向量系数多项式表示法代入式(7) ,考虑到叉乘运算规则,可得

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t) = \boldsymbol{\omega}(t) + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_x \\ \boldsymbol{A}_y \\ \boldsymbol{A}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^N \\ t^{N-1} \\ \vdots \\ t \end{bmatrix}\right)\times\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_x \\ \boldsymbol{W}_y \\ \boldsymbol{W}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^{N-1} \\ t^{N-2} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{\omega}(t) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_y * \boldsymbol{W}_z - \boldsymbol{A}_z * \boldsymbol{W}_y \\ \boldsymbol{A}_z * \boldsymbol{W}_x - \boldsymbol{A}_x * \boldsymbol{W}_z \\ \boldsymbol{A}_x * \boldsymbol{W}_y - \boldsymbol{A}_y * \boldsymbol{W}_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^{2N-1} \\ t^{2N-2} \\ \vdots \\ t \end{bmatrix} \tag{9}$$

式中: 运算符“* ”表示两多项式系数向量之间的卷积运算。与式(8) 相比,利用式(9) 卷积计算系数矩阵 $\boldsymbol{U}$ 较方便。

记 $T = nh$ 为等效旋转矢量更新周期,将 $\boldsymbol{\phi}(T)$ 在时间 $t = 0$ 处展开成泰勒级数,考虑到 $\boldsymbol{\phi}(0) = \Delta\boldsymbol{\theta}(0) = \boldsymbol{0}$ 及式(7) 、式(8) ,则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}(T) &= \boldsymbol{\phi}(0) + \sum_{m=1}^{2N-1}\frac{T^m}{m!}\boldsymbol{\phi}^{(m)}(0) = \sum_{m=1}^{2N-1}\frac{T^m}{m!}[\boldsymbol{\omega}^{(m-1)}(0) + \boldsymbol{U}^{(m-1)}(0)] = \\ &\sum_{m=1}^{N}\frac{T^m}{m!}\boldsymbol{\omega}^{(m-1)}(0) + \sum_{m=3}^{2N-1}\frac{T^m}{m!}\boldsymbol{U}^{(m-1)}(0) = \\ &\sum_{m=1}^{N}\frac{T^m}{m!}\Delta\boldsymbol{\theta}^{(m)}(0) + \sum_{m=3}^{2N-1}\frac{T^m(m-1)!}{m!}\boldsymbol{u}_{m-1} = \\ &\Delta\boldsymbol{\theta}(T) + \sum_{m=3}^{2N-1}\frac{T^m}{m}\boldsymbol{u}_{m-1}\end{aligned} \tag{10}$$

式(10) 移项,可得

$$\boldsymbol{\phi}(T) - \Delta\boldsymbol{\theta}(T) = \sum_{m=3}^{2N-1}\frac{T^m}{m}\boldsymbol{u}_{m-1} \tag{11}$$

由第 1 节分析可知, $\boldsymbol{w}_j$ 和 $\boldsymbol{a}_j$ 均为角增量采样 $\Delta\boldsymbol{\theta}_j$ 的线性函数; 由式(8) 可知, $\boldsymbol{u}_m$ 可表示为 $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{w}_j$ 叉乘和,因此 $\boldsymbol{u}_m$ 可以表示为各个角增量 $\Delta\boldsymbol{\theta}_j$ 之间的叉乘和形式,从而有

$$\sum_{m=3}^{2N-1}\frac{T^m}{m}\boldsymbol{u}_{m-1} = \sum_{i=-p+1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}k_{ij}\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times\Delta\boldsymbol{\theta}_j \tag{12}$$

简记为

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{b}\boldsymbol{K} \tag{13}$$

式中: $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示一个等效旋转矢量更新周期内的不可交换误差,为 3 维列向量; $\boldsymbol{b}$ 是以角增量叉乘 $\Delta\boldsymbol{\theta}_i \times \Delta\boldsymbol{\theta}_j$ 为列向量的 $3 \times \frac{N(N-1)}{2}$ 维矩阵; $\boldsymbol{K}$ 是以待定误差补偿系数 k_{ij} 为元素的 $\frac{N(N-1)}{2}$ 维列向量。

根据式(13),若已获得一系列的测试值 $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{\varepsilon}_l^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,则有

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{b}_l \end{bmatrix} \boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{K} \tag{14}$$

从式(14)可求得误差补偿系数向量 $\boldsymbol{K}$ 的最小二乘解

$$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} \tag{15}$$

3 仿真与分析

综合第 1 ~ 2 节的公式推导,下面给出求解不可交换误差补偿系数的详细步骤:

1) 按需求给定子样数 N(包括 p 和 n 的值),不妨将等效旋转矢量更新周期作归一化处理,即令 $T = 1$ 和 $h = 1/n$,预先计算式(4)中的系数矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ 备用;

2) 随机模拟生成一组角增量采样数据 $\boldsymbol{\Theta} = [\Delta\boldsymbol{\theta}_{-p+1} \quad \Delta\boldsymbol{\theta}_{-p+2} \quad \cdots \quad \Delta\boldsymbol{\theta}_n]$,按式(5)和式(2)分别计算角速度系数矩阵 $\boldsymbol{W}$ 和角增量系数矩阵 $\boldsymbol{A}$;

3) 根据式(9)卷积计算系数矩阵 $\boldsymbol{U}$;

4) 根据式(12)或式(13)计算不可交换误差 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和角增量叉乘矩阵 $\boldsymbol{b}$,确定一个量测方程;

5) 重复步骤 2 ~ 4,建立一组如式(14)的量测方程组,一般可选择 $l = N$;

6) 按式(15)求解不可交换误差补偿系数向量 $\boldsymbol{K}$,完毕。

按照上述步骤,编写了 Matlab\PSINS 工具箱仿真计算程序[12],表 1 列出了子样数 $N = 2 \sim 6$($p = 0$)的仿真结果,为简洁,误差补偿系数 k_{ij} 仅保留了 6 位小数,完全可满足实际应用对算法精度的要求。若不计数值表示的舍入误差,表 1 中 2 ~ 4 子样结果与文献[4,7 - 10]的结果完全一致(文献中通常以分数形式给出)。传统基于等效旋转矢量泰勒级数展开法求解误差补偿系数的理论思路并不复杂,但公式推导过程比较繁琐,文献[13]给出了 5 子样的推导过程。然而与本文相比,文献[13]中式(20)明显是错的,原因在于文献[13]中式(10)的系数推导失误,1/12 应为 1/14。本文求解误差补偿系数的方法和软件编程更简便,表 1 列出了 6 子样误差补偿系数,读者还可根据需要任意设置子样数 N(包括 p 和 n),运行程序后便可立即得到相应的系数,避免了繁琐的公式推导过程。

表 1 2 ~ 6 子样不可交换误差补偿系数

Table 1 2 ~ 6 sample noncommutativity error compensation coefficients

k_{ij}		子样数 N				
		2	3	4	5	6
下标组合 ij	12	0.666667	0.712500	0.778836	0.850316	0.922597
	13		0.412500	0.353439	0.240265	0.086396
	14			0.556614	0.620556	0.773323
	15				0.459002	0.393063
	16					0.531764
	23		0.712500	0.692063	0.716146	0.762760
	24			0.353439	0.381669	0.340076
	25				0.620556	0.590985
	26					0.393063
	34			0.778836	0.716146	0.707186
	35				0.240265	0.340076
	36					0.773323
	45				0.850316	0.762760
	46					0.086396
	56					0.922597

从表 1 不难看出,对于任意一子样数 N($p = 0$),不可交换误差补偿系数存在对称性,即有 $k_{i,j} = k_{N-j+1,N-i+1}$,以 6 子样为例,将表 1 中的 6 子样系数重新整理成表 2 形式,可见误差系数关于副对角线是对称的。

表 2 6 子样系数的对称性

Table 2 Symmetry of 6 sample coefficients

k_{ij}		下标 j				
		2	3	4	5	6
下标 i	1	0.922597	0.086396	0.773323	0.393063	0.531764
	2		0.762760	0.340076	0.590985	0.393063
	3			0.707186	0.340076	0.773323
	4				0.762760	0.086396
	5					0.922597

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

4 结　论

在传统的捷联惯导姿态不可交换误差补偿算法中,不论是基于纯圆锥运动假设的优化算法还是基于多项式角运动的一般补偿算法,都是在一定近似假设条件下进行推导的,比如前者假设锥角为小角度而后者忽略了 Bortz 方程中高阶项的影响,从而使得结果也是近似的,特别对于高子样算法而言,其误差补偿往往达不到理论宣称的效果,有时高子样算法的精度反而不如低子样算法[14]。显然,片面追求高子样数的算法是不合适的,不一定能带来实用效果的明显改善。但是,从理论研究角度看,本文给出了求解各种子样数误差补偿系数的通用方法,为实际应用和算法选择提供了更多的参考和便利。

参　考　文　献

[1] Savage P G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 1: attitude agorithms [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(1): 19 – 28.

[2] 周江华,苗育红,肖刚. 扩展旋转矢量捷联姿态算法 [J]. 宇航学报, 2003, 24(4): 414 – 417. [Zhou Jiang-hua, Miao Yu-hong, Xiao Gang. Extended rotation vector based strapdown attitude algorithms [J]. Journal of Astronautics, 2003, 24(4): 414 – 417.]

[3] Bortz J E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971, 7(1): 61 – 66.

[4] Ignagni M B. Efficient class of optimized coning compensation algorithms [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1996, 19(2): 424 – 429.

[5] Park C G, Kim K J, Lee J G, et al. Formalized approach to obtaining optimal coefficients for coning algorithms [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(1): 165 – 168.

[6] Tang C Y, Chen X Y. A generalized coning correction structure for attitude algorithms [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2014: 1 – 15.

[7] Miller R. A new strapdown attitude algorithm [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1983, 6(4): 287 – 291.

[8] Lee J G, Yoon Y J, Mark J G, et al. Extension of strapdown attitude algorithm for high-frequency base motion [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1990, 13(4): 738 – 743.

[9] 王立冬,孟亚峰,高庆. 基于角增量和角速率的旋转矢量算法的等效性 [J]. 宇航学报, 2014, 35(3): 340 – 344. [Wang Li-dong, Meng Ya-feng, Gao Qing. Equivalence analysis of rotation vector algorithm based on angle increment and angular velocity [J]. Journal of Astronautics, 2014, 35(3): 340 – 344.]

[10] 张泽,段广仁. 捷联惯导四子样旋转矢量姿态更新算法 [J]. 控制工程, 2010, 17(3): 272 – 274. [Zhang Ze, Duan Guang-ren. On four-sample rotation vector algorithm for SINS attitude updating [J]. Control Engineering of China, 2010, 17(3): 272 – 274.]

[11] Wang M S, Wu W Q, Wang J L, et al. High-order attitude compensation in coning and rotation coexisting environment [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2015, 51(2): 1178 – 1190.

[12] 严恭敏. 高精度捷联惯性导航系统 Matlab 工具箱 [EB/OL]. (2013 – 09 – 16) [2017 – 2 – 20]. http://blog.sina.com.cn/s/blog_40edfdc90101heg0.html.

[13] 靳聪,赵修斌,许云达,等. 捷联姿态解算五子样等效旋转矢量算法研究 [J]. 科学技术与工程, 2014, 14(29): 96 – 99. [Jin Cong, Zhao Xiu-bin, Xu Yun-da, et al. Research on five-sample algorithm for attitude updating of SINS [J]. Science Technology and Engineering, 2014, 14(29): 96 – 99.]

[14] 严恭敏,严卫生,徐德民. 经典圆锥误差补偿算法中剩余误差估计的局限性研究 [J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(4): 379 – 385. [Yan Gong-min, Yan Wei-sheng, Xu De-min. Limitations of error estimation for classic coning compensation algorithm [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(4): 379 – 385.]

作者简介:

严恭敏(1977 –),男,博士,副教授,主要从事惯性导航与信息融合理论研究。

通信地址: 陕西省西安市西北工业大学自动化学院 183 号信箱 (710072)

电话: (029) 88431369

E-mail: yangongmin@163.com

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

引文格式:严恭敏,杨小康,翁浚,等. 捷联惯导中求解圆锥误差系数的通用算法[J]. 导航定位学报,2017,5(3):1-4,23. (YAN Gongmin, YANG Xiaokang, WENG Jun, et al. A general numerical method to obtaining optimized coning compensation coefficients for strapdown attitude algorithm[J]. Journal of Navigation and Positioning, 2017, 5(3): 1-4, 23.) DOI: 10.16547/j.cnki.10-1096.20170301.

捷联惯导中求解圆锥误差系数的通用算法

严恭敏, 杨小康, 翁 浚, 秦永元
(西北工业大学 自动化学院, 西安 710072)

摘要: 在捷联惯导姿态更新算法中, 针对传统的由等效旋转矢量微分方程求解多子样优化圆锥误差补偿系数的推导过程比较繁琐的问题, 提出了一种新的计算任意子样数优化圆锥误差补偿系数的数值算法。在圆锥角运动条件下, 新算法对角速度和角增量三角函数作泰勒级数展开, 再根据圆锥误差积分和不同子样角增量叉乘计算过程中的多项式系数向量叉乘特点, 将叉乘运算转化为多项式系数的卷积运算, 新算法易于软件编程实现。最后, 通过仿真计算给出了所有共计 21 种 1～6 子样优化圆锥误差补偿系数及相应的算法漂移。

关键词: 捷联姿态更新算法; 优化圆锥误差补偿算法; 等效旋转矢量; 卷积运算; 数值解
中图分类号: V249.3 **文献标志码**: A **文章编号**: 2095-4999(2017)03-0001-05

A general numerical method to obtaining optimized coning compensation coefficients for strapdown attitude algorithm

YAN Gongmin, *YANG Xiaokang*, *WENG Jun*, *QIN Yongyuan*
(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: In strapdown attitude updating algorithm, the traditional deduction process from equivalent rotation vector differential equation to obtaining multi-sample optimized coning compensation coefficients is generally much cumbersome. Under the condition of coning motion, the trigonometric functions of angular velocity and angular increment are developed with the Taylor series expansion. According to coning error integral and the characteristic of polynomial coefficient vector cross production operation, contained in the process of different multi-sample angular increment cross production, the cross production is converted into convolution operation of polynomial coefficients. A new method to obtain optimized coning compensation coefficients of arbitrary multi-sample is deducted, and it is easy to implement with computer programming. Finally, a total of 21 kinds of 1～6-sample optimized coning compensation coefficients and the corresponding algorithm drift error are proposed via numerical simulation.

Keywords: strapdown attitude algorithm; optimized coning compensation algorithm; equivalent rotation vector; convolution operation; numerical solution

0 引言

目前, 捷联惯导系统的姿态更新算法中普遍采取的思路[1]是: 根据不可交换误差补偿算法, 使用陀螺角增量的多子样采样构造等效旋转矢量, 尽量消除转动不可交换误差, 再利用等效旋转矢量计算姿态更新四元数, 实现姿态更新。等效旋转矢量多子样算法的数学理论基础是等效旋转矢量微分方程(Bortz 方程)[2]。由 Bortz 方程求解多子样不可交换误差补偿系数的方法主要有两类: 一是在多项式角运动假设条件下, 基于等效旋转矢量泰勒级数展开法的不可交换误差补偿系数求解[3-5]; 二是在纯圆锥运动假设条件下求解的所谓优化圆锥误差补偿系数[6-7], 本文主要讨论后者。

虽然优化圆锥误差补偿系数的求解已得到了比较圆满的解决, 理论上可获得任意子样系数的

收稿日期: 2017-02-18
第一作者简介: (1977—), 男, 福建建瓯人, 博士, 副教授, 研究方向为惯性导航与多源信息融合。

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

通式，但是它的推导过程略显繁琐[7]。本文放弃了传统的采用解析推导方法求解优化圆锥误差补偿系数的思路，在圆锥运动条件下将角速度和角增量三角函数展开成泰勒级数形式，通过仔细分析圆锥误差积分的多项式数值运算特点，给出了求解优化圆锥误差补偿系数及剩余漂移误差的通用数值算法，算法简洁，易于软件编程实现。经过仿真计算，本文给出了所有共计 21 种 1～6 子样优化圆锥误差补偿系数和漂移误差。

1 算法推导

等效旋转矢量微分方程(Bortz 方程)[2]为

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)=\boldsymbol{\omega}(t)+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}(t)\times\boldsymbol{\omega}(t)+\frac{1}{|\boldsymbol{\phi}(t)|^2}\left(1-\frac{|\boldsymbol{\phi}(t)|}{2}\cot\frac{|\boldsymbol{\phi}(t)|}{2}\right)[\boldsymbol{\phi}(t)\times]^2\boldsymbol{\omega}(t)。\tag{1}$$

式中：t 为时间参数；$\boldsymbol{\phi}(t)$、$\boldsymbol{\omega}(t)$ 分别表示等效旋转矢量、角速度。

式(1)在理论上严格成立，但比较复杂，不便于工程使用，通行的做法是将右端第三项视为小量，并将第二项中的等效旋转矢量近似为角增量[6-8]，从而近似有

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)\approx\boldsymbol{\omega}(t)+\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\boldsymbol{\omega}(t)。\tag{2}$$

式中 $\Delta\boldsymbol{\theta}(t)$ 为角增量。对式(2)右端第二项进行积分得

$$\delta\boldsymbol{\phi}(t)=\frac{1}{2}\int_0^t\Delta\boldsymbol{\theta}(\tau)\times\boldsymbol{\omega}(\tau)\mathrm{d}\tau。\tag{3}$$

通常称 $\delta\boldsymbol{\phi}(t)$ 为圆锥误差积分。

以下在圆锥运动条件下由角增量多子样采样估计圆锥误差积分，从而求解圆锥误差补偿系数。

首先，假设圆锥运动的角速度表达式为

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\begin{bmatrix}\alpha\cos(\Omega t)\\ \alpha\sin(\Omega t)\\ 0\end{bmatrix}。\tag{4}$$

式中：α 为半锥角；Ω 为圆锥运动角频率。从后面推导过程中将会看到参数 α 和 Ω 均跟圆锥误差补偿系数的求解无关，所以为了书写简洁不妨把它们都作归一化处理，将角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 展开为关于时间 t 的无穷级数形式，得

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\begin{bmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-t^2/2!+t^4/4!-\cdots\\ t-t^3/3!+t^5/5!-\cdots\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdots & 1/4! & 0 & -1/2! & 0 & 1\\ \cdots & 0 & -1/3! & 0 & 1 & 0\\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_x\\ \boldsymbol{W}_y\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}。\tag{5}$$

由式(5)积分，可得角增量

$$\Delta\boldsymbol{\theta}(t)=\int_0^t\boldsymbol{\omega}(t)\mathrm{d}t=\begin{bmatrix}t-t^3/3!+t^5/5!-\cdots\\ t^2/2!-t^4/4!+t^6/6!-\cdots\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cdots & 0 & -1/3! & 0 & 1 & 0\\ \cdots & -1/4! & 0 & 1/2! & 0 & 0\\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_x\\ \boldsymbol{A}_y\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}。\tag{6}$$

式中：$\boldsymbol{W}_x$、$\boldsymbol{W}_y$、$\boldsymbol{A}_x$ 和 $\boldsymbol{A}_y$ 均为行向量，分别有：

$\boldsymbol{W}_x=[\cdots\quad 1/4!\quad 0\quad -1/2!\quad 0\quad 1]$；

$\boldsymbol{W}_y=[\cdots\quad 0\quad -1/3!\quad 0\quad 1\quad 0]$；

$\boldsymbol{A}_x=[\cdots\quad 0\quad -1/3!\quad 0\quad 1\quad 0]$；

$\boldsymbol{A}_y=[\cdots\quad -1/4!\quad 0\quad 1/2!\quad 0\quad 0]$。

记姿态等效旋转矢量更新时间为 $[0,T]$，根据式(5)和式(6)计算圆锥误差积分为

$$\delta\boldsymbol{\phi}(T)=\frac{1}{2}\int_0^T\Delta\boldsymbol{\theta}(t)\times\boldsymbol{\omega}(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^T\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_x\\ \boldsymbol{A}_y\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\right)\times\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_x\\ \boldsymbol{W}_y\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\right)\mathrm{d}t=\int_0^T\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ (\boldsymbol{A}_x\star\boldsymbol{W}_y-\boldsymbol{A}_y\star\boldsymbol{W}_x)/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\mathrm{d}t\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{U}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ T^2\\ T\\ 1\end{bmatrix}\tag{7}$$

式中：运算符“$\star$”表示两多项式系数向量之间的卷积运算。注意到，$\boldsymbol{A}_x$ 和 $\boldsymbol{W}_y$ 的零次项系数为 0、$\boldsymbol{A}_y$ 的零次及一次项系数均为 0，因而 $(\boldsymbol{A}_x\star\boldsymbol{W}_y-\boldsymbol{A}_y\star\boldsymbol{W}_x)/2$ 的零次及一次项系数也为 0，将其再积

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

分后，$\boldsymbol{U}$ 的零次～二次项系数均为 0；再者，由于 $\boldsymbol{A}_x$ 和 $\boldsymbol{W}_y$（$\boldsymbol{A}_y$ 和 $\boldsymbol{W}_x$）的偶(奇)次项系数均为 0，因而 $(\boldsymbol{A}_x * \boldsymbol{W}_y - \boldsymbol{A}_y * \boldsymbol{W}_x)/2$ 的偶次项系数也为 0，将其再积分后，$\boldsymbol{U}$ 的奇次项系数必为 0。由上述分析可见，式(7)的 z 轴分量有

$$\delta\phi_z(T) = \boldsymbol{U}\begin{bmatrix}\vdots\\ T^2\\ T\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cdots & 0 & U_5 & 0 & U_3 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ T^2\\ T\\ 1\end{bmatrix}。\tag{8}$$

式中：$U_i(i=3,5,7,\cdots)$ 为行向量 $\boldsymbol{U}$ 的非零元素。

接下来，假设陀螺角增量采样间隔为 h，在时间段 $[-ph, nh]$ 内进行了 N 次采样（$p \geqslant 0, n > 0$ 且 $p+n=N$），分别记为 $\Delta\boldsymbol{\theta}_j$（$j=-p+1,-p+2,\cdots,n$），由式(6)可得角增量采样(子样)为

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j}\boldsymbol{\omega}(t)\mathrm{d}t = \Delta\boldsymbol{\theta}(jh) - \Delta\boldsymbol{\theta}((j-1)h) =$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_x\\ \boldsymbol{A}_y\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ (jT/n)^2\\ (jT/n)\\ 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_x\\ \boldsymbol{A}_y\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ [(j-1)T/n]^2\\ [(j-1)T/n]\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_x\\ \boldsymbol{A}_y\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\times$$

$$\left\{\mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}\vdots\\ (j/n)^2\\ (j/n)\\ 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\vdots\\ T^2\\ T\\ 1\end{bmatrix} - \mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}\vdots\\ [(j-1)/n]^2\\ [(j-1)/n]\\ 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\vdots\\ T^2\\ T\\ 1\end{bmatrix}\right\} =$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_x\\ \boldsymbol{A}_y\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}\vdots\\ [j^2-(j-1)^2]/n^2\\ [j^1-(j-1)^1]/n^1\\ [j^0-(j-1)^0]/n^0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\vdots\\ T^2\\ T\\ 1\end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{xj}\\ \boldsymbol{A}_{yj}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ T^2\\ T\\ 1\end{bmatrix}。\tag{9}$$

式中：有 $h=T/n$ 和 $t_j=jh$，当 $t_j>0$ 时表示当前姿态更新周期内的角增量子样采样；而当 $t_j \leqslant 0$ 时表示利用了前面姿态更新周期的子样信息。

计算任意 2 个子样之间的叉乘积，可得

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_i \times \Delta\boldsymbol{\theta}_j = \left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{xi}\\ \boldsymbol{A}_{yi}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ T^2\\ T\\ 1\end{bmatrix}\right)\times\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{xj}\\ \boldsymbol{A}_{yj}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ T^2\\ T\\ 1\end{bmatrix}\right) =$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{A}_{xi} * \boldsymbol{A}_{yj} - \boldsymbol{A}_{yi} * \boldsymbol{A}_{xj}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ T^2\\ T\\ 1\end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{V}_{ij}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ T^2\\ T\\ 1\end{bmatrix}。\tag{10}$$

类似于式(8)对行向量 $\boldsymbol{U}$ 的分析，不难知道 $\boldsymbol{V}_{ij}$ 的非零元素位置分布与 $\boldsymbol{U}$ 完全相同，则式(10)的 z 轴分量可写成

$$[\Delta\boldsymbol{\theta}_i \times \Delta\boldsymbol{\theta}_j]_z = \boldsymbol{V}_{ij}\begin{bmatrix}\vdots\\ T^2\\ T\\ 1\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}\cdots & 0 & V_{ij,5} & 0 & V_{ij,3} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ T^2\\ T\\ 1\end{bmatrix}。\tag{11}$$

最后，对比式(8)和式(11)的行向量系数，利用 $N-1$ 个子样叉乘积 $\Delta\boldsymbol{\theta}_i \times \Delta\boldsymbol{\theta}_n (i=-p+1,-p+2,\cdots,n-1)$ 的线性组合对圆锥误差积分进行估计，可得系数关系式

$$\boldsymbol{U} \approx \sum_{i=-p+1}^{n-1} k_{in}\boldsymbol{V}_{in}。\tag{12}$$

式中 k_{in} 即为 $N-1$ 个待求解的优化圆锥误差补偿系数。

若令式(12)中前 $N-1$ 阶非零低次项系数对应相等，可得 $N-1$ 维线性方程为

$$\begin{bmatrix}U_3\\ U_5\\ \vdots\\ U_{2N-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}V_{-p+1,n,3} & V_{-p+2,n,3} & \cdots & V_{n-1,n,3}\\ V_{-p+1,n,5} & V_{-p+2,n,5} & \cdots & V_{n-1,n,5}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ V_{-p+1,n,2N-1} & V_{-p+2,n,2N-1} & \cdots & V_{n-1,n,2N-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_{-p+1,n}\\ k_{-p+2,n}\\ \vdots\\ k_{n-1,n}\end{bmatrix}。\tag{13}$$

如将式(13)简记为

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}，\tag{14}$$

则可立即求得优化圆锥误差补偿系数

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Z}。\tag{15}$$

此外，若在式(13)成立的情况下将式(12)两边第 $2N+1$ 次项系数的差异定义为 N 子样剩余圆锥误差漂移系数 ρ_N，则有

$$\rho_N = \sum_{i=-p+1}^{n-1} k_{in}V_{in,2N+1} - U_{2N+1}。\tag{16}$$

考虑到实际圆锥运动参数半锥角 α、角频率 Ω 及姿态等效旋转矢量更新周期 T，漂移系数 ρ_N 与以 rad/s 表示的圆锥误差补偿算法漂移 ε_N 之间的关系[9]为

$$\varepsilon_N = \rho_N\frac{\alpha^2(\Omega T)^{2N+1}}{T}。\tag{17}$$

至此，完成算法推导。

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

2 仿真与分析

根据前一小节的公式推导，下面给出求解优化圆锥误差补偿系数的主要步骤：

1）根据式(5)和式(6)，设定角速度和角增量系数向量 $\boldsymbol{W}_x$、$\boldsymbol{W}_y$、$\boldsymbol{A}_x$ 和 $\boldsymbol{A}_y$；

2）根据式(7)计算圆锥误差积分系数向量 $\boldsymbol{U}$；

3）按需求选择子样参数 n 和 p，根据式(9)和式(10)计算角增量子样 $\Delta\boldsymbol{\theta}_j$ 及叉乘积系数向量 $\boldsymbol{V}_{ij}$；

4）构造方程(13)，由式(15)～式(17)求解优化圆锥误差补偿系数 k_{in}、漂移系数 ρ_N 和算法漂移 ε_N，完毕。

按照上述步骤，笔者编写了 Matlab 仿真计算程序[10]，表 1 列出了当 $N=1\sim6$ 时的所有共计 21 种子样数的优化圆锥补偿系数及算法漂移的仿真结果，其中在计算算法漂移 ε_N 时，假设半锥角 $\alpha=1^\circ$、锥频率 $\Omega=2\pi$ rad/s 且采样间隔 $h=0.01$ s。为了表示简洁，使用 Matlab 的“format rat”命令将优化圆锥误差补偿系数 k_{in} 和漂移系数 ρ_N 转换成分数形式，算法漂移 ε_N 仅保留了 3 位有效数字。表 1 中序号右上标未标注“*”号的结果与已有文献的结果完全一致[6-7]，而标注“*”号的结果是本文首次给出的。从表 1 算法漂移 ε_N 一列数据可以看出，在圆锥运动参数 α、Ω 和 h 相同的情况下，子样数 $N=n+p$ 越多则算法漂移 ε_N 越小；而在子样数 N 一定的条件下，不论如何分配当前子样数 n 和以往子样数 p，都具有相同的算法漂移。显然，如果不考虑计算量的话，选择较大的 N 和较小的 n，有利于减小算法漂移并提高姿态更新输出频率。

表 1 各子样($N=1\sim6$)优化圆锥误差补偿系数及算法漂移

序号	n	p	$k_{in}(i=-p+1,-p+2,\cdots,n-1)$	ρ_N	ε_N /((°)·h^{-1})
1	1	0	N/A	1/12	1.30×10^{-1}
2	1	1	[1] /12	1/60	1.03×10^{-4}
3*	1	2	[−1; 7] /60	1/280	8.68×10^{-8}
4*	1	3	[3; −26; 113] /840	1/1 260	7.61×10^{-11}
5*	1	4	[−2; 21; −106; 367] /2 520	1/5 544	6.83×10^{-14}
6*	1	5	[5; −62; 366; −1 406; 4 247] /27 720	1/24 024	6.22×10^{-17}
7	2	0	[2] /3	1/960	1.03×10^{-4}
8	2	1	[−1; 22] /30	1/17 920	8.68×10^{-8}
9*	2	2	[3; −26; 323] /420	1/322 560	7.61×10^{-11}
10*	2	3	[−2; 21; −106; 997] /1 260	$1/5.67\times10^{6}$	6.83×10^{-14}
11*	2	4	[5; −62; 366; −1 406; 11 177] /13 860	$1/9.84\times10^{7}$	6.22×10^{-17}
12	3	0	[9; 27] /20	1/204 120	8.68×10^{-8}
13	3	1	[3; 114; 393] /280	$1/8.26\times10^{6}$	7.61×10^{-11}
14	3	2	[−2; 21; 314; 1 207] /840	$1/3.27\times10^{8}$	6.83×10^{-14}
15*	3	3	[5; −62; 366; 3 214; 13 487] /9 240	$1/1.28\times10^{10}$	6.22×10^{-17}
16	4	0	[54; 92; 214] /105	$1/8.26\times10^{7}$	7.61×10^{-11}
17	4	1	[−1; 168; 262; 656] /315	$1/5.81\times10^{9}$	6.83×10^{-14}
18*	4	2	[5; −62; 3 831; 5 524; 14 642] /6 930	$1/4.03\times10^{11}$	6.22×10^{-17}
19	5	0	[250; 525; 650; 1 375] /504	$1/5.41\times10^{10}$	6.83×10^{-14}
20	5	1	[5; 2 710; 5 910; 6 910; 15 335] /5 544	$1/5.87\times10^{12}$	6.22×10^{-17}
21	6	0	[2 315; 4 558; 7 296; 7 834; 15 797] /4 620	$1/5.23\times10^{13}$	6.22×10^{-17}

3 结束语

传统求解优化圆锥误差补偿系数的理论思路并不复杂，但公式推导过程稍显繁琐，本文通过三角函数的泰勒级数展开，采用卷积算法进行多项式向量的叉乘运算，给出求解优化圆锥误差补偿系数的方法和软件编程都非常简便，当然，读者还可根据需要任意设置子样数 N（包括 p 和 n），运行程序后便可立即得到相应的系数，避免了繁琐的公式推导过程。最后，文中给出了共计 21 种 1～6 子样优化圆锥误差补偿系数及相应的算法漂移，为实际应用和算法选择提供了更多的参考和便利。

（下转第 23 页）

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

质特性与 GNSS 信号反射系数的关系。同时，由海水与海冰反射系数的不同可以得出 GNSS 反射信号可以用来区分海水和海冰。最后通过建立空气-海冰-海水 3 层介质模型，用场的分析方法得出 GNSS 信号的反射率的一般形式，并通过这一公式进行仿真，分析海冰反射率受海冰介质厚度、导航卫星高度角以及海冰介电常数的影响情况，为利用 GNSS-R 技术进行海冰厚度的反演提供参考。

空气-海冰-海水 3 层介质模型也存在一定的局限性，比如没有考虑卫星信号的散射，将海冰介质表面理想化为光滑表面；同时，根据仿真结果来看，当海冰厚度大于 0.7 m 时，海冰右旋反射率随海冰厚度变化不明显。

参考文献

[1] 余勇. 卫星遥感监测渤海辽东湾海冰变化规律的研究[D]. 大连：大连海事大学，2011：1-4.

[2] 程朋根，郑守住，陈晓勇，等. GNSS-R 技术在海冰反演中的应用[J]. 测绘工程，2014，23(8)：1-2.

[3] 金玲，张凤元，杨东凯，等. GNSS-R 有效波高反演方法研究[J]. 遥测遥控，2016，37(5)：29-34.

[4] 邹文博，张波，洪学宝，等. 利用北斗 GEO 卫星反射信号反演土壤湿度[J]. 测绘学报，2016，45(2)：199-204.

[5] MARTIN-NEIRA M，D'ADDIO S，BUCK C，et al. The PARIS ocean altimeter in-orbit demonstrator[J]. IEEE Transaction on Geoscience and Remote Sensing，2011，49(6)：2209-2237.

[6] LI W Q，FABRA F，YANG D K，et al. Initial results of typhoon wind speed observation using coastal GNSS-R of BeiDou GEO satellite[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing，2016，9(10)：4720-4729.

[7] KOMJATHYA A，MASLANIK J，ZAVOROTNY V U，et al. Sea ice remote sensing using surface reflected GPS signals [C]//The International Geoscience and Remote Sensing Symposium. Proceedings of IEEE 2000 Meeting of the Role of Remote Sensing in Managing the Environment of the International Geoscience and Remote Sensing Symposium(IGARSS 2000). Honolulu，Hawaii：The International Geoscience and Remote Sensing Symposium，Inc.，2000：2855-2857.

[8] FABRA F，CARDELLACH E，RIUS A，et al. Phase altimetry with dual polarization GNSS-R over sea ice[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing，2012，50(6)：2112-2121.

[9] 杨明华，曹云昌. 基于 GNSS-R 的后续海冰观测实验[J]. 全球定位系统，2014，39(8)：51-54.

[10] 张云，孟婉婷，顾祈明，等. 基于 GPS 反射信号技术的渤海海冰实验[J]. 海洋学报，2014，36(11)：64-72.

[11] 王炜，高强，吴斌贵，等. 导航卫星反射信号的海冰特征模拟与分析[J]. 海洋湖沼通报，2015，37(4)：1-6.

[12] ZAVOROTNY V U，VORONOVICH A G. Scattering of GPS signals from the ocean with wind remote sensing application [J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing，2000，38 (2)：951-964.

[13] 苏东林，陈爱新，谢树果，等. 电磁场与电磁波[M]. 北京：高等教育出版社，2009.

（上接第 4 页）

参考文献

[1] SAVAGE P G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 1：attitude algorithms[J]. Journal of Guidance，Control，and Dynamics，1998，21(1)：19-28.

[2] BORTZ J E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems，1971，7(1)：61-66.

[3] MILLER R. A new strapdown attitude algorithm[J]. Journal of Guidance，Control，and Dynamics，1983，6(4)：287-291.

[4] LEE J G，YOON Y J，MARK J G，et al. Extension of strapdown attitude algorithm for high-frequency base motion[J]. Journal of Guidance，Control，and Dynamics，1990，13(4)：738-743.

[5] 秦永元，张士遨. 捷联惯导姿态更新的四子样旋转矢量优化算法研究[J]. 中国惯性技术学报，2001，9(4)：1-7.

[6] IGNAGNI M B. Efficient class of optimized coning compensation algorithms[J]. Journal of Guidance，Control，and Dynamics，1996，19(2)：424-429.

[7] PARK C G，KIM K J，LEE J G，et al. Formalized approach to obtaining optimal coefficients for coning algorithms[J]. Journal of Guidance，Control，and Dynamics，1999，22(1)：165-168.

[8] 王立冬，孟亚峰，高庆. 基于角增量和角速率的旋转矢量算法的等效性[J]. 宇航学报，2014，35(3)：340-344.

[9] 严恭敏，严卫生，徐德民. 经典圆锥误差补偿算法中剩余误差估计的局限性研究[J]. 中国惯性技术学报，2008，16(4)：379-385.

[10] 严恭敏. 高精度捷联惯性导航系统 Matlab 工具箱[EB/OL]. (2013-09-16) [2017-4-12]. http://blog.sina.com.cn/s/blog_40edfdc90101heg0.html.

?1994-2017 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

基于毕卡迭代的捷联姿态更新精确数值解法

严恭敏，翁 浚，杨小康，秦永元
（西北工业大学自动化学院，西安 710072）

摘 要：针对捷联惯导在大角度机动等场合下姿态精确求解问题，论文根据四元数微分方程的毕卡级数解法，提出一种新的求解姿态更新的数值算法。新算法利用角增量建立角速度多项式拟合，再根据多项式四元数的乘法特点将其变换为多项式的卷积运算，求得更新四元数的幂级数解。新算法在推导过程中未做任何近似和假设，不存在原理性误差。在大幅值圆锥运动和大角度机动环境下，新算法与传统算法进行了对比仿真试验，校验了新算法具有明显的精度优势。

关键词：捷联姿态更新算法；毕卡级数；多项式拟合；仿真试验
中图分类号：V249.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1000-1328(2017)12-1307-07
DOI：10.3873/j.issn.1000-1328.2017.12.007

An Accurate Numerical Solution for Strapdown Attitude Algorithm Based on Picard Iteration

YAN Gong-min, WENG Jun, YANG Xiao-kang, QIN Yong-yuan
(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: For strapdown attitude updating algorithm, in order to reach a high accuracy under a high attitude maneuver, a new numerical attitude algorithm is proposed based on the Picard series solution for the attitude quaternion differential equation. In this new algorithm, the angular velocity polynomial fit is obtained for the gyro angular increment, and the product of the polynomial quaternion is converted into the convolution operation of the angular velocity polynomial coefficients, then the Picard series solution is well settled. There exists no approximation or hypothesis in this deduction, which means the new algorithm is analytically accurate. Finally, under the large amplitude cone motion and high maneuver environment, some comparison tests both using the traditional algorithm and the new presented algorithm are carried out, and the results show the significant accuracy improvement in the new algorithm.

Key words: Strapdown attitude algorithm; Picard series; Polynomial fit; Simulation test

0 引 言

捷联惯导算法的关键在于姿态更新算法，也即刚体定轴转动问题，多年来学者们对其进行了广泛而深入的研究[1]。描述姿态变换的数学工具有欧拉角、方向余弦阵、罗德里格参数、四元数和等效旋转矢量等，求解姿态数值更新的方法有一阶欧拉法、四阶龙格-库塔法、毕卡级数法和等效旋转矢量算法等。

目前，最为流行的姿态更新求解方法是：先使用陀螺角增量多子样采样计算等效旋转矢量，补偿转动不可交换误差，再使用等效旋转矢量计算姿态更新四元数，四元数表示简洁而且无奇异。等效旋转矢量多子样算法的理论基础是如下给出的 Bortz 方程[2]：

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}(t)=\boldsymbol{\omega}(t)+\frac{1}{2}[\boldsymbol{\phi}^{\times}(t)]\boldsymbol{\omega}(t)+\frac{1}{\|\boldsymbol{\phi}(t)\|^{2}}\cdot\left(1-\frac{\|\boldsymbol{\phi}(t)\|}{2}\cot\frac{\|\boldsymbol{\phi}(t)\|}{2}\right)[\boldsymbol{\phi}^{\times}(t)]^{2}\boldsymbol{\omega}(t)\approx\boldsymbol{\omega}(t)+\frac{1}{2}[\boldsymbol{\phi}^{\times}(t)]\boldsymbol{\omega}(t)\approx\boldsymbol{\omega}(t)+\frac{1}{2}[\Delta\boldsymbol{\theta}^{\times}(t)]\boldsymbol{\omega}(t) \tag{1}$$

收稿日期：2017-02-23； 修回日期：2017-09-21
基金项目：航空科学基金(20165853041)

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式中: $\boldsymbol{\phi}(t)$,$\boldsymbol{\omega}(t)$ 和 $\Delta\boldsymbol{\theta}(t)$ 分别表示等效旋转矢量、角速度和角增量,上标 $\times$ 表示反对称阵。

传统基于泰勒级数展开的多子样算法推导,忽略了 Bortz 方程右端三阶项的影响,并将二阶项中的等效旋转矢量近似为角增量[3-5]。传统基于圆锥运动环境下的优化多子样算法,将锥角假设为小角度,理论上其在一个姿态更新周期内子样数越多精度越高[6-7]。但是,上述推导过程中所做的前提近似或假设,使得传统的算法精度往往达不到宣称的理想效果[8],特别是在大角度机动或大锥角圆锥运动环境下,有时采用高子样算法的精度反而不如低子样的精度。文献[9]和[10]分别提出了显式频率整形和扩展圆锥误差补偿算法,对传统算法做了改进,在大机动情形下提高了误差补偿精度,然而它们也是仅考虑了圆锥误差二阶项的影响,大机动条件下依然无法避免原理性误差。作为传统方法的改进,文献[11]考虑了 Bortz 方程中三阶项的影响,提出了更高精度的误差补偿算法,但是其推导过程比较繁琐,仍然难以避免在大机动条件下产生误差。未来随着高精度 5 m/h 量级冷原子陀螺的使用,人们对导航计算精度要求必将越来越高,且随着高超声速飞行器和旋转弹等大机动领域的应用拓展,有必要研究更高精度的导航算法[10,12]。

传统的多子样算法推导的目标是获得一组确定的不可交换误差补偿系数,即角增量各子样之间叉乘的系数,子样数越多,推导过程就越复杂,为了公式推导可以顺利进行,需做必要的近似简化或假设,使得推导结果是近似或隐含适用条件的。本文摒弃了传统的求取确定性补偿系数的思路,在角速度函数为关于时间的多项式条件下(任何连续函数都能用多项式以任意给定的精度逼近),根据四元数微分方程的毕卡级数解直接推导姿态更新的数值算法,其结果是以时间多项式为元素的变换四元数,在推导过程中无需做任何近似,精度仅仅取决于计算机的数值计算精度。新算法易于软件编程实现,通过对比仿真试验校验了新算法的高精度性能。

1 多项式角运动描述

在实际捷联惯导系统中,大多数陀螺采样直接获得的是角增量信息,而姿态毕卡更新算法需要用到角速度作为输入。因此,在角运动为多项式形式假设条件下先给出由角增量信息构造角速度的方法。

假设角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 是关于时间 t 的 $N-1$ 次多项式,即

$$\boldsymbol{\omega}(t)=\begin{bmatrix}\omega_x(t)\\ \omega_y(t)\\ \omega_z(t)\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}w_{N-1,x} & w_{N-2,x} & \cdots & w_{0,x}\\ w_{N-1,y} & w_{N-2,y} & \cdots & w_{0,y}\\ w_{N-1,z} & w_{N-2,z} & \cdots & w_{0,z}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}t^{N-1}\\ t^{N-2}\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_{N-1} & \boldsymbol{w}_{N-2} & \cdots & \boldsymbol{w}_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^{N-1}\\ t^{N-2}\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_x\\ \boldsymbol{W}_y\\ \boldsymbol{W}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^{N-1}\\ t^{N-2}\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=2\boldsymbol{W}\begin{bmatrix}t^{N-1}\\ t^{N-2}\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}=2\boldsymbol{W}(t) \tag{2}$$

式中: $\boldsymbol{w}_i=[w_{i,x}\quad w_{i,y}\quad w_{i,z}]^{\mathrm{T}}(i=N-1,N-2,\cdots,0)$ 为列向量,$\boldsymbol{W}_j=[w_{N-1,j}\quad w_{N-2,j}\quad\cdots\quad w_{0,j}](j=x,y,z)$ 为行向量,$\boldsymbol{W}$ 为 $3\times N$ 维的矩阵,$2w_{i,j}$ 为多项式系数。注意,这里定义角速度 $\boldsymbol{\omega}(t)$ 为记号 $\boldsymbol{W}(t)$ 的两倍,后面使用 $\boldsymbol{W}(t)$ 是为了描述四元数微分方程的方便,亦称 $\boldsymbol{W}(t)$ 为角速度。

假设陀螺采样间隔为 h ,在时间段 $(-ph,nh]$ 内进行了 N 次角增量采样($p\geqslant 0,n>0$ 且 $p+n=N$),分别记为 $\Delta\boldsymbol{\theta}_j(j=-p+1,-p+2,\cdots,n)$,对式(2)积分可得

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_j=\int_{t_{j-1}}^{t_j}\boldsymbol{\omega}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{t_j^N-t_{j-1}^N}{N}2\boldsymbol{w}_{N-1}+\frac{t_j^{N-1}-t_{j-1}^{N-1}}{N-1}2\boldsymbol{w}_{N-2}+\cdots+(t_j-t_{j-1})2\boldsymbol{w}_0 \tag{3}$$

式中: 简记 $t_j=jh$,当 $t_j>0$ 时表示当前姿态更新周期内的角增量采样; 而当 $t_j\leqslant 0$ 时表示利用了前面姿态更新周期的角增量信息。

根据式(3),将相继 N 次角增量合并在一起写成矩阵形式,如下所示

$$\boldsymbol{\Theta}=2\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Gamma} \tag{4}$$

式中:

$$\boldsymbol{\Theta}=[\Delta\boldsymbol{\theta}_{-p+1}\quad\Delta\boldsymbol{\theta}_{-p+2}\quad\cdots\quad\Delta\boldsymbol{\theta}_n]$$

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix}(t_{-p+1}^{N}-t_{-p}^{N})/N & (t_{-p+2}^{N}-t_{-p+1}^{N})/N & \cdots & (t_{n}^{N}-t_{n-1}^{N})/N\\ (t_{-p+1}^{N-1}-t_{-p}^{N-1})/(N-1) & (t_{-p+2}^{N-1}-t_{-p+1}^{N-1})/(N-1) & \cdots & (t_{n}^{N-1}-t_{n-1}^{N-1})/(N-1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ t_{-p+1}-t_{-p} & t_{-p+2}-t_{-p+1} & \cdots & t_{n}-t_{n-1}\end{bmatrix}$$

由式(4)容易求得以角增量表示的多项式系数矩阵

$$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \tag{5}$$

由此可见,根据相继的 N 次角增量采样,通过式(5)和式(2)总可以构造一个 $(N-1)$ 次的多项式角速度拟合。

2　姿态四元数微分方程的毕卡级数解法

用四元数表示的姿态微分方程为[13]

$$\dot{\boldsymbol{Q}}_b^i(t)=\frac{1}{2}\boldsymbol{Q}_b^i(t)\circ\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t) \tag{6}$$

式中: $\boldsymbol{Q}_b^i(t)$ 为动坐标系(b 系)相对于参考坐标系(i 系)的变换四元数; $\boldsymbol{\omega}_{ib}^b(t)$ 为 b 系相对于 i 系的三维角速度矢量在 b 系的投影; 运算符"$\circ$"表示四元数乘法运算,当其中一个操作数为三维矢量时,可视为零标量四元数。为书写简洁并考虑到式(2),式(6)省略角标简写为

$$\dot{\boldsymbol{Q}}(t)=\boldsymbol{Q}(t)\circ\boldsymbol{W}(t) \tag{7}$$

若四元数初值 $\boldsymbol{Q}(0)$ 和角速度函数 $\boldsymbol{W}(t)$ 均已知,类似于矩阵微分方程的毕卡级数解[14],不难求得四元数微分方程(7)的毕卡级数解为

$$\boldsymbol{Q}(t)=\boldsymbol{Q}(0)\circ\boldsymbol{q}(t,0) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{q}(t,0)=1+\int_0^t\boldsymbol{W}(t_1)\,\mathrm{d}t_1+\int_0^t\int_0^{t_2}\boldsymbol{W}(t_1)\,\mathrm{d}t_1\circ\boldsymbol{W}(t_2)\,\mathrm{d}t_2+\int_0^t\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}\boldsymbol{W}(t_1)\,\mathrm{d}t_1\circ\boldsymbol{W}(t_2)\,\mathrm{d}t_2\circ\boldsymbol{W}(t_3)\,\mathrm{d}t_3+\cdots \tag{9}$$

式中: $\boldsymbol{q}(t,0)$ 为从时间 0 到 t 的姿态变化四元数,完全由角速度决定。一般情况下无法再对式(9)作进一步处理; 但是,如果假设角速度 $\boldsymbol{W}(t)$ 为关于时间 t 的多项式函数,则可得到 $\boldsymbol{q}(t,0)$ 的多项式积分解,具体分析如下所述。

首先,计算式(9)右端的单重积分项,将三维矢量表示为零标量四元数,得

$$\int_0^t\boldsymbol{W}(t_1)\,\mathrm{d}t_1=\int_0^t\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{W}_x\\ \boldsymbol{W}_y\\ \boldsymbol{W}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_1^{N-1}\\ t_1^{N-2}\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\mathrm{d}t_1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_0^{(1)}\\ \boldsymbol{U}_1^{(1)}\\ \boldsymbol{U}_2^{(1)}\\ \boldsymbol{U}_3^{(1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^N\\ t^{N-1}\\ \vdots\\ t\end{bmatrix} \tag{10}$$

式中: $\boldsymbol{U}_j^{(k)}$ 表示四元数毕卡级数的第 $k(k=1,2,3,\cdots)$ 重积分多项式的第 $j(j=0,1,2,3)$ 行向量系数(下同)。

其次,将式(10)代入式(9)右端的双重积分项,可得

$$\int_0^t\int_0^{t_2}\boldsymbol{W}(t_1)\,\mathrm{d}t_1\circ\boldsymbol{W}(t_2)\,\mathrm{d}t_2=\int_0^t\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_0^{(1)}\\ \boldsymbol{U}_1^{(1)}\\ \boldsymbol{U}_2^{(1)}\\ \boldsymbol{U}_3^{(1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_2^N\\ t_2^{N-1}\\ \vdots\\ t_2\end{bmatrix}\right)\circ\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{W}_x\\ \boldsymbol{W}_y\\ \boldsymbol{W}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_2^{N-1}\\ t_2^{N-2}\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right)\mathrm{d}t_2 \tag{11}$$

根据如下两四元数 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$ 之间的乘法运算规则

$$\boldsymbol{P}\circ\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}p_0\\ p_1\\ p_2\\ p_3\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}q_0\\ q_1\\ q_2\\ q_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p_0q_0-p_1q_1-p_2q_2-p_3q_3\\ p_0q_1+p_1q_0+p_2q_3-p_3q_2\\ p_0q_2+p_2q_0+p_3q_1-p_1q_3\\ p_0q_3+p_3q_0+p_1q_2-p_2q_1\end{bmatrix} \tag{12}$$

并且注意到两个以多项式为元素的四元数之乘积仍然是多项式四元数,式(11)转化为

$$\int_0^t\int_0^{t_2}\boldsymbol{W}(t_1)\,\mathrm{d}t_1\circ\boldsymbol{W}(t_2)\,\mathrm{d}t_2=\int_0^t\begin{bmatrix}-\boldsymbol{U}_1^{(1)}*\boldsymbol{W}_x-\boldsymbol{U}_2^{(1)}*\boldsymbol{W}_y-\boldsymbol{U}_3^{(1)}*\boldsymbol{W}_z\\ \boldsymbol{U}_0^{(1)}*\boldsymbol{W}_x+\boldsymbol{U}_2^{(1)}*\boldsymbol{W}_z-\boldsymbol{U}_3^{(1)}*\boldsymbol{W}_y\\ \boldsymbol{U}_0^{(1)}*\boldsymbol{W}_y+\boldsymbol{U}_3^{(1)}*\boldsymbol{W}_x-\boldsymbol{U}_1^{(1)}*\boldsymbol{W}_z\\ \boldsymbol{U}_0^{(1)}*\boldsymbol{W}_z+\boldsymbol{U}_1^{(1)}*\boldsymbol{W}_y-\boldsymbol{U}_2^{(1)}*\boldsymbol{W}_x\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}t_2^{2N-1}\\ t_2^{2N-2}\\ \vdots\\ t_2\end{bmatrix}\mathrm{d}t_2=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_0^{(2)}\\ \boldsymbol{U}_1^{(2)}\\ \boldsymbol{U}_2^{(2)}\\ \boldsymbol{U}_3^{(2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^{2N}\\ t^{2N-1}\\ \vdots\\ t^2\end{bmatrix} \tag{13}$$

式中: 运算符"$*$"表示两个多项式系数行向量之间的卷积运算。

同理,将式(13)代入式(9)右端的三重积分项,得

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\int_0^t\int_0^{t_3}\int_0^{t_2}\boldsymbol{W}(t_1)\,\mathrm{d}t_1\circ\boldsymbol{W}(t_2)\,\mathrm{d}t_2\circ\boldsymbol{W}(t_3)\,\mathrm{d}t_3=$$
$$\int_0^t\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_0^{(2)}\\ \boldsymbol{U}_1^{(2)}\\ \boldsymbol{U}_2^{(2)}\\ \boldsymbol{U}_3^{(2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_3^{2N}\\ t_3^{2N-1}\\ \vdots\\ t_3^2\end{bmatrix}\right)\circ\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{W}_x\\ \boldsymbol{W}_y\\ \boldsymbol{W}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t_3^{N-1}\\ t_3^{N-2}\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right)\mathrm{d}t_3=$$
$$\int_0^t\begin{bmatrix}-\boldsymbol{U}_1^{(2)}*\boldsymbol{W}_x-\boldsymbol{U}_2^{(2)}*\boldsymbol{W}_y-\boldsymbol{U}_3^{(2)}*\boldsymbol{W}_z\\ \boldsymbol{U}_0^{(2)}*\boldsymbol{W}_x+\boldsymbol{U}_2^{(2)}*\boldsymbol{W}_z-\boldsymbol{U}_3^{(2)}*\boldsymbol{W}_y\\ \boldsymbol{U}_0^{(2)}*\boldsymbol{W}_y+\boldsymbol{U}_3^{(2)}*\boldsymbol{W}_x-\boldsymbol{U}_1^{(2)}*\boldsymbol{W}_z\\ \boldsymbol{U}_0^{(2)}*\boldsymbol{W}_z+\boldsymbol{U}_1^{(2)}*\boldsymbol{W}_y-\boldsymbol{U}_2^{(2)}*\boldsymbol{W}_x\end{bmatrix}\cdot$$
$$\begin{bmatrix}t_3^{3N-1}\\ t_3^{3N-2}\\ \vdots\\ t_3^2\end{bmatrix}\mathrm{d}t_3=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_0^{(3)}\\ \boldsymbol{U}_1^{(3)}\\ \boldsymbol{U}_2^{(3)}\\ \boldsymbol{U}_3^{(3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^{3N}\\ t^{3N-1}\\ \vdots\\ t^3\end{bmatrix}\tag{14}$$

依此类推，可求得式(9)右端的所有积分项。由以上多重积分的迭代过程可见，高一阶的多项式系数 $\boldsymbol{U}_j^{(k+1)}$ 仅仅是低一阶系数 $\boldsymbol{U}_j^{(k)}$ 与角速度多项式系数 $\boldsymbol{W}_j$ 的卷积和，十分便于数值计算和软件编程实现。

至此，获得式(9)的幂级数解为

$$\boldsymbol{q}(t,0)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_0^{(1)}\\ \boldsymbol{U}_1^{(1)}\\ \boldsymbol{U}_2^{(1)}\\ \boldsymbol{U}_3^{(1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^N\\ t^{N-1}\\ \vdots\\ t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_0^{(2)}\\ \boldsymbol{U}_1^{(2)}\\ \boldsymbol{U}_2^{(2)}\\ \boldsymbol{U}_3^{(2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^{2N}\\ t^{2N-1}\\ \vdots\\ t^2\end{bmatrix}+$$
$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_0^{(3)}\\ \boldsymbol{U}_1^{(3)}\\ \boldsymbol{U}_2^{(3)}\\ \boldsymbol{U}_3^{(3)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^{3N}\\ t^{3N-1}\\ \vdots\\ t^3\end{bmatrix}+\cdots\tag{15}$$

从 $\boldsymbol{U}_3^{(k)}$ 的积分计算过程还可看出，在毕卡级数的第 $m(m=1,2,3,\cdots)$ 重积分项的最低次幂 t^m 中将包含乘积系数 $1/(m!)$。因此，理论上当角速度多项式系数有界时毕卡级数总是收敛的，或者说，式(15)中的幂级数是收敛的，系数收敛速度为 $1/(m!)$。在式(15)中，若令 $t=nh$ 即可获得从0到 nh 时刻的姿态变化四元数；当然，如果取 t 为 nh 附近的其它时刻，则可获得姿态变化的内插或外推值。

式(15)是关于时间 t 的无穷阶幂级数，但在实际应用中，总是选取式(15)的前低阶有限项作为姿态更新的数值解；容易看出，当保留前 m 阶时，数值截断误差为 $O(t^{m+1})$。为了降低计算量，当选前 m 阶时，在所有保留的积分项中均可删去次数高于 m 的多项式系数，不影响截断误差的阶次。一般在姿态更新周期 nh 小于0.1 s并且角速度多项式系数在数值上不超过10量级的情况下，可选择保留毕卡级数的前10～15阶作为精确的数值解。

特别地，若将姿态更新间隔 nh 作归一化处理，即令 $nh=1$，则由式(15)可求得

$$\boldsymbol{q}(t,0)=\begin{bmatrix}1+\sum\tilde{\boldsymbol{U}}_0^{(1)}+\sum\tilde{\boldsymbol{U}}_0^{(2)}+\sum\tilde{\boldsymbol{U}}_0^{(3)}+\cdots\\ \sum\tilde{\boldsymbol{U}}_1^{(1)}+\sum\tilde{\boldsymbol{U}}_1^{(2)}+\sum\tilde{\boldsymbol{U}}_1^{(3)}+\cdots\\ \sum\tilde{\boldsymbol{U}}_2^{(1)}+\sum\tilde{\boldsymbol{U}}_2^{(2)}+\sum\tilde{\boldsymbol{U}}_2^{(3)}+\cdots\\ \sum\tilde{\boldsymbol{U}}_3^{(1)}+\sum\tilde{\boldsymbol{U}}_3^{(2)}+\sum\tilde{\boldsymbol{U}}_3^{(3)}+\cdots\end{bmatrix}\tag{16}$$

进而式(5)中的 $\boldsymbol{W}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}$ 可转化为

$$\tilde{\boldsymbol{W}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\Theta}\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}^{-1}$$
$$\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}=\begin{bmatrix}\dfrac{(-p+1)^N-(-p)^N}{Nn^N} & \dfrac{(-p+2)^N-(-p+1)^N}{Nn^N} & \cdots & \dfrac{n^N-(n-1)^N}{Nn^N}\\ \dfrac{(-p+1)^{N-1}-(-p)^{N-1}}{(N-1)n^{N-1}} & \dfrac{(-p+2)^{N-1}-(-p+1)^{N-1}}{(N-1)n^{N-1}} & \cdots & \dfrac{n^{N-1}-(n-1)^{N-1}}{(N-1)n^{N-1}}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1/n & 1/n & \cdots & 1/n\end{bmatrix}$$

$\tilde{\boldsymbol{U}}_j^{(k)}$ 的计算方法同 $\boldsymbol{U}_j^{(k)}$，参见式(10)、(13)和(14)；$\sum\tilde{\boldsymbol{U}}_j^{(k)}$ 表示多项式所有系数的累加和。在式(16)中 $\tilde{\boldsymbol{U}}_j^{(k)}$ 的零次项系数可用于控制毕卡级数计算的阶数和估计截断误差的大小。

最后，对式(16)的乘法计算量做个粗略估计。假设子样数为 N，毕卡级数展开阶次为 m，关于时间 t 多项式的最高次幂也取为 m。由多项式系数行向量 $\tilde{\boldsymbol{U}}_j^{(k)}$ 计算 $\tilde{\boldsymbol{U}}_j^{(k+1)}$ 的过程重写如下

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\int_0^t \begin{bmatrix} -\tilde{\boldsymbol{U}}_1^{(k)} * \boldsymbol{W}_x - \tilde{\boldsymbol{U}}_2^{(k)} * \boldsymbol{W}_y - \tilde{\boldsymbol{U}}_3^{(k)} * \boldsymbol{W}_z \\ \tilde{\boldsymbol{U}}_0^{(k)} * \boldsymbol{W}_x + \tilde{\boldsymbol{U}}_2^{(k)} * \boldsymbol{W}_z - \tilde{\boldsymbol{U}}_3^{(k)} * \boldsymbol{W}_y \\ \tilde{\boldsymbol{U}}_0^{(k)} * \boldsymbol{W}_y + \tilde{\boldsymbol{U}}_3^{(k)} * \boldsymbol{W}_x - \tilde{\boldsymbol{U}}_1^{(k)} * \boldsymbol{W}_z \\ \tilde{\boldsymbol{U}}_0^{(k)} * \boldsymbol{W}_z + \tilde{\boldsymbol{U}}_1^{(k)} * \boldsymbol{W}_y - \tilde{\boldsymbol{U}}_2^{(k)} * \boldsymbol{W}_x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t_k^m \\ t_k^{m-1} \\ \vdots \\ t_k^k \end{bmatrix} \mathrm{d}t_k \rightarrow \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{U}}_0^{(k+1)} \\ \tilde{\boldsymbol{U}}_1^{(k+1)} \\ \tilde{\boldsymbol{U}}_2^{(k+1)} \\ \tilde{\boldsymbol{U}}_3^{(k+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^m \\ t^{m-1} \\ \vdots \\ t^{k+1} \end{bmatrix} \tag{17}$$

式中: $\tilde{\boldsymbol{U}}_j^{(k)}$ 的最低幂次为 k，最高幂次为 m，可见 $\tilde{\boldsymbol{U}}_j^{(k)}$ 中共含 $m-k+1$ 个系数。考虑到 $\boldsymbol{W}_j$ 中包含 N 个系数，式(17)左边的 12 个卷积 $\tilde{\boldsymbol{U}}_i^{(k)} * \boldsymbol{W}_j$ 运算共需不超过 $12N(m-k+1)$ 次的乘法运算，所以式(16)的乘法计算次数约为

$$M = \sum_{k=1}^{m} 12N(m-k+1) \approx 6Nm^2 \tag{18}$$

例如，当 $N=6$，$m=10$ 时，乘法次数为 3600；而当 $N=4$，$m=5$ 时，乘法次数为 600，通常也能取得比较满意的数值精度。

与本文算法的计算量相比，若采用如下传统的扩展形式不可交换误差补偿算法[6,10]

$$\delta\boldsymbol{\phi}(T) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N} k_{ij}\Delta\boldsymbol{\theta}_i^{\times}\Delta\boldsymbol{\theta}_j \tag{19}$$

式中: $\delta\boldsymbol{\phi}(T)$ 和 k_{ij} 分别为圆锥误差积分和不可交换误差补偿系数。式(19)中含有 $N(N-1)/2$ 次矢量叉乘运算和系数乘法运算，因此传统算法的乘法次数为

$$M' = \frac{N(N-1)}{2} \times (6+3) = \frac{9N(N-1)}{2} \approx \frac{9}{2}N^2 \tag{20}$$

根据式(18)和式(20)，可获得本文算法与传统算法的计算量比率为

$$\frac{M}{M'} = \frac{4m^2}{3N} \tag{21}$$

3　仿真与分析

3.1　圆锥运动仿真

圆锥运动仿真参数设置为: 圆锥频率 $f=1$ Hz，半锥角变化范围 $\alpha=0.05''\sim 90°$，角增量采样间隔 $h=10$ ms。经过仿真，在圆锥轴上的姿态漂移误差 ε 如图 1 所示，实线为传统圆锥误差补偿算法的姿态漂移误差，点划线为本文所提新算法的误差，各图例依次对应子样数 $N=2\sim 6$(这里未采用前一姿态更新周期的角增量信息，即参数 $p=0$)。从图 1 可以得出以下几点结论:

1) 当子样为 2 时，两种算法误差曲线几乎重合，即两者精度相当。

2) 新算法随子样数增加精度不断提高; 2，3 子样(或 4，5 子样)之间的精度相对来说比较接近。

3) 对于传统算法，在半锥角很小时子样数越高精度才会越高，比如当半锥角小于 1″时 6 子样的精度才高于 5 子样; 而当半锥角较大时，传统算法的高子样算法精度反而不如低子样算法，特别在半锥角 $\alpha=90°$ 时 6 子样算法的漂移误差高达 20°/h。

4) 在大半锥角情况下，新算法精度明显优于传统算法; 而当半锥角较小时，新算法也具有足够高的精度，对于实际应用而言误差可忽略不计，总体上看，新算法受半锥角影响小，具有更强的实用性。

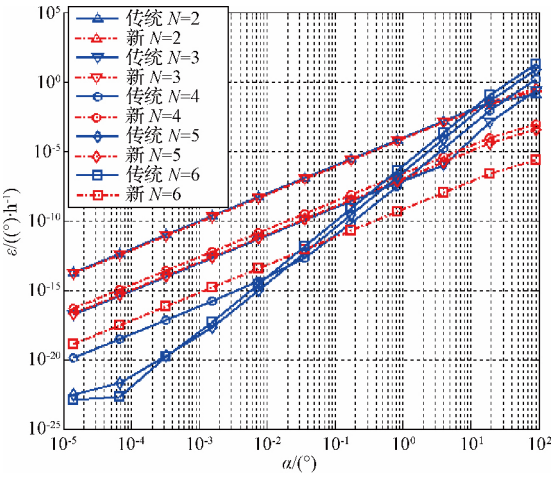


图 1　圆锥漂移误差对比

Fig. 1　Comparison of coning drift error

此外，仿真还显示，传统算法在非圆锥轴上的误差波动较大，而新算法误差均很小。不妨以半锥角 $\alpha=90°$ 环境下的 6 子样算法为例，图 2 给出了两种算法在一个圆锥角运动周期内的非圆锥轴上的角度更新误差($\delta\phi_x$ 和 $\delta\phi_y$)比较。从图 2 可以看出，传统算法的误差最大达到了 320″，而新算法的误差始终很小，仅为 10^{-6}″量级。这说明，如果出现非整周期的圆锥运动，传统算法可能会引起较大的姿态解算误差。

3.2　大角度机动仿真

实际上，第 3.1 节给出的短时低频大幅值圆锥运动也可以视为一种大角度机动类型。下面采用文献[9-10]中以多项式表示的 2 s 大角度机动环境，重写多项式系数如下所示:

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix} -25/2^6 & 10/2^5 & 2.25/2^4 & 10/2^3 & 0 \\ -1/2^6 & -8.8/2^5 & 3.6/2^4 & -2/2^3 & 0 \\ 6/2^6 & -10.8/2^5 & 18/2^4 & -10.2/2^3 & 0 \end{bmatrix} \tag{22}$$

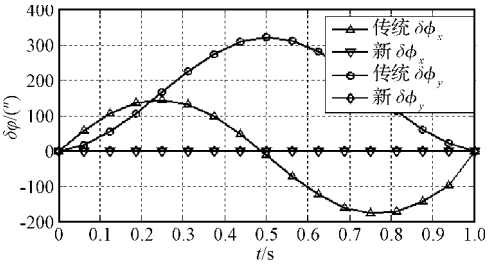


图 2 非锥轴角度误差对比($\alpha=90°$,6 子样)

Fig. 2 Drift error comparison for non-coning axis ($\alpha=90°$,6 sub-sample)

仿真时除采用传统圆锥误差补偿算法和本文新算法外,还增加了文献[10]提出的扩展圆锥补偿算法,但由于扩展算法的推导非常繁琐,尚未查找到 6 子样系数的公开文献,因而扩展算法最多只仿真到 5 子样。三种算法的角增量采样间隔均为 $h=10$ ms,仿真结果的姿态漂移误差($\delta\phi_x$、$\delta\phi_y$ 和 $\delta\phi_z$)如图 3 所示。由图 3 可得以下两点结论:

1) 扩展算法 3~5 子样的精度明显优于传统圆锥算法,但是两者的算法精度都随着子样数的增加反而下降,传统算法 $N=6$ 子样时 x 轴姿态漂移误差将近 20″,见图(a5),扩展算法 $N=5$ 子样时 z 轴漂移也超过了 0.5″,见图(b4)。

2) 新算法的精度均高于传统算法和扩展算法,且新算法精度随子样数增加不断提高。事实上,式(22)为角速度的 4 次多项式描述,新算法的高于 4 子样的解式(15)可以认为是姿态更新的精确数值解或幂级数解析解,其精度仅受限于计算机的数值计算精度,正如新算法中图(c4)和图(c5)所示,它们的误差都非常小,几乎可忽略不计。

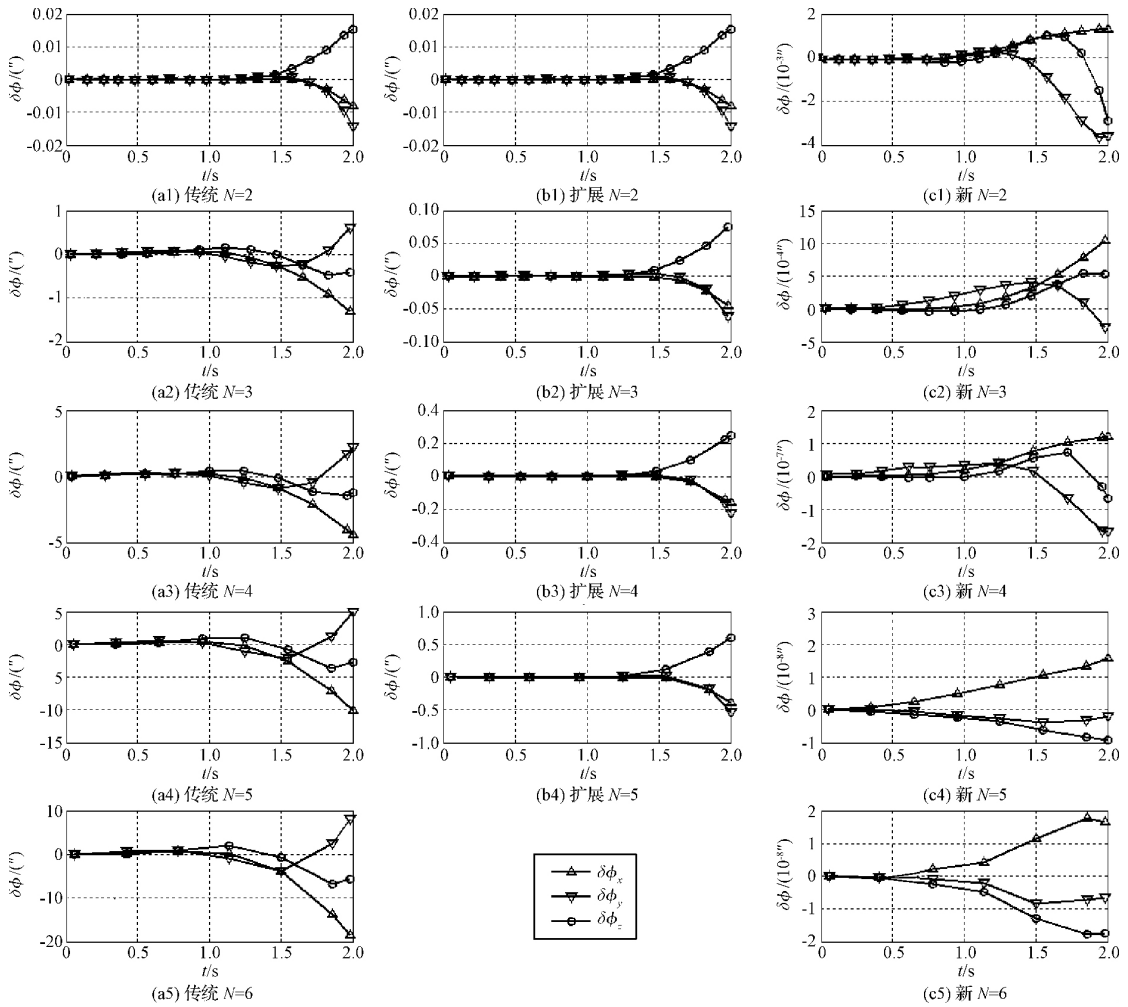


图 3 大角度机动漂移误差对比

Fig. 3 Drift error comparison for large angle maneuver

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

4 结 论

传统圆锥误差补偿算法在纯圆锥运动环境下且半锥角比较小时是非常有效的,然而对于大锥角情况或者应用于大角度机动环境,都会产生较大的姿态漂移误差。论文根据四元数微分方程的毕卡级数解,提出了一种新的直接求解姿态四元数更新的数值算法,在算法推导过程中不做任何近似处理,算法精度高,环境适应性好。通过与传统的基于等效旋转矢量的多子样算法对比仿真,校验了新算法在圆锥运动和大角度机动等场合均具有明显的精度优势,因而具有更好的应用价值。虽然新算法的计算量比传统算法稍大些,但是相对于当代高性能导航计算机的处理能力而言,还是容易满足实时计算要求的。在事后分析处理方面,新算法还可以作为研究其它姿态更新算法的精度比较参考基准。由于缺乏高精度的惯导系统、高动态环境模拟设备以及实时高精度的姿态参考基准,目前论文研究主要集中在理论分析和仿真对比层面上,希望所提出的理论和算法今后能在实际系统中得到进一步验证。

参 考 文 献

[1] Cheng H, Gupta K C. A historical note on finite rotations [J]. Journal of Applied Mechanics, 1989, 56: 139 – 145.

[2] Bortz J E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971, 7(1): 61 – 66.

[3] Miller R. A new strapdown attitude algorithm [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1983, 6(4): 287 – 291.

[4] Lee J G, Yoon Y J, Mark J G, et al. Extension of strapdown attitude algorithm for high-frequency base motion [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1990, 13(4): 738 – 743.

[5] 王立冬,孟亚峰,高庆. 基于角增量和角速率的旋转矢量算法的等效性 [J]. 宇航学报, 2014, 35(3): 340 – 344. [Wang Li-dong, Meng Ya-feng, Gao Qing. Equivalence analysis of rotation vector algorithm based on angle increment and angular velocity [J]. Journal of Astronautics, 2014, 35(3): 340 – 344.]

[6] Ignagni M B. Efficient class of optimized coning compensation algorithms [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1996, 19(2): 424 – 429.

[7] Park C G, Kim K J, Lee J G, et al. Formalized approach to obtaining optimal coefficients for coning algorithms [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(1): 165 – 168.

[8] 严恭敏,严卫生,徐德民. 经典圆锥误差补偿算法中剩余误差估计的局限性研究 [J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(4): 379 – 385. [Yan Gong-min, Yan Wei-sheng, Xu De-min. Limitations of error estimation for classic coning compensation algorithm [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(4): 379 – 385.]

[9] Savage P G. Coning algorithm design by explicit frequency shaping [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2010, 33(4): 1123 – 1132.

[10] 宋敏. 高动态下捷联惯性导航算法误差分析与优化方法研究 [D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2012. [Song Min. Research on error analysis and optimization methods for strapdown inertial navigation algorithm under highly dynamic environment [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2012.]

[11] Wang M S, Wu W Q, Wang J L, et al. High-order attitude compensation in coning and rotation coexisting environment [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2015, 51(2): 1178 – 1190.

[12] 朱常兴,冯焱颖,周兆英,等. 原子惯性技术在航天航空领域的应用 [J]. 宇航学报, 2009, 30(1): 18 – 24. [Zhu Chang-xing, Feng Yan-ying, Zhou Zhao-ying, et al. Applications of atom inertial technology in aerospace engineering [J]. Journal of Astronautics, 2009, 30(1): 18 – 24.]

[13] 秦永元. 惯性导航(第二版) [M]. 北京: 科学出版社, 2014: 253 – 255.

[14] 袁信,郑锷. 捷联式惯性导航原理 [M]. 南京: 航空专业教材编审组, 1985: 54 – 55.

作者简介:

严恭敏(1977 –),男,博士,副教授,主要从事惯性导航与信息融合理论方面的研究。

通信地址: 陕西省西安市西北工业大学自动化学院 183 号信箱(710072)

电话: (029) 88431369

E-mail: yangongmin@163.com

(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

Proceedings of the 37th Chinese Control Conference
July 25-27, 2018, Wuhan, China

Error Distribution Method and Analysis of Observability Degree Based on the Covariances in Kalman Filter

Gongmin Yan, Xiaokang Yang, Xingjun Su, Jun Weng, Yongyuan Qin
School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China
E-mail: yangongmin@163.com

Abstract: According to the Kalman filter equations, an error distribution formula of the error of state estimation is deduced, which includes the influence of initial state variance matrix, system noise matrix and measurement noise matrix. A new definition of degree of state observability, the computing method, and the criteria to judge the level of state observability are also proposed. The new concept of degree of observability can be used to visualize the state observability of the Kalman filter over time. Combined with the error distribution analysis method, the main factors affecting the error of state estimation are given, which can be used to optimize the design of the filter and reduce the filter errors. The proposed algorithm is applied to the initial alignment simulation and the analysis of the strapdown inertial navigation system (SINS), and the results are proved to be correct and valid.
Key Words: Kalman filter, error distribution method, observability analysis, strapdown inertial navigation system, initial alignment

1 Introduction

Observability degree is the level to which the state components or their linear combinations can be observed. It describes how observable of the states and their combinations quantificationally. In the stochastic system, the state with higher observability degree could get better Kalman filtering performance, which means that the state estimation error is smaller with higher convergence speed[1]. For time-varying system, the observability matrix is usually obtained by the theory of PWCS (Piece-wise Constant System)[2,3] and the observability degree is analyzed by computing the eigenvalues and eigenvectors using SVD (Singular Value Decomposition) method[4-6]. However, these methods is a little bit less scientific when applied in stochastic systems since the effect of random noise is not considered and the analysis results are not accurate enough.

Ham presented a covariance analysis method using eigenvalues and eigenvectors of the covariance matrix to analyze the observability degree and using eigenvalues to measure observability strength[7]. In high dimensional system, however, physical meanings and units of each state are different, so simply comparing the eigenvalues is not reasonable enough. In this paper, we also use the covariance analysis method but propose a new observability degree definition. It is related to uncertainty of initial state and one's expected value of observability strength. The computed results of observability degree are more scientific and reasonable after considering the effect of initial state covariance, process noise and measurement noise matrices.

In general, the effect of initial state uncertainty, process noise and measurement noise are different on the state estimate errors. To find out the factors that influence the state estimation errors, we derive the error distribution equations of these three kinds of effect based on Kalman filtering equations. It gives the direction for finding the major factors affecting the filtering precision and ways to decrease the filtering error.

Finally, the error distribution method and observability degree analysis are applied to the SINS initial alignment. The main conclusions are the same with the traditional methods[8-10], but the related description of observability is more accurate and precise.

2 Stochastic State Space Model and Kalman Filtering Equations

The stochastic system space model is[11]

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{X}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{W}_{k-1} \\ \boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{V}_k \end{cases} \tag{1}$$

where $\boldsymbol{X}_k$ is $n\times 1$ state vector, $\boldsymbol{Z}_k$ is $m\times 1$ measurement vector. $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}, \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}, \boldsymbol{H}_k$ are known system structure parameters, called $n\times n$ state one-step transfer matrix, $n\times l$ process noise distribution matrix, $m\times n$ measurement matrix respectively. $\boldsymbol{W}_{k-1}$ is $l\times 1$ process noise vector, and $\boldsymbol{V}_k$ is $m\times 1$ measurement noise vector, both of which are zero-mean Gaussian white noise vector sequences and are not correlated. It means

$$\begin{cases} \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k] = \boldsymbol{0}, & \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{W}_j^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{Q}_k\delta_{kj} \\ \mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k] = \boldsymbol{0}, & \mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{V}_j^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{R}_k\delta_{kj} \\ \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{V}_j^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{2}$$

where $\boldsymbol{Q}_k$ is positive semidefinite and $\boldsymbol{R}_k$ is positive definite.

Kalman filter equations corresponding to equation (1) are

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1} = \boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1} \\ \boldsymbol{P}_{k/k-1} = \boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{R}_k)^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{X}}_k = \hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1} + \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{Z}_k - \boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}) \\ \boldsymbol{P}_k = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{P}_{k/k-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{3}$$

3 Error Distribution Method

In Kalman filter equations (3), if the system model parameters $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}$, $\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}$ and $\boldsymbol{H}_k$ are determined, the covariance matrix $\boldsymbol{P}_k$ is only related with $\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{Q}_k$ and $\boldsymbol{R}_k$, meanwhile, but not the initial state $\boldsymbol{X}_0$ and measurement

vector $\boldsymbol{Z}_k$. Therefore, only the effect of $\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{Q}_k$ and $\boldsymbol{R}_k$ on $\boldsymbol{P}_k$ will be discussed. This is the error distribution problem of the state estimate.

Substituting the 2nd sub-equation into the 5th one in equations (3), we find

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_k &= (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)(\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\\ &\quad \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}\\ &= (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)^{\mathrm{T}}+\\ &\quad (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)^{\mathrm{T}}+\\ &\quad \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}\\ &= \boldsymbol{A}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_{k/k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{B}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{4}$$

where we define

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}_{k/k-1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\\ \boldsymbol{B}_{k/k-1}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\end{cases} \tag{5}$$

According to equation (4), as $\boldsymbol{P}_k$ recurs, we'll find

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_k &= \boldsymbol{A}_{k/k-1}(\boldsymbol{A}_{k-1/k-2}\boldsymbol{P}_{k-2}\boldsymbol{A}_{k-1/k-2}^{\mathrm{T}}+\\ &\quad \boldsymbol{B}_{k-1/k-2}\boldsymbol{Q}_{k-2}\boldsymbol{B}_{k-1/k-2}^{\mathrm{T}}+\\ &\quad \boldsymbol{K}_{k-1}\boldsymbol{R}_{k-1}\boldsymbol{K}_{k-1}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_{k/k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{B}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}}\\ &= \boldsymbol{A}_{k/k-1}\boldsymbol{A}_{k-1/k-2}\boldsymbol{P}_{k-2}\boldsymbol{A}_{k-1/k-2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\\ &\quad (\boldsymbol{A}_{k/k-1}\boldsymbol{B}_{k-1/k-2}\boldsymbol{Q}_{k-2}\boldsymbol{B}_{k-1/k-2}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\\ &\quad \boldsymbol{B}_{k/k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{B}_{k/k-1}^{\mathrm{T}})+\\ &\quad (\boldsymbol{A}_{k/k-1}\boldsymbol{K}_{k-1}\boldsymbol{R}_{k-1}\boldsymbol{K}_{k-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}})\\ &= \cdots\\ &= (\boldsymbol{A}_{k/k-1}\cdots\boldsymbol{A}_{2/1}\boldsymbol{A}_{1/0}\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{A}_{1/0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{2/1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}})+\\ &\quad \Big[(\boldsymbol{A}_{k/k-1}\cdots\boldsymbol{A}_{2/1}\boldsymbol{B}_{1/0}\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{B}_{1/0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{2/1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}})+\\ &\quad (\boldsymbol{A}_{k/k-1}\cdots\boldsymbol{A}_{3/2}\boldsymbol{B}_{2/1}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{B}_{2/1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{3/2}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}})+\cdots+\\ &\quad (\boldsymbol{B}_{k/k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{B}_{k/k-1}^{\mathrm{T}})\Big]+\\ &\quad \Big[(\boldsymbol{A}_{k/k-1}\cdots\boldsymbol{A}_{2/1}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{K}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{2/1}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}})+\\ &\quad (\boldsymbol{A}_{k/k-1}\cdots\boldsymbol{A}_{3/2}\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{K}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{3/2}^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}})+\cdots+\\ &\quad (\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{R}_k\boldsymbol{K}_k^{\mathrm{T}})\Big]\\ &= \bar{\boldsymbol{A}}_{k/0}\boldsymbol{P}_0\bar{\boldsymbol{A}}_{k/0}^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{k}\bar{\boldsymbol{B}}_{k/i-1}\boldsymbol{Q}_{i-1}(\bar{\boldsymbol{B}}_{k/i-1})^{\mathrm{T}}+\\ &\quad \sum_{i=1}^{k}\bar{\boldsymbol{K}}_{k/i}\boldsymbol{R}_i(\bar{\boldsymbol{K}}_{k/i})^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{6}$$

where

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{A}}_{k/i}=\boldsymbol{A}_{k/k-1}\cdots\boldsymbol{A}_{i+2/i+1}\boldsymbol{A}_{i+1/i}\\ \bar{\boldsymbol{B}}_{k/i-1}=\bar{\boldsymbol{A}}_{k/i}\boldsymbol{B}_{i/i-1}\\ \bar{\boldsymbol{K}}_{k/i}=\bar{\boldsymbol{A}}_{k/i}\boldsymbol{K}_i\end{cases}\quad (i=1,2,3,\cdots,k) \tag{7}$$

Normally, $\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{Q}_{i-1}$ and $\boldsymbol{R}_i$ are diagonal (if they are not diagonal, U-D decomposition method can make them diagonal). They are transformed into following format

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}=\operatorname{diag}\begin{pmatrix}Y_{(11)}\\ Y_{(22)}\\ \vdots\\ Y_{(pp)}\end{pmatrix} &= \operatorname{diag}\begin{pmatrix}Y_{(11)}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\operatorname{diag}\begin{pmatrix}0\\ Y_{(22)}\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\cdots+\\ \operatorname{diag}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ Y_{(pp)}\end{pmatrix} &= \sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{Y}_{(jj)}\end{aligned} \tag{8}$$

where, the dimensions of diagonal matrix $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{Q}_{i-1},\boldsymbol{R}_i$ are $p=n,l,m$ respectively. $Y_{(jj)}$ represents the element of $\boldsymbol{Y}$ in the j-th row and the j-th column. $\boldsymbol{Y}_{(jj)}$ represents a matrix whose elements are zeros except for the element in the j-th row and the j-th column, which is $Y_{(jj)}$.

According to equation (8), equation (6) can be transformed into

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_k &= \sum_{j=1}^{n}\bar{\boldsymbol{A}}_{k/0}\boldsymbol{P}_{0(jj)}\bar{\boldsymbol{A}}_{k/0}^{\mathrm{T}}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\bar{\boldsymbol{B}}_{k/i-1}\boldsymbol{Q}_{i-1(jj)}\bar{\boldsymbol{B}}_{k/i-1}^{\mathrm{T}}+\\ &\quad \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\bar{\boldsymbol{K}}_{k/i}\boldsymbol{R}_{i(jj)}\bar{\boldsymbol{K}}_{k/i}^{\mathrm{T}}\\ &= \sum_{j=1}^{n}P_{0(jj)}\bar{\boldsymbol{A}}_{k/0}^{(:j)}(\bar{\boldsymbol{A}}_{k/0}^{(:j)})^{\mathrm{T}}+\sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k}\bar{\boldsymbol{B}}_{k/i-1}\boldsymbol{Q}_{i-1(jj)}\bar{\boldsymbol{B}}_{k/i-1}^{\mathrm{T}}+\\ &\quad \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{k}\bar{\boldsymbol{K}}_{k/i}\boldsymbol{R}_{i(jj)}\bar{\boldsymbol{K}}_{k/i}^{\mathrm{T}}\\ &= \sum_{j=1}^{n}\bar{\boldsymbol{P}}_k^{(j)}+\sum_{j=1}^{l}\bar{\boldsymbol{Q}}_k^{(j)}+\sum_{j=1}^{m}\bar{\boldsymbol{R}}_k^{(j)}\end{aligned} \tag{9}$$

where

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{P}}_k^{(j)}=P_{0(jj)}\bar{\boldsymbol{A}}_{k/0}^{(:j)}(\bar{\boldsymbol{A}}_{k/0}^{(:j)})^{\mathrm{T}}\\ \bar{\boldsymbol{Q}}_k^{(j)}=\sum_{i=1}^{k}\bar{\boldsymbol{B}}_{k/i-1}\boldsymbol{Q}_{i-1(jj)}\bar{\boldsymbol{B}}_{k/i-1}^{\mathrm{T}}\\ \bar{\boldsymbol{R}}_k^{(j)}=\sum_{i=1}^{k}\bar{\boldsymbol{K}}_{k/i}\boldsymbol{R}_{i(jj)}\bar{\boldsymbol{K}}_{k/i}^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{10}$$

$\bar{\boldsymbol{A}}_{k/0}$, $\bar{\boldsymbol{Q}}_k^{(j)}$ and $\bar{\boldsymbol{R}}_k^{(j)}$ are all $n\times n$ square matrix. Their recursions are

$$\bar{\boldsymbol{A}}_{k/0}=\boldsymbol{A}_{k/k-1}\cdots\boldsymbol{A}_{2/1}\boldsymbol{A}_{1/0}=\boldsymbol{A}_{k/k-1}\bar{\boldsymbol{A}}_{k-1/0} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{Q}}_k^{(j)} &= \sum_{i=1}^{k}\bar{\boldsymbol{B}}_{k/i-1}\boldsymbol{Q}_{i-1(jj)}\bar{\boldsymbol{B}}_{k/i-1}^{\mathrm{T}}\\ &= \sum_{i=1}^{k}\bar{\boldsymbol{A}}_{k/i}\boldsymbol{B}_{i/i-1}\boldsymbol{Q}_{i-1(jj)}(\bar{\boldsymbol{A}}_{k/i}\boldsymbol{B}_{i/i-1})^{\mathrm{T}}\\ &= \sum_{i=1}^{k-1}\bar{\boldsymbol{A}}_{k/i}\boldsymbol{B}_{i/i-1}\boldsymbol{Q}_{i-1(jj)}(\bar{\boldsymbol{A}}_{k/i}\boldsymbol{B}_{i/i-1})^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}_{k/k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1(jj)}\boldsymbol{B}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}\\ &= \boldsymbol{A}_{k/k-1}\Big[\sum_{i=1}^{k-1}\bar{\boldsymbol{A}}_{k-1/i}\boldsymbol{B}_{i/i-1}\boldsymbol{Q}_{i-1(jj)}(\bar{\boldsymbol{A}}_{k-1/i}\boldsymbol{B}_{i/i-1})^{\mathrm{T}}\Big]\boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\\ &\quad \boldsymbol{Q}_{k-1(jj)}\boldsymbol{B}_{k/k-1}^{(:j)}(\boldsymbol{B}_{k/k-1}^{(:j)})^{\mathrm{T}}\\ &= \boldsymbol{A}_{k/k-1}\bar{\boldsymbol{Q}}_{k-1}^{(j)}\boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Q}_{k-1(jj)}\boldsymbol{B}_{k/k-1}^{(:j)}(\boldsymbol{B}_{k/k-1}^{(:j)})^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{12}$$

$$\bar{\boldsymbol{R}}_k^{(j)}=\boldsymbol{A}_{k/k-1}\bar{\boldsymbol{R}}_{k-1}^{(j)}\boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+R_{k(jj)}\boldsymbol{K}_k^{(:j)}(\boldsymbol{K}_k^{(:j)})^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

where $\boldsymbol{B}_{k/i-1}^{(:j)}$ represents the j-th column vector ($j=1,2,\cdots,l$) in $\boldsymbol{B}_{k/i-1}$ and $\boldsymbol{K}_{k/i}^{(:j)}$ represents the j-th column vector($j=1,2,\cdots,m$) in $\boldsymbol{K}_{k/i}$. Initial matrices of the recursions are $\bar{\boldsymbol{A}}_{0/0}=\boldsymbol{I}$, $\bar{\boldsymbol{Q}}_0^{(j)}=\boldsymbol{0}$ and $\bar{\boldsymbol{R}}_0^{(j)}=\boldsymbol{0}$.

With equation (9), $\bar{\boldsymbol{P}}_k^{(j)}$, $\bar{\boldsymbol{Q}}_k^{(j)}$ and $\bar{\boldsymbol{R}}_k^{(j)}$ represent the effect of initial state covariance (initial state uncertainty) component $P_{0(jj)}$ ($j=1,2,\cdots,n$), process noise component $Q_{i-1(jj)}$ ($i=1,2,\cdots,k; j=1,2,\cdots,l$) and measurement noise component $R_{i(jj)}$ ($i=1,2,\cdots,k; j=1,2,\cdots,m$) on the state estimation error covariance $\boldsymbol{P}_k$ at time k. The covariance $\boldsymbol{P}_k$ is composed of all $(n+l+m)$ components. Note that $\bar{\boldsymbol{A}}_{k/0}^{(:j)}, \bar{\boldsymbol{B}}_{k/i-1}, \bar{\boldsymbol{K}}_{k/i}$ are correlated with filtering gain $\boldsymbol{K}_k$ according to equations (4), (8) and (10). At the meantime, $\boldsymbol{K}_k$ is correlated with $\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{Q}_k$ and $\boldsymbol{R}_k$ in Kalman filtering equations. Therefore, the three sum structures in equation (9)

imply indirect relationships. If only considering the direct effect of $\boldsymbol{P}_0$, $\boldsymbol{Q}_k$ and $\boldsymbol{R}_k$ on covariance $\boldsymbol{P}_k$, we call equation (9) as error distribution equation of Kalman filter error factors. It can be used to quantitively verify the effect of various errors on Kalman filter state estimation roughly. Define effect contribution percentage of each error as below:

$$\begin{cases} p_s^j = \dfrac{\bar{P}_{k(ss)}^{(j)}}{P_{k(ss)}} \times 100\% & j = 1,2,\cdots,n \\ q_s^j = \dfrac{\bar{Q}_{k(ss)}^{(j)}}{P_{k(ss)}} \times 100\% & j = 1,2,\cdots,l \\ r_s^j = \dfrac{\bar{R}_{k(ss)}^{(j)}}{P_{k(ss)}} \times 100\% & j = 1,2,\cdots,m \end{cases} \tag{14}$$

In equation (14), the subscript "(ss)" represents the element in the s-th row and the s-th column. Taking p_s^j as an example, it represents the effect contribution percentage of the j-th diagonal component $P_{0(jj)}$ of initial covariance $\boldsymbol{P}_0$ on the s-th component $P_{k(ss)}$ at the k moment. In other words, it represents how $P_{0(jj)}$ affect estimation error of the s-th state component $\hat{X}_{k(s)}$. The higher percentage is, the more effect it will cause. Similarly, q_s^j, r_s^j represent the effect of process noise component and measurement noise component on $\hat{X}_{k(s)}$. An error distribution table (Tab. 1) can be made according to equation (14). It is helpful for analyzing the effect of errors in filter process and provides a direction of decreasing state estimation error. There are $n \times (n+l+m)$ entries in data section of Tab. 1. Obviously, the sum of each row must be 1. The maximum element in each row represents the major error source of the state estimation error. The Kalman filter estimation precision can be improved through decreasing the maximum element in each row by designing or modifying the filter carefully.

Tab. 1: Kalman filter state estimation error distribution

State	Error factor and percentage											
	Initial error				Process noise				Measurement noise			
$\hat{X}_{k(1)}$	p_1^1	p_1^2	$\cdots$	p_1^n	q_1^1	q_1^2	$\cdots$	q_1^l	r_1^1	r_1^2	$\cdots$	r_1^m
$\hat{X}_{k(2)}$	p_2^1	p_2^2	$\cdots$	p_2^n	q_2^1	q_2^2	$\cdots$	q_2^l	r_2^1	r_2^2	$\cdots$	r_2^m
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\hat{X}_{k(n)}$	p_n^1	p_n^2	$\cdots$	p_n^n	q_n^1	q_n^2	$\cdots$	q_n^l	r_n^1	r_n^2	$\cdots$	r_n^m

Specially, if process noise variance matrix $\boldsymbol{Q}_k$ is constant (denoted as $\boldsymbol{Q}_k \equiv \boldsymbol{Q}_0$), both side of equation (12) divided by $Q_{0(jj)}$ yields

$$\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_k^{(j)} = \boldsymbol{A}_{k/k-1} \bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_{k-1}^{(j)} \boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_{k/k-1}^{(:j)} (\boldsymbol{B}_{k/k-1}^{(:j)})^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

where, $\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_k^{(j)} = \bar{\boldsymbol{Q}}_k^{(j)} / Q_{0(jj)}$. Similarly, if measurement noise variance matrix $\boldsymbol{R}_k$ is constant (denoted as $\boldsymbol{R}_k \equiv \boldsymbol{R}_0$), according to equation (13), we have

$$\bar{\bar{\boldsymbol{R}}}_k^{(j)} = \boldsymbol{A}_{k/k-1} \bar{\bar{\boldsymbol{R}}}_{k-1}^{(j)} \boldsymbol{A}_{k/k-1}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{K}_k^{(:j)} (\boldsymbol{K}_k^{(:j)})^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

where, $\bar{\bar{\boldsymbol{R}}}_k^{(j)} = \bar{\boldsymbol{R}}_k^{(j)} / R_{0(jj)}$. Equation (10) can be reduced to

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{P}}_k^{(j)} = P_{0(jj)} \bar{\bar{\boldsymbol{P}}}_k^{(j)} \\ \bar{\boldsymbol{Q}}_k^{(j)} = Q_{0(jj)} \bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_k^{(j)} \\ \bar{\boldsymbol{R}}_k^{(j)} = R_{0(jj)} \bar{\bar{\boldsymbol{R}}}_k^{(j)} \end{cases} \tag{17}$$

where $\bar{\bar{\boldsymbol{P}}}_k^{(j)} = \bar{\boldsymbol{A}}_{k/0}^{(:j)} (\bar{\boldsymbol{A}}_{k/0}^{(:j)})^{\mathrm{T}}$ ($\bar{\bar{\boldsymbol{Q}}}_k^{(j)}$ or $\bar{\bar{\boldsymbol{R}}}_k^{(j)}$) is called transfer matrix effected by initial state (process noise or measurement noise) variance. It is noticed that the relation between error factor and error effect has proportional relationship under the condition when the process noise matrix and measurement noise matrix are constant and the indirect effect of gain $\boldsymbol{K}_k$ is not considered. The proportional relationship does not hold strictly when considering the filter gain effect. However, it is still approximately correct for the major error factors.

4 Analysis of Observability Degree

If the system model is accurate, standard Kalman filter covariance $\boldsymbol{P}_k$ reflects covariance among each state. Its diagonal element represents the corresponding state estimation error. The change of state estimation error can be monitored from the change of $\boldsymbol{P}_k$ over time. The ranges of diagonal elements quantitively describe the strength level of corresponding state estimation effectiveness. Especially for the time-varying system, the change curve of $\boldsymbol{P}_k$ can be used to analyze the effect of time-varying parameters on state estimation, which is helpful for system design and operational process.

The initial system state cannot be accurately known in general. $\hat{\boldsymbol{X}}_0$ can be set as rough values empirically. Initial covariance $\boldsymbol{P}_0$ reflects initial state estimation error. In principle, the rougher value $\hat{\boldsymbol{X}}_0$ is set, the higher value $\boldsymbol{P}_0$ should be. The purpose of Kalman filter is to give the state estimation with less error. As the filter processes, values of covariance $\boldsymbol{P}_k$ should be smaller and smaller, which is the expected performance.

For each component $X_{k(j)}$ ($j = 1,2,\cdots,n$) in the state vector, define its observability degree as below

$$\sigma_{k(j)} = \sqrt{\frac{P_{0(jj)}}{P_{k(jj)}}} \tag{18}$$

According to the definition, observability degree is aimed for a certain state at a certain moment and it is a ratio of a certain state error standard deviation at filtering beginning moment with that at k moment. Observability degree is a dimensionless quantity. A larger value means the corresponding state estimation error decreases more obviously or estimation precision increases more significantly.

Based on the experience, we can set threshold values to judge observability level of state $X_{k(j)}$ as below

$$\begin{cases} \sigma_{k(j)} \le 1 & unobservable \\ 1 < \sigma_{k(j)} \le 2 & weak \\ 2 < \sigma_{k(j)} \le 10 & medium \\ \sigma_{k(j)} > 10 & strong \end{cases} \tag{19}$$

If the observability degree curve $\sigma_{k(j)}$ relative to time k ($k - \log(\sigma_{k(j)})$) is plotted, the variation tendency of the observability degree of state estimation could be displayed intuitively.

5 Example and Analysis

In the following section, we take SINS static initial alignment under single-position and dual-position schemes as an example to demonstrate the application of the error distribution and observability degree analysis.

The stochastic model of a 12-dimension SINS's precise alignment is as follow, which uses the velocity error as measurement

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{W} \\ \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{V} \end{cases} \tag{20}$$

where

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X} &= \left[\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}} \quad (\delta\boldsymbol{v}^n)^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{\varepsilon}^b)^{\mathrm{T}} \quad (\boldsymbol{\nabla}^b)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}} \\ &= \left[\phi_E \quad \phi_N \quad \phi_U \quad \delta v_E^n \quad \delta v_N^n \quad \delta v_U^n \right. \\ &\quad \left. \varepsilon_x^b \quad \varepsilon_y^b \quad \varepsilon_z^b \quad \nabla_x^b \quad \nabla_y^b \quad \nabla_z^b\right]^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} -(\boldsymbol{\omega}_{ie}^n\times) & \boldsymbol{0}_{3\times3} & -\boldsymbol{C}_b^n & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ -(\boldsymbol{g}^n\times) & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{C}_b^n \\ & & \boldsymbol{0}_{6\times12} & \end{bmatrix},\ \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{W}_g \\ \boldsymbol{W}_a \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{C}_b^n & \boldsymbol{0}_{3\times3} \\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{C}_b^n \\ \boldsymbol{0}_{6\times6} & \end{bmatrix},\ \boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{I}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times6} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\phi}, \delta\boldsymbol{v}^n, \boldsymbol{\varepsilon}^b, \boldsymbol{\nabla}^b$ denote misalignment angle error, velocity error, the static drift of gyroscope and the static drift of accelerometer, respectively. $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n, \boldsymbol{g}^n, \boldsymbol{C}_b^n$ denote the projection of Earth's angular velocity in the "East-North-Up" navigation coordinate system, the gravity in the navigation coordinate system and the attitude matrix of SINS. $\boldsymbol{W}_g, \boldsymbol{W}_a, \boldsymbol{V}$ denote the noise of the gyro, accelerometer and the velocity measurement.

The initial alignment simulation parameter settings are as follow: Latitude L=30°, longitude λ =108°, height H=380m, initial attitude angle 0°, gyro run-to-run drift 0.01°/h, angle random walk coefficient 0.001°/$\sqrt{\text{h}}$, accelerometer run-to-run bias 50ug, the rate of random walk coefficient 1 ug/$\sqrt{\text{Hz}}$, the initial horizontal misalignment angle error 0.1°, the initial azimuth misalignment angle error 1°, the initial velocity error 1m/s, and velocity measurement noise intensity 0.01m/$\sqrt{\text{s}}$. The simulation time is 600s, and discretization frequency is 100Hz, During the 290s~310s in dual-position initial alignment, the system rotates 180° around the azimuth axis at an angular velocity of 9°/s.

The simulation results are shown in Fig. 1 to Fig. 4. Fig. 1 and Fig. 2 show the observability and the error distribution of the initial alignment in the single-position scheme, Fig. 3 and Fig. 4 show the observability and the error distribution of the initial alignment in the dual-position scheme, In Fig. 2 and Fig. 4, Labels j1 ~ j12 on the abscissa axis correspond to the initial variance of the states, j13 ~ j18 correspond to the system noise variance, and j19 ~ j21 correspond to the velocity measurement noise variance in the "East-North -Up" coordinate system.

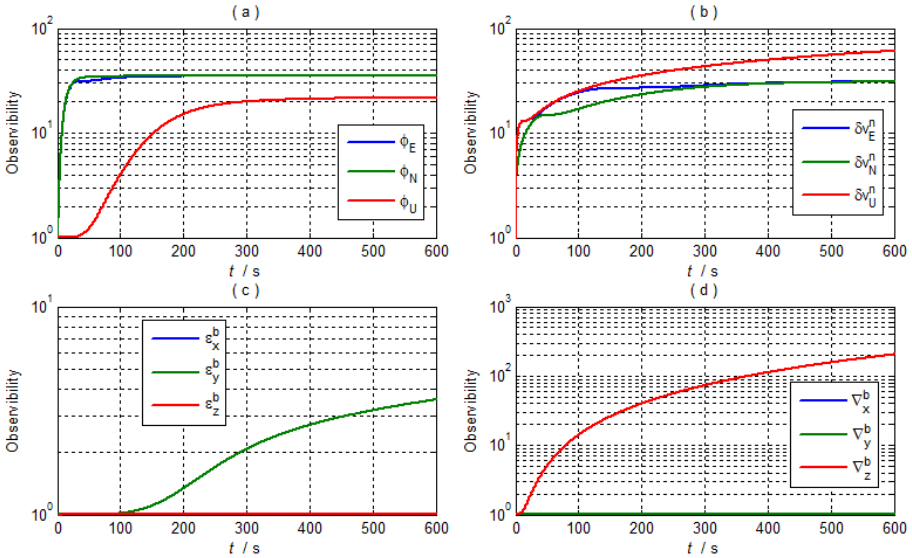


Fig. 1: Observability of single-position alignment

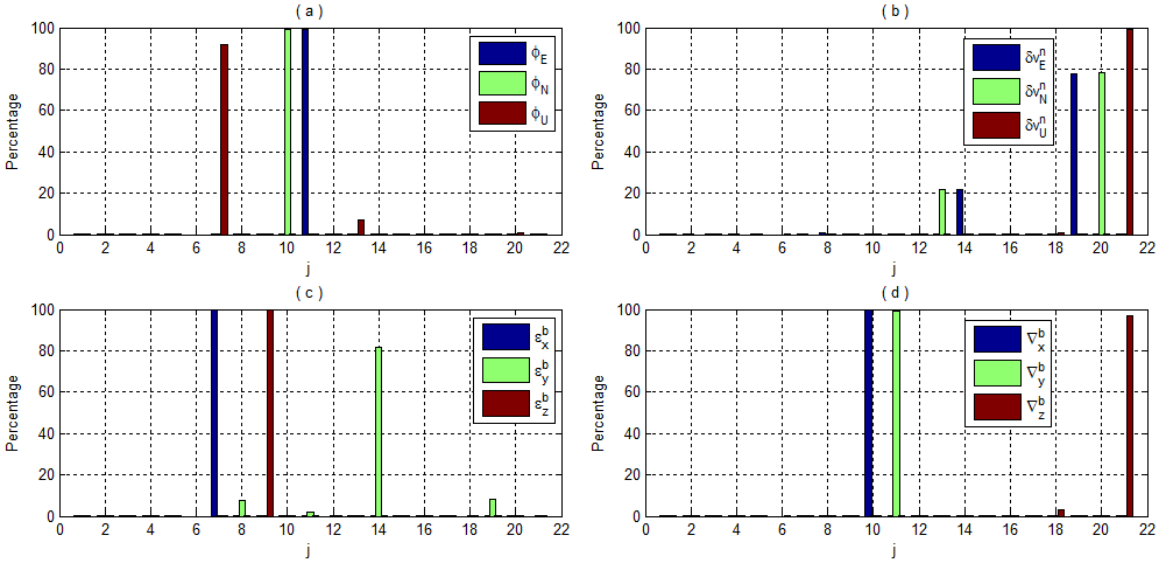


Fig. 2: Error distribution of single-position alignment

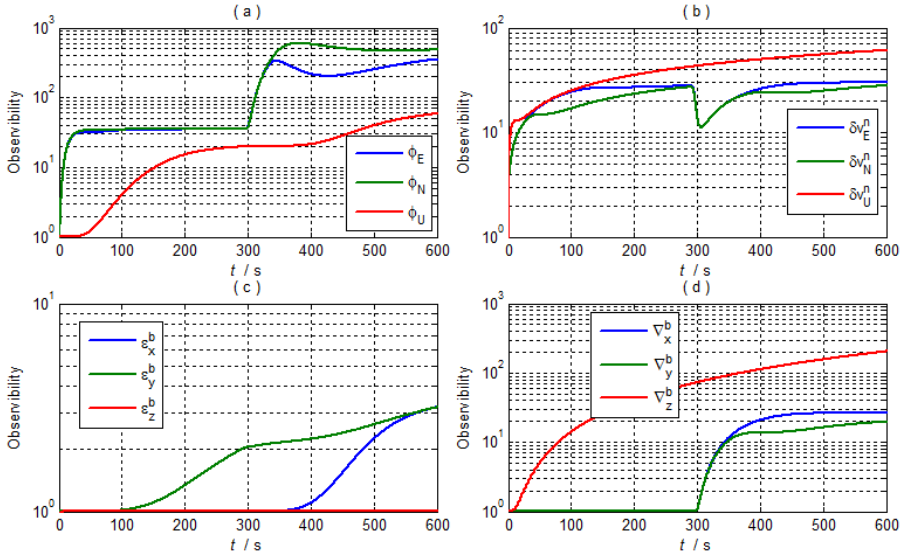


Fig. 3: Observability of dual-position alignment

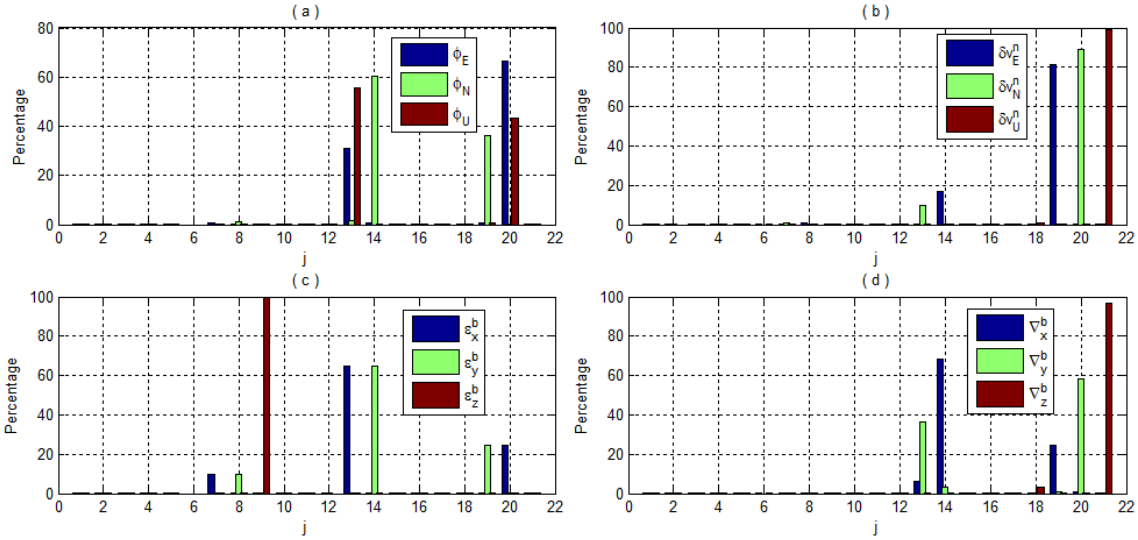


Fig. 4: Error distribution of dual-position alignment

The analysis of the simulation results is as follows:

(1) As shown in the Fig. 1 of single-position scheme, the state $\varepsilon_x^b, \varepsilon_z^b, \nabla_x^b, \nabla_y^b$ are not observable, and the observability of ε_y^b is weaker than the others. Compared with the single-position alignment, in dual-position alignment, only the ε_z^b is unobservable in Fig. 3, and the observability of three misalignment angles were significantly enhanced after rotating 180°.

(2) Fig. 2 shows that the main factors that affect the estimation error of misalignment angle are $P_0(\nabla_y^b), P_0(\nabla_x^b), P_0(\varepsilon_x^b)$ ($P_0(x)$ is the initial variance corresponding to the state component (x)). The main factors affecting the estimation of velocity error $\delta v_E^n, \delta v_N^n, \delta v_U^n$ are the measurement noise. The main factors that affect the estimation error of gyro zero-bias stochastic constant values $\varepsilon_x^b, \varepsilon_y^b, \varepsilon_z^b$ are $P_0(\varepsilon_x^b)$, gyro noise in the y-axis and $P_0(\varepsilon_z^b)$ (in fact, from (1) we know $\varepsilon_x^b, \varepsilon_z^b$ are not observable, so the analysis to them is ignored). The main factors that affect the estimation error of accelerometer's random constant bias are $P_0(\nabla_x^b), P_0(\nabla_y^b)$ and the vertical velocity measurement noise (according to (1), ∇_x^b, ∇_y^b are not observable). Compared with the single-position alignment, the estimated errors of state $\phi_E, \phi_N, \phi_U, \varepsilon_x^b, \varepsilon_y^b, \nabla_x^b, \nabla_y^b$ in Fig. 4 are mainly affected by the gyro noise and the velocity measurement noise. Therefore, the gyro noise and the velocity measurement noise are the main factors that determine the precision of the dual-position alignment.

6 Conclusion

According to the Kalman filter equations, this paper provides the error distribution equations that affect the error of filter estimation, which include the influences of initial state error, the system noise and the measurement noise. The paper also proposes a new definition and calculation method of the degree of observability, which can be used to visually display the variation tendency of state estimation error. Finally, the error distribution and observability methods are applied to the initial alignment analysis of SINS, and the results are correct and valid.

In practical application, when design a complex high-dimension filter system that comprehensively describes the system dynamics for a certain problem, we can apply the observability analysis and the error distribution method proposed in this paper to the design and optimization of the filter. Finally, some suggestions to the readers: (1) For the unobservable state component, it should be deleted, thus the state dimension of the system can be reduced, and the amount of the computation can also be reduced. (2) For the state component whose observability is weak, the corresponding initial value of error variance matrix should not be too large. Otherwise, the estimation error in the filtering process may fluctuate violently, and the feedback correction should be used prudently in the indirect filtering. (3) For the strongly observable state components, the corresponding elements in the error variance matrix can be set as large initial values. Even so, the mean square error of the state will be convergence rapidly during the subsequent filtering process. (4) For the observable state components, by using distribution table and taking appropriate measures to reasonably reduce the proportion of the largest error factor, the corresponding state component filtering estimation error can be effectively reduced.

References

[1] S. Feng, X. Yuan, Observability and its application in Kalman filter design[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 1999,7(2):18-21.

[2] D. Goshen-Meskin, I.Y. Bar-Itzhack, Observability analysis of piece-wise constant systems, part 1: theory. *IEEE Transactions Aerospace and Electronic Systems*, 1992,28(4): 1056-1067.

[3] D. Goshen-Meskin, I. Y. Bar-Itzhack, Observability analysis of piece-wise constant systems. part II. application to inertial navigation in-flight alignment [military applications][J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1992,28(4):1068-1075.

[4] X. Cheng, D. Wan, Study on observability and its degree of strapdown inertial navigation system[J]. *Journal of Southeast University*, 1997,27(6):6-11.

[5] D. Wang, H. Zhang, Methods for the analysis of observability and their application to INS initial alignment[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 1999, 25(3):342-346.

[6] L. Zhao, L. Li, M. Sun, et al, Analysis on observability of SINS multi-position alignment based on singular value decomposition[J]. *Journal of Chinese Inertial Technology*, 2008,16(5):523-528.

[7] F. M. Ham, R. G. Brown, Observability, eigenvalues and Kalman filtering[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2007,AES-19(2):269-273.

[8] Y. Jiang, Y. Lin, Error estimation of INS ground alignment through observability analysis[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1992,28(1):92-97.

[9] J. Yang, Observability analysis of strapdown inertial navigation system initial alignment[J]. *Aerospace Control*, 2014,32(1):26-29.

[10] G. Yan, Y. Qin, Initial alignment accuracy analysis and simulation of strapdown inertial navigation system on a stationary base[J]. *Computer Simulation*, 2006,23(10):36-40.

[11] Y. Qin, H. Zhang, S. Wang, Kalman filter and integrated navigation principle[M]. *Northwestern Polytechnical University Press*, 1998.

引文格式:严恭敏,杨小康,翁浚,等. 一种无误差的捷联惯导数值更新新算法[J]. 导航定位学报,2018,6(2):20-22,35. (YAN Gongmin, YANG Xiaokang, WENG Jun, et al. A new error free algorithm for SINS numerical updating[J]. Journal of Navigation and Positioning, 2018, 6(2): 20-22, 35.) DOI: 10.16547/j.cnki.10-1096.20180204.

一种无误差的捷联惯导数值更新新算法

严恭敏，杨小康，翁　浚，秦永元
（西北工业大学 自动化学院，西安 710072）

摘要：针对捷联惯导系统中传统等效旋转矢量多子样算法存在原理性误差的问题，根据捷联惯导姿态阵、速度和位置微分方程，直接采用泰勒级数展开法推导并给出了一种新的数值更新算法，新算法在陀螺输出角速度和加速度计输出比力均为时间多项式条件下不存在任何误差，隐含了对姿态和速度不可交换误差的精确补偿。最后，通过仿真验证了新算法在大机动环境下的高精度性能。

关键词：捷联惯导系统；数值更新算法；不可交换误差；大机动
中图分类号：V249.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：2095-4999(2018)02-0020-04

A new error free algorithm for SINS numerical updating

YAN Gongmin, *YANG Xiaokang*, *WENG Jun*, *QIN Yongyuan*
(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: For the inevitable principle error in the deduction of traditional multi-sample algorithm for SINS (Strapdown Inertial Navigation System), a new numerical updating algorithm is deduced with the basis of Taylor Series expansion according to the differential equation of attitude matrix, velocity and position. In condition of angular velocity and specific force from IMU (Inertial Measurement Unit) are both expressed as time polynomials, the new algorithm is proposed with no error, which implies a precise compensation of non-communicative error for attitude and velocity updating. Finally, high-precision performance under high maneuver environment is verified via computer simulation.

Keywords: strapdown inertial navigation system; numerical updating algorithm; non-communicative error; high maneuver

0　引言

自二十世纪六七十年代开始，捷联惯导的传统算法经过了几十年的发展，其主流设计方法及细节已经完成[1-6]。姿态更新是整个捷联算法的核心，为了补偿姿态不可交换误差，基于等效旋转矢量概念提出了多子样及其优化算法；利用对偶性原理，可以直接将姿态多子样算法应用于速度更新算法[7]；与前两者相比，位置更新算法的算法误差影响相对较小些，在许多应用中一般可以不予考虑。

然而，传统的不可交换误差补偿多子样算法是在等效旋转矢量方程(Bortz 方程[3])进行二阶近似的基础上推导的，它本质上存在原理性误差，特别在大机动环境下计算误差不容忽略，有时高子样算法的误差反而比低子样的大[8]。即使考虑得更加周全，保留 Bortz 方程的高阶近似[9]，也还依然存在原理性误差，且高阶补偿算法的推导过程会变得非常复杂。最近，一些学者研究了无原理性算法误差的捷联姿态更新方法，彻底解决了大机动环境下的姿态更新问题[10-11]。

本文根据捷联惯导的姿态阵、速度和位置微分方程，直接采用泰勒级数展开方法，给出了全套捷联惯导更新数值算法，在陀螺输出角速度和加速度计输出比力满足多项式形式假设的条件下(根据数学知识，平滑的角运动或线运动总是可以用多项式无限逼近的)，该算法不存在任何原理性误差，隐含了对姿态、速度和位置更新不可交换

收稿日期：2017-12-28
第一作者简介：严恭敏(1977—)，男，福建建瓯人，博士，副教授，研究方向为惯性导航与多源信息融合。

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

误差的完美补偿。通常在地球表面上实施的惯性导航需同时考虑地球自转和有害加速度的补偿，相对于大机动而言这些补偿量均为缓变量，计算误差很小。为了理论研究和对比分析方便，暂且以惯性坐标系作为导航参考系，给出了简洁的捷联惯导数值更新算法，最后，通过仿真实验验证了算法不存在原理性误差，具有很高的计算精度。

1　由角增量(速度增量)拟合角速度(比力)的方法

捷联惯导系统中的惯性器件通常是角增量(或速度增量)输出形式的，本文的算法要以角速度(或比力)作为输入，为此，先给出由角增量(速度增量)转换为角速度(比力)的计算方法。

由文献[12]知，若陀螺角增量的采样间隔为 h，在时间段 $(-ph,nh]$ 内进行了 N 次采样(p,n 均为整数，$p\geq 0,n>0$ 且 $p+n=N$)，角增量分别记为 $\Delta\boldsymbol{\theta}_j$ ($j=-p+1,-p+2,\cdots,n$)，则可得角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的关于时间 t 的 $(N-1)$ 次多项式拟合为

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\begin{bmatrix}t^{N-1} & t^{N-2} & \cdots & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

式中：

$$\boldsymbol{\Theta}=\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{\theta}_{-p+1} & \Delta\boldsymbol{\theta}_{-p+2} & \cdots & \Delta\boldsymbol{\theta}_n\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix}(t_{-p+1}^N-t_{-p}^N)/N & (t_{-p+2}^N-t_{-p+1}^N)/N & \cdots & (t_n^N-t_{n-1}^N)/N\\ (t_{-p+1}^{N-1}-t_{-p}^{N-1})/(N-1) & (t_{-p+2}^{N-1}-t_{-p+1}^{N-1})/(N-1) & \cdots & (t_n^{N-1}-t_{n-1}^{N-1})/(N-1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ t_{-p+1}-t_{-p} & t_{-p+2}-t_{-p+1} & \cdots & t_n-t_{n-1}\end{bmatrix};\ t_j=jh。$$

同理，可得比力 f 的多项式拟合为

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{v}\boldsymbol{\Gamma}^{-1}\begin{bmatrix}t^{N-1} & t^{N-2} & \cdots & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{V}_{-p+1} & \Delta\boldsymbol{V}_{-p+2} & \cdots & \Delta\boldsymbol{V}_n\end{bmatrix}$，$\Delta\boldsymbol{V}_j$ 为时间段 $(-ph,nh]$ 内的 N 次加速度计速度增量采样。

2　捷联惯导更新新算法的推导

首先给出两矩阵之乘积的求导公式，即若 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{XY}$，则有

$$\boldsymbol{Z}^{(i)}=\sum_{j=0}^{i}C_i^j\boldsymbol{X}^{(j)}\boldsymbol{Y}^{(i-j)} \tag{3}$$

式中：i,j 为非负整数，$C_i^j=\dfrac{i!}{j!(i-j)!}$ 为组合数；$\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 为适当维数的矩阵；右上标小括号内的数值表示求导阶次。

接下来根据捷联惯导姿态阵、速度和位置微分方程分别给出相应的数值更新算法。

1)在捷联惯导算法中，姿态阵微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\omega}\times) \tag{4}$$

式中：$\boldsymbol{C}$ 为姿态矩阵；$(\boldsymbol{\omega}\times)$ 表示由向量 $\boldsymbol{\omega}$ 构成的反对称阵。

假设姿态更新时间间隔为 $(0,T]$ 且 $T=nh$，将 T 时刻的姿态阵 $\boldsymbol{C}_T$ 在 0 时刻展开成泰勒级数形式，并将式(4)代入，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_T&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{T^i}{i!}\boldsymbol{C}_0^{(i)}=\boldsymbol{C}_0+T\boldsymbol{C}_0^{(1)}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{T^i}{i!}\boldsymbol{C}_0^{(i)}=\\ &\boldsymbol{C}_0+T\boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{\omega}_0\times)+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{T^i}{i!}\boldsymbol{C}_0^{(i)}=\\ &\boldsymbol{C}_0(\boldsymbol{I}+T\boldsymbol{\omega}_0\times)+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{T^i}{i!}\boldsymbol{C}_0^{(i)}\end{aligned} \tag{5}$$

根据式(3)和式(4)，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_0^{(i)}&=\left[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{\omega}\times)\right]^{(i-1)}=\\ &\sum_{j=0}^{i-1}C_{i-1}^j\boldsymbol{C}_0^{(j)}\left[\boldsymbol{\omega}_0^{(i-1-j)}\times\right]\end{aligned} \tag{6}$$

式(6)说明，姿态阵 $\boldsymbol{C}_0$ 的高阶导数可以用它的低阶导数表示，最终 $\boldsymbol{C}_0^{(i)}$ 总可以表示成角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的各阶导数以及初始姿态阵 $\boldsymbol{C}_0$ 的函数。利用式(5)和式(6)便实现了从 $\boldsymbol{C}_0$ 到 $\boldsymbol{C}_T$ 的姿态阵更新，其中式(5)右端的第二项(求和项)隐含了对姿态不可交换误差(圆锥误差)的精确补偿。

2)捷联惯导速度微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{V}}=\boldsymbol{Cf} \tag{7}$$

将 T 时刻的速度 $\boldsymbol{V}_T$ 展开成泰勒级数形式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_T&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{T^i}{i!}\boldsymbol{V}_0^{(i)}=\boldsymbol{V}_0+T\boldsymbol{V}_0^{(1)}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{T^i}{i!}\boldsymbol{V}_0^{(i)}=\\ &\boldsymbol{V}_0+T\boldsymbol{C}_0\boldsymbol{f}_0+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{T^i}{i!}\boldsymbol{V}_0^{(i)}\end{aligned} \tag{8}$$

根据式(3)和式(7)有

$$\boldsymbol{V}_0^{(i)}=(\boldsymbol{Cf})_0^{(i-1)}=\sum_{j=0}^{i-1}C_{i-1}^j\boldsymbol{C}_0^{(j)}\boldsymbol{f}_0^{(i-1-j)} \tag{9}$$

式(8)右端的第三项(求和项)也隐含了对速度不可交换误差(划船误差)的精确补偿。

3)捷联惯导位置微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{V} \tag{10}$$

将 T 时刻的位置 $\boldsymbol{P}_T$ 展开成泰勒级数形式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_T&=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{T^i}{i!}\boldsymbol{P}_0^{(i)}=\boldsymbol{P}_0+T\boldsymbol{P}_0^{(1)}+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{T^i}{i!}\boldsymbol{P}_0^{(i)}=\\ &\boldsymbol{P}_0+T\boldsymbol{V}_0+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{T^i}{i!}\boldsymbol{V}_0^{(i-1)}\end{aligned} \tag{11}$$

式(11)右端的第三项(求和项)隐含了对位置不可交换误差(涡卷误差)的精确补偿。

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

至此获得完整的包含姿态阵更新、速度更新和位置更新的全套捷联惯导数值更新算法，其计算流程可总结如图 1 所示。算法以 0 时刻的姿态阵 $\boldsymbol{C}_0$ 、速度 $\boldsymbol{V}_0$ 和位置 $\boldsymbol{P}_0$ ，以及陀螺角增量 $\Delta\boldsymbol{\theta}_j$ 和加速度计速度增量 $\Delta\boldsymbol{V}_j$ 为输入，经过迭代求导与累加求和后，输出 T 时刻的姿态阵 $\boldsymbol{C}_T$ 、速度 $\boldsymbol{V}_T$ 和位置 $\boldsymbol{P}_T$ 。当角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和比力 $\boldsymbol{f}$ 可以用多项式描述且泰勒级数展开项数足够多时，理论上算法误差仅取决于计算机的数值计算精度，全套算法不存在任何原理性误差。

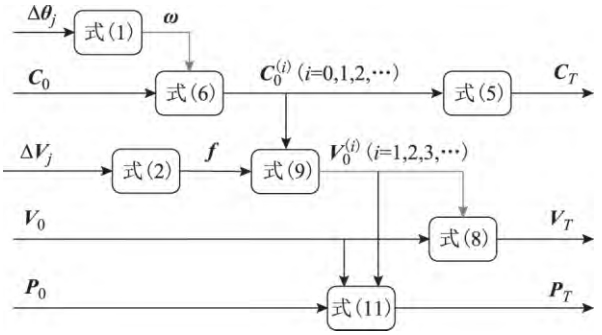


图 1 算法更新流程

3 仿真验证

假设飞机做类似于“普加乔夫眼镜蛇机动”的飞行动作[13]，捷联惯导输出的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和比力 $\boldsymbol{f}$ 可用二次多项式描述，在载体坐标系下按“x(右)—y(前)—z(上)”顺序表示的多项式系数矩阵分别为

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}5 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{f}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -20 & -50 & 0\\ 10 & 20 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix} \tag{13}$$

式中：角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的单位为 rad/s，比力 $\boldsymbol{f}$ 的单位为 $\mathrm{m/s^2}$。显然，飞机只在 x 轴方向上有角速度机动，而在 y 轴和 z 轴方向上均有加速度机动，飞机的飞行轨迹始终在同一铅垂面上。

设置惯性传感器采样频率 100 Hz，仿真时长 1 s，飞机初始姿态为 0，速度 300 m/s。经过传感器数据生成和捷联惯导更新解算仿真，本文新算法与传统多子样算法相比，在 1 s 时导航速度误差如表 1 所列。

表 1 算法误差比较 m/s

算法类别		y 向速度误差	z 向速度误差
本文新算法		0	0
传统算法	2 子样	0.006 487	0.036 355
	3 子样	0.018 854	0.077 062
	4 子样	0.030 258	0.144 725

由表 1 可见，由于同时存在强烈的角速度和加速度机动耦合，传统算法的速度误差较大，高子样算法的误差反而大于低子样算法，其中 4 子样算法的 z 轴速度误差超过了 0.1 m/s。然而对于新算法而言，其速度误差非常小，几乎可以忽略不计，近似为 0。

4 结束语

由于精确的 Bortz 方程非常复杂，不便于直接应用，在传统的姿态不可交换误差补偿多子样算法推导过程中，必须对 Bortz 方程进行简化，忽略高阶项的影响，从而使得传统的多子样补偿算法总是近似成立的，特别在大机动环境下容易引起较大的原理性误差。本文放弃了求解一组固定的不可交换误差补偿系数的做法，直接采用泰勒级数展开式求解捷联惯导姿态阵、速度和位置的数值更新算法，从推导过程中可以看出，当陀螺角速度和加速度计比力能用多项式形式描述时，新算法不存在任何原理性误差，仿真实验结果也表明了新算法是无误差的。就目前的计算机运算能力而言，类似于文献 [10] 的分析，新算法的计算量是可以接受的。当然，在本文理论推导的基础上，读者通过一些简单的修改即可扩展成指北方位捷联惯导系统的数值更新算法，实现高精度的导航解算。

参考文献

[1] SAVAGE P G. A new second-order solution for strapped-down attitude computation[EB/OL]. [2017-10-28]. http://www.ijicic.org/ijicic-12-08014.pdf.

[2] JORDAN J W. An accurate strapdown direction cosine algorithm[EB/OL]. [2017-10-28]. https://www.researchgate.net/publication/24331776_An_accurate_strapdown_direction_cosine_algorithm. NASA TN-D-5384,1969,9.

[3] BORTZ J E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems,1971,7(1):61-66.

（下转第 35 页）

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

[3] 卢维. 高精度实时视觉定位的关键技术研究[D]. 杭州：浙江大学，2015.

[4] ENGEL J，SCHÖPS T，CREMERS D. LSD-SLAM：large-scale direct monocular SLAM[C]//Anon. Proceedings of European Conference on Computer Vision. Zurich：Springer，2014：834-849.

[5] KLEIN G，MURRAY D. Parallel tracking and mapping for small AR workspaces[EB/OL]. [2017-02-19]. http://www.robots. ox. ac. uk/～gk/publications/KleinMurray2007ISMAR. pdf.

[6] FORSTER C，PIZZOLI M，SCARAUZZA D. SVO：fast semi-direct monocular visual odometry[EB/OL]. [2017-02-19]. http://rpg. ifi. uzh. ch/docs/ICRA14_Forster. pdf.

[7] KONOLIGE K，AGRAWAL M. FrameSLAM：from bundle adjustment to real-time visual mapping[J]. IEEE Transactions on Robotics，2008，24(5)：1066-1077.

[8] LABBÉ M，MICHAUD F. Appearance-based loop closure detection for online large-scale and long-term operation[J]. IEEE Transactions on Robotics，2013，29(3)：734-745.

[9] MUR-ARTAL R，MONTIEL J M M，TARDÓS J D. ORB-SLAM：a versatile and accurate monocular SLAM system[J]. IEEE Transactions on Robotics，2017，31(5)：1147-1163.

[10] MUR-ARTAL R，TARDÓS J D. ORB-SLAM2：an open-source slam system for monocular，stereo，and RGB-D cameras [J]. IEEE Transactions on Robotics，2016，33(5)：1255-1262.

[11] FRAUNDORFER F，SCARAMUZZA D. Visual odometry：Part II：matching，robustness，optimization，and applications [J]. IEEE Robotics & Automation Magazine，2012，19(2)：78-90.

（上接第 22 页）

[4] MILLER R. A new strapdown attitude algorithm[J]. Journal of Guidance，Control，and Dynamics，1983，6(4)：287-291.

[5] PARK C G，KIM K J，LEE J G，et al. Formalized approach to obtaining optimal coefficients for coning algorithms[J]. Journal of Guidance，Control，and Dynamics，1999，22(1)：165-168.

[6] SAVAGE P G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 1：attitude algorithms[J] Journal of Guidance，Control，and Dynamics，1998，21(1)：19-28.

[7] ROSCOE K M. Equivalency between strapdown inertial navigation coning and sculling integrals/algorithms[J]. Journal of Guidance，Control，and Dynamics，2001，24(2)：201-205.

[8] 严恭敏，严卫生，徐德民. 经典圆锥误差补偿算法中剩余误差估计的局限性研究[J]. 中国惯性技术学报，2008，16(4)：379-385.

[9] WANG M S，WU W Q，WANG J L，et al. High-order attitude compensation in coning and rotation coexisting environment [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems，2015，51(2)：1178-1190.

[10] 严恭敏，翁浚，杨小康，等. 基于毕卡迭代的捷联姿态更新精确数值解法[J]. 宇航学报，2017，38(12)：1307-1313.

[11] 武元新，郁文贤. 一种基于函数迭代积分的刚体姿态解算方法：201710273489. 3[P]. 2017-11-10.

[12] 严恭敏，杨小康，翁浚，等. 一种求解姿态不可交换误差补偿系数的通用方法[J]. 宇航学报，2017，38(7)：723-727.

[13] 李中华. Su—27 飞机眼镜蛇机动及其战术意义[J]. 飞行力学，2000，18(1)：54-57.

?1994-2018 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

超星·期刊

第 26 卷第 6 期 中国惯性技术学报 Vol.26 No.6
2018 年 12 月 Journal of Chinese Inertial Technology Dec. 2018

文章编号：1005-6734(2018)06-0708-05 doi: 10.13695/j.cnki.12-1222/o3.2018.06.002

基于多项式迭代的等效旋转矢量微分方程精确数值算法

严恭敏，李思锦，秦永元

（西北工业大学 自动化学院，西安 710072）

摘要：提出了一种基于多项式迭代的求解等效旋转矢量微分方程（Bortz 方程）的新算法，以角速度多项式作为输入，利用泰勒级数将 Bortz 方程中的余切函数展开成多项式形式，将不可交换误差补偿中的叉乘和求模运算变换为多项式的卷积运算，通过迭代求取等效旋转矢量的多项式精确解，有效地解决了捷联惯导系统在大角度机动环境下的姿态精确确定问题。此外，还对新算法的数值运算量和迭代收敛精度进行了分析。最后，进行了半锥角 90°、频率 1 Hz、时长 1 s 的大幅值圆锥运动姿态更新仿真实验，与传统圆锥优化算法的 5″姿态误差相比，新算法的误差仅为 10^{-7}″，具有明显的精度优势。

关 键 词：捷联姿态更新算法；等效旋转矢量；迭代；圆锥运动

中图分类号：V249.3 **文献标志码：**A

Accurate numerical solution for differential equation of equivalent rotation vector based on polynomial iteration

YAN Gongmin, LI Sijin, QIN Yongyuan

(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: A new numerical solution for the equivalent rotation vector differential equation (Bortz equation) based on polynomial iteration is proposed. In this algorithm, the angular velocity polynomial is taken as input, and the Taylor series is used for expanding the cotangent function into polynomial form in the Bortz equation. The cross-multiplication and the modulo operation in the non-commutative error compensation are transformed into polynomial convolution operation. Then an exact polynomial solution for the equivalent rotation vector can be iteratively obtained. By this algorithm, it is easy to reach high accuracy for strapdown attitude updating even under severe angular maneuver. Moreover, the calculation burden and iteration convergence precision of the new algorithm are also analyzed. Finally, a 1s duration test is carried out under large coning motion with 90° apex angle and 1 Hz frequency. In comparison to the error of 5″ by the traditional algorithm, the error by the new algorithm is only 10^{-7}″, showing that the new algorithm can significantly improve the accuracy.

Key words: strapdown attitude algorithm; equivalent rotation vector; iteration; coning motion

在捷联惯导算法中，目前主流的姿态更新求解方法是先使用陀螺角增量（或角速率）的多子样采样计算等效旋转矢量，补偿转动不可交换误差，再使用等效旋转矢量计算姿态更新四元数[1-6]。但是传统多子样算法都是在等效旋转矢量微分方程（Bortz 方程）二阶近似的基础上进行推导的，从源头上看不可避免地存在原理性误差，使得在大机动环境下选用子样数越多，精度往往越差[7]。

最近，数位研究者注意到了传统多子样算法存在的缺陷，提出了一些改进的新算法。文献[8-9]考虑了 Bortz 方程中三阶甚至四阶项的影响，提出一种改善算法精度的方法，增加了角增量的三阶和四阶叉乘项进行不可交换误差补偿，但是该方法的推导过程比较繁琐，难以扩展到五阶及以上叉乘运算，原理上精度受限。文献[10]提出基于四元数微分方程迭代的姿态更新算法，文献[11]提出基于罗德里格参数微分方程迭代的姿态更新算法，两者除了使用的数学描述工具不同外，其总体设计思路基本一致，都是在假设角速度为多项式的条件下，通过迭代计算能够精确给出姿态更新的数值解。相比而言，前者在表示形式上更为简洁且计算量

收稿日期：2018-11-06；**修回日期：**2018-11-29

基金项目：装备预研基金（6142506030105）；航空科学基金（20165853041）

作者简介：严恭敏（1977—），男，博士，副教授，主要从事惯性导航与信息融合理论研究。E-mail: yangongmin@163.com

超星·期刊

稍少一些。类似于上述两种迭代算法，本文将利用 Bortz 微分方程给出基于多项式迭代的等效旋转矢量精确数值算法，有效避免了原理性近似误差。同时，本文对算法的精度和和收敛速度进行了分析。研究结果表明，与四元数迭代方法相比，新算法具有同样的数值计算精度，且计算量相当，具有较好的应用价值。

1　算法理论分析

1.1　迭代算法推导

等效旋转矢量微分方程（Bortz 方程）为[1]

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{\phi^2}\left(1-\frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2}\right)(\boldsymbol{\phi}\times)^2\boldsymbol{\omega} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}$ 为动坐标系相对于参考坐标系的转动角速度矢量，$\phi=|\boldsymbol{\phi}|$ 为等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}$ 的模值。将式(1)中的余切函数作泰勒级数展开，经整理后可得：

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}+\left(\frac{1}{12}+\frac{\phi^2}{720}+\frac{\phi^4}{30240}+\frac{\phi^6}{1209600}+\cdots\right)(\boldsymbol{\phi}\times)^2\boldsymbol{\omega} \tag{2}$$

式(2)两边同时在时间区间 $[0,t]$ 上积分，得：

$$\boldsymbol{\phi}-\boldsymbol{\phi}(0)=\int_0^t\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}+\left(\frac{1}{12}+\frac{\phi^2}{720}+\frac{\phi^4}{30240}+\frac{\phi^6}{1209600}+\cdots\right)(\boldsymbol{\phi}\times)^2\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

将式(3)左边 $\boldsymbol{\phi}(0)$ 移到右边，并改写成迭代的形式，有：

$$\boldsymbol{\phi}^{(i+1)}=\boldsymbol{\phi}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^{(i)}\times\boldsymbol{\omega}+\left[\frac{(\phi^{(i)})^0}{12}+\frac{(\phi^{(i)})^2}{720}+\frac{(\phi^{(i)})^4}{30240}+\frac{(\phi^{(i)})^6}{1209600}+\cdots\right](\boldsymbol{\phi}^{(i)}\times)^2\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}\tau \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{\phi}^{(i)}(i=0,1,2,\cdots)$ 表示第 i 次迭代的等效旋转矢量，且有迭代初值 $\boldsymbol{\phi}^{(0)}=\mathbf{0}$。不失一般性，可令初值 $\boldsymbol{\phi}(0)=\mathbf{0}$。

假设角速度ω为时间 t 的有限次（N–1 次）多项式：

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}w_{N-1,x} & w_{N-2,x} & \cdots & w_{0,x}\\ w_{N-1,y} & w_{N-2,y} & \cdots & w_{0,y}\\ w_{N-1,z} & w_{N-2,z} & \cdots & w_{0,z}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^{N-1}\\ t^{N-2}\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_x\\ \boldsymbol{W}_y\\ \boldsymbol{W}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^{N-1}\\ t^{N-2}\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix} \tag{5}$$

如果实际陀螺采集的为 N 子样的角增量数据，则可先按文献[10]的方法变换为上述角速度多项式，再使用本文方法。

再假设经过第 i 次迭代后的等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ 多项式为

$$\boldsymbol{\phi}^{(i)}=\begin{bmatrix}\cdots & \phi_{2,x}^{(i)} & \phi_{1,x}^{(i)} & \phi_{0,x}^{(i)}\\ \cdots & \phi_{2,y}^{(i)} & \phi_{1,y}^{(i)} & \phi_{0,y}^{(i)}\\ \cdots & \phi_{2,z}^{(i)} & \phi_{1,z}^{(i)} & \phi_{0,z}^{(i)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_x^{(i)}\\ \boldsymbol{\Phi}_y^{(i)}\\ \boldsymbol{\Phi}_z^{(i)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix} \tag{6}$$

注意到式(4)中 $\boldsymbol{\phi}^{(i+1)}$ 为多项式的积分，因而 $\boldsymbol{\phi}^{(i+1)}$（或 $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$）的多项式零次项系数必为 0，即有 $\phi_{0,x}^{(i)}=\phi_{0,y}^{(i)}=\phi_{0,z}^{(i)}=0$。

将式(5)和式(6)代入式(4)右端的被积函数各项中作进一步计算，有：

$$\boldsymbol{\phi}^{(i)}\times\boldsymbol{\omega}=\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_x^{(i)}\\ \boldsymbol{\Phi}_y^{(i)}\\ \boldsymbol{\Phi}_z^{(i)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\right)\times\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_x\\ \boldsymbol{W}_y\\ \boldsymbol{W}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^{N-1}\\ t^{N-2}\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_y^{(i)}*\boldsymbol{W}_z-\boldsymbol{\Phi}_z^{(i)}*\boldsymbol{W}_y\\ -\boldsymbol{\Phi}_x^{(i)}*\boldsymbol{W}_z+\boldsymbol{\Phi}_z^{(i)}*\boldsymbol{W}_x\\ \boldsymbol{\Phi}_x^{(i)}*\boldsymbol{W}_y-\boldsymbol{\Phi}_y^{(i)}*\boldsymbol{W}_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_x\\ \boldsymbol{U}_y\\ \boldsymbol{U}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\left(\boldsymbol{\phi}^{(i)}\times\right)^2\boldsymbol{\omega}=\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_x^{(i)}\\ \boldsymbol{\Phi}_y^{(i)}\\ \boldsymbol{\Phi}_z^{(i)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\right)\times\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_x\\ \boldsymbol{U}_y\\ \boldsymbol{U}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_y^{(i)}*\boldsymbol{U}_z-\boldsymbol{\Phi}_z^{(i)}*\boldsymbol{U}_y\\ -\boldsymbol{\Phi}_x^{(i)}*\boldsymbol{U}_z+\boldsymbol{\Phi}_z^{(i)}*\boldsymbol{U}_x\\ \boldsymbol{\Phi}_x^{(i)}*\boldsymbol{U}_y-\boldsymbol{\Phi}_y^{(i)}*\boldsymbol{U}_x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_x'\\ \boldsymbol{U}_y'\\ \boldsymbol{U}_z'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\left(\phi^{(i)}\right)^2=\left(\boldsymbol{\phi}^{(i)}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\phi}^{(i)}=\left[\boldsymbol{\Phi}_x^{(i)}*\boldsymbol{\Phi}_x^{(i)}+\boldsymbol{\Phi}_y^{(i)}*\boldsymbol{\Phi}_y^{(i)}+\boldsymbol{\Phi}_z^{(i)}*\boldsymbol{\Phi}_z^{(i)}\right]\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\triangleq\boldsymbol{\varphi}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\frac{(\phi^{(i)})^0}{12}+\frac{(\phi^{(i)})^2}{720}+\frac{(\phi^{(i)})^4}{30240}+\frac{(\phi^{(i)})^6}{1209600}+\cdots=\left[\frac{1}{12}+\frac{\boldsymbol{\varphi}}{720}+\frac{\boldsymbol{\varphi}*\boldsymbol{\varphi}}{30240}+\frac{\boldsymbol{\varphi}*\boldsymbol{\varphi}*\boldsymbol{\varphi}}{1209600}+\cdots\right]\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\triangleq\boldsymbol{\varphi}'\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix} \tag{10}$$

其中，运算符“*”表示两个多项式系数向量之间的卷积运算。

再将式(5)(7)(8)(10)代入式(4)，可得：

$$\boldsymbol{\phi}^{(i+1)}=\int_0^t\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_x\\ \boldsymbol{W}_y\\ \boldsymbol{W}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^{N-1}\\ t^{N-2}\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_x\\ \boldsymbol{U}_y\\ \boldsymbol{U}_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varphi}'*\boldsymbol{U}_x'\\ \boldsymbol{\varphi}'*\boldsymbol{U}_y'\\ \boldsymbol{\varphi}'*\boldsymbol{U}_z'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau\triangleq\int_0^t\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}_x''\\ \boldsymbol{U}_y''\\ \boldsymbol{U}_z''\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ t^2\\ t\\ 1\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

超星·期刊

根据幂函数的积分运算规则，由式(11)可得等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}^{(i+1)}$ 的多项式系数向量 $\boldsymbol{\Phi}_j^{(i+1)}$ 的求解算法：

$$\boldsymbol{\Phi}_j^{(i+1)} = \left[\boldsymbol{U}_j''\ \ 0\right] \odot \left[\cdots\ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{2}\ \ 1\ \ 0\right],\ (j=x,y,z) \tag{12}$$

其中，运算符“$\odot$”表示两个同阶次的多项式系数向量之间的同幂次系数分量相乘运算，显然有 $\phi_{0,j}^{(i)}=0$。

至此，实现了从等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ 到 $\boldsymbol{\phi}^{(i+1)}$ 的迭代递推求解，也就完成了从角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和初值 $\boldsymbol{\phi}^{(0)}=\boldsymbol{0}$ 到 $\boldsymbol{\phi}^{(i+1)}\ (i\to\infty)$的求解，理论上可获得等效旋转矢量的精确多项式解 $\boldsymbol{\phi}^{(\infty)}$=$\boldsymbol{\phi}$。

从上述求解过程不难看出，如果 $\boldsymbol{\phi}^{(1)}\times\boldsymbol{\omega}\neq\boldsymbol{0}$，即在非定轴转动情况下，即使角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 为有限阶次的多项式，等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}^{(\infty)}$ 也将是无限阶次的。

1.2 精度分析

在实际利用计算机进行求解时，需对式(4)中的余切函数展开取有限阶次。一般角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的零次项多项式系数不为 0，则当迭代次数 $i>0$ 时，多项式 $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ 的不为 0 的最低幂次为 1。如果存在不可交换误差，$(\boldsymbol{\phi}^{(i)}\times)\boldsymbol{\omega}$ 的多项式表示系数中不为 0 的最低幂次一般为 2，$(\boldsymbol{\phi}^{(i)}\times)^2\boldsymbol{\omega}$ 不为 0 的最低幂次为 3，$(\phi^{(i)})^k(\boldsymbol{\phi}^{(i)}\times)^2\boldsymbol{\omega}$ 不为 0 的最低幂次为 $k+3\ (k=0,2,4,6,\cdots)$。因此，若忽略了式(4)右端被积函数中与模值 $\phi^{(i)}$ 有关的不小于 k 的所有项，则将可能影响被积函数 $k+3$ 次幂的计算准确性，再经过积分之后等效旋转矢量多项式 $\boldsymbol{\phi}^{(j+1)}$ 的 $k+4$ 阶精度会受到影响。换句话说，若忽略 k 及其以上项后，等效旋转矢量的多项式解 $\boldsymbol{\phi}^{(\infty)}$=$\boldsymbol{\phi}$ 在理论上只具有 $k+3$ 阶精度。

特别地，当忽略 $k\geqslant 0$ 时，以如下近似公式(13)作迭代将具有 3 阶的等效旋转矢量计算精度。

$$\boldsymbol{\phi}^{(i+1)} \approx \int_0^t \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}^{(i)}\times\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

作为对比，传统的基于等效旋转矢量泰勒级数展开法的多子样算法是在如下近似公式(14)的基础上作进一步推导的。

$$\boldsymbol{\phi} \approx \int_0^t \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\tau \approx \int_0^t \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\tau \tag{14}$$

其中，$\boldsymbol{\alpha}=\int_0^\tau \boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\tau'$ 为角增量。有意思的是，式(14) 虽然没有采用迭代方式，但是它具有 4 阶精度[12]，这比迭代式(13)还高 1 阶。因此，只有当忽略 $k\geqslant 2$ 时迭代算法与传统算法相比才有明显的精度优势。

在保留余切函数展开无穷幂次的情况下，式(4)理论上是严格成立的，即对于 $|\boldsymbol{\omega}t|<\infty$ 均成立。但如果仅保留有限幂次，为了保证等式近似程度足够高，必须使余切函数展开的高幂次项 $(\phi^{(i)})^k(\boldsymbol{\phi}^{(i)}\times)^2\boldsymbol{\omega}$ 迅速衰减，以至于在数值计算上误差可以忽略不计。

在普通计算机中，双精度浮点数的有效位数约为 16 位，假设 $k=6$，根据式(4)右端的最低幂次与最高幂次构造如下不等式：

$$\left|\int_0^t \frac{(\phi^{(i)})^6}{1209600}(\boldsymbol{\phi}^{(i)}\times)^2\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\tau\right| \leqslant 10^{-16}\left|\int_0^t \boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\tau\right| \tag{15}$$

式(15)可近似为（实际上是条件变严格了）：

$$\frac{\left|\boldsymbol{\phi}^{(i)}\right|^9}{1209600} \leqslant 10^{-16}\left|\boldsymbol{\phi}^{(i)}\right| \tag{16}$$

由式(16)求解得：

$$\left|\boldsymbol{\phi}^{(i)}\right| \leqslant 0.057\,\mathrm{rad} \approx 3.3\,(^\circ) \tag{17}$$

这意味着，在更新周期[0, t]内，如果等效旋转矢量模值（可近似为角增量模值变化）小于 3.3°，则在计算时可忽略 $(\phi^{(i)})^6(\boldsymbol{\phi}^{(i)}\times)^2\boldsymbol{\omega}$ 及更高幂次项的影响。

1.3 计算量分析

根据 1.2 节分析，如忽略 $k=4$ 及其以上项，则等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}$ 具有 7 阶精度，可用 7 次多项式表示。对于式(7)中的每个卷积运算 $\boldsymbol{\Phi}_j^{(i)}*\boldsymbol{W}_l$，考虑到 $\boldsymbol{\Phi}_j^{(i)}$ 的零次项系数为 0，为了获得不大于 7 次的所有多项式系数，乘法计算量不超过 $\sum_{m=1}^{7} m=28$，式(7)中 6 个卷积的乘法计算量最多为 6×28；式(8)中，考虑到 $\boldsymbol{\Phi}_j^{(i)}$ 和 $\boldsymbol{U}_j$ 的零次项系数都为 0，则 6 个卷积计算量为 $6\times\sum_{m=1}^{6} m=6\times 21$；式(9)中 3 个卷积计算量为 3×21；式(10)中，由于 $\boldsymbol{\varphi}$ 的零次和一次项均为 0，卷积 $\boldsymbol{\varphi}*\boldsymbol{\varphi}$ 计算量为 $\sum_{m=1}^{4} m=10$，$\boldsymbol{\varphi}*\boldsymbol{\varphi}*\boldsymbol{\varphi}$ 等高阶卷积的计算量较小，可以忽略不记；式(11)中，由于 $\boldsymbol{U}_j'$ 的零次和一次项均为 0，因而 3 个卷积计算量不超过 3×21；式(12)对应有三个分量，乘法计算量为 3×8。综上所述，式(4)迭代一次，所需的乘法计算量不超过：

$$6\times 28+6\times 21+3\times 21+10+3\times 21+3\times 8=454\ (\text{次}) \tag{18}$$

无论角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 表示为几阶多项式，式(4)经过 6 次的迭代均可收敛，达到 7 阶的精度（具体结果见后文 2.2 节仿真）。因此，等效旋转矢量迭代算法完成一次更新的乘法计算量不超过：

$$(6-1)\times 454=2270\ \text{（次）} \tag{19}$$

其中，第 1 次迭代直接是角速度积分 $\boldsymbol{\phi}^{(1)}=\int_0^t \boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}\tau$，计算量很小可忽略。

作为对比，在文献[10]的式(18)中，若取子样数 $N=6$、四元数多项式保留最高阶次 $m=7$，则有四元

超星·期刊

数迭代的乘法次数 6 N·m^2=1764。本文迭代算法与四元数迭代算法相比，增加了(2270/1764)−1 ≈ 29%。

2　仿真验证

2.1　圆锥运动误差仿真

圆锥运动和多项式角运动常常用来评价姿态更新算法的精度优劣，下面也采用圆锥运动环境来对比本文算法与传统优化圆锥算法的姿态解算精度。

圆锥运动仿真参数设置为：圆锥频率 f =1Hz，半锥角 α =90°，采样频率 f_s =400 Hz（这是目前高精度捷联惯导常采用的采样频率），子样数 N =6。仿真对比了两种不同的算法，分别为传统圆锥误差优化补偿算法[4]（Classical）和本文新算法（New，迭代次数选 $i=6$ ）。图 1 给出了两种算法在一个圆锥运动周期 1 s 内的姿态更新误差，其中，$\delta\phi_x$ 为锥轴上的失准角误差，$\delta\phi_y$ 、$\delta\phi_z$ 为非锥轴上的失准角误差。

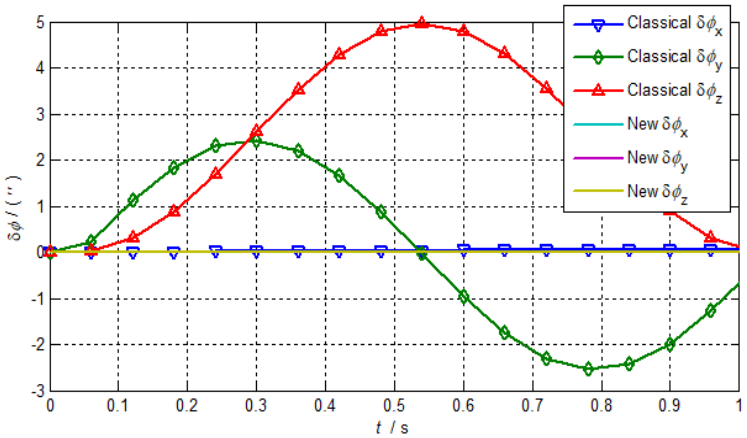


图 1　圆锥运动算法误差对比

Fig.1　Comparison on algorithm errors of coning motion

从图 1 中可以看出，传统算法在锥轴上的漂移误差逐渐变大，在 1 s 时为 0.1″，在非锥轴上的误差呈周期性变化，最大达到了 5″；而新算法的三轴误差始终都很小，经放大观察仅为 10^{-7}″量级。这说明，如果出现不规则非整周期的圆锥运动，传统算法可能会引起较大的姿态解算误差，而新算法能近乎完美的解算复现真实的姿态运动，新算法对于复杂的角运动具有非常高的求解精度。

进一步仿真表明，本文算法与文献[10]所提的四元数迭代算法具有同等数值精度，更多的仿真情况可参考文献[10]，这里不再赘述。

2.2　迭代收敛性仿真

定义第 i 次迭代后的等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ 的各阶多项式系数误差为

$$e_n^{(i)}=\sqrt{(\phi_{n,x}^{(i)}-\phi_{n,x}^{(\infty)})^2+(\phi_{n,y}^{(i)}-\phi_{n,y}^{(\infty)})^2+(\phi_{n,z}^{(i)}-\phi_{n,z}^{(\infty)})^2},\quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{20}$$

式中，$\phi_{n,j}^{(i)}\,(j=x,y,z)$ 为 $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ 的第 n 次幂系数；$\phi_{n,j}^{(\infty)}\,(j=x,y,z)$ 为 $\boldsymbol{\phi}^{(i)}$ 的很多次迭代后（比如取 20 次迭代）的第 n 次幂系数，可视为真值。

经多次仿真观察，各阶多项式系数误差的迭代收敛规律完全相同，其中某一次仿真的误差如表 1 所列。

表 1　各阶多项式系数误差收敛特性

Tab.1　Convergence of polynomial coefficient errors

迭代次数 i	多项式系数误差 $e_n^{(i)}$ 系数阶次 n								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0.0557	0.1809	0.1324	0.0164	0.0093	0.0099
2	0	0	0	0	0.0074	0.0192	0.0217	0.0379	0.0136
3	0	0	0	0	0	0.0007	0.0016	0.0021	0.0027
4	0	0	0	0	0	0	7.1e-5	0.0001	0.0002
5	0	0	0	0	0	0	0	5.4e-6	8.2e-6
6	0	0	0	0	0	0	0	0	3.6e-7
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0

超星·期刊

由表 1 可见：第 1 次迭代后，2 阶项系数误差为 0（收敛）；之后每增加 1 次迭代，收敛阶数加 1；经过 6 次迭代后，7 阶项系数完全收敛。这表明，等效旋转矢量迭代收敛的速度是很快的，从而决定了算法的计算量不是太大。

3 与罗德里格参数迭代法的对比讨论

同 Bortz 方程(1)的结构相似，罗德里格参数微分方程为[11]

$$\dot{\boldsymbol{l}}=\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{4}(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l})\boldsymbol{l} \tag{21}$$

式中，罗德里格参数定义为 $\boldsymbol{l}=2\boldsymbol{q}_v/q_0$，其中 q_0 和 $\boldsymbol{q}_v$ 分别为四元数 $\boldsymbol{Q}=q_0+\boldsymbol{q}_v$ 的标量和矢量部分。

前文 1.1 节分析的迭代方法也可应用于式(21)，迭代公式为

$$\boldsymbol{l}^{(k+1)}=\int_0^t\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{l}^{(k)}\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{4}(\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}^{(k)})\boldsymbol{l}^{(k)}\mathrm{d}\tau \tag{22}$$

采用式(22)迭代的优点是不含三角函数运算，计算量会比式(4)更少（约减少三分之一）。此外，在实际计算时式(4)需截取余切函数的有限项，使得存在如式(17)所示的角速度范围限制，而式(22)在理论上对任意角速度都是迭代收敛的。

仿真还表明，迭代式(22)也具有如表 1 所列的收敛特性。当然，与罗德里格参数表示相比，采用等效旋转矢量的优点是物理意义更直观，方程(21)右端的第三项意义不够直观，而方程(1)右端的第二、三项均表示不可交换误差，所以本文关于等效旋转矢量迭代的研究结果容易直接与很多已有的传统多子样算法成果进行对比。

4 结 论

传统圆锥误差补偿算法在纯圆锥运动环境下且半锥角比较小时是非常有效的，然而对于大锥角情况或者应用于大角度机动环境，都会产生较大的姿态漂移误差。

为了避免这一问题，本文根据 Bortz 方程构造了多项式积分迭代公式，给出了一种新的直接求解等效旋转矢量的数值算法，在算法推导过程中考虑了不可交换误差高阶项的影响，算法计算精度高，具有与四元数微分方程迭代解相同的数值精度[10]。通过与传统的基于等效旋转矢量的多子样算法对比仿真，验证了新算法在大幅值圆锥运动条件下具有明显的精度优势。新算法的计算量较小，具有较好的应用价值。

参考文献（References）：

[1] Bortz J E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971, 7(1): 61-66.

[2] Miller R. A new strapdown attitude algorithm[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1983, 6(4): 287-291.

[3] Ignagni M B. Efficient class of optimized coning compensation algorithms[J] Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1996, 19(2): 424-429.

[4] Park C G, Kim K J, Lee J G, et al. Formalized approach to obtaining optimal coefficients for coning algorithms[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1999, 22(1): 165-168.

[5] Savage P G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design part 1: attitude algorithms[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1998, 21(1): 19-28.

[6] 汤传业, 陈熙源, 李博天. 基于新的圆锥补偿结构的姿态算法[J]. 中国惯性技术学报, 2014, 22(5): 580-586.
Tang C Y, Chen X Y, Li B T. Attitude algorithm based on a novel coning correction structure[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2014, 22(5): 580-586.

[7] 严恭敏, 严卫生, 徐德民. 经典圆锥误差补偿算法中剩余误差估计的局限性研究[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(4): 379-385.
Yan G M, Yan W S, Xu D M. Limitations of error estimation for classic coning compensation algorithm[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(4): 379-385.

[8] Wang M S, Wu W Q, Wang J L, et al. High-order attitude compensation in coning and rotation coexisting environment[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2015, 51(2): 1178-1190.

[9] Wang M S, Wu W, He X F. Design and evaluation of high-order non-commutativity error compensation algorithm in dynamics[C]//IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium. 2018: 34-41.

[10] 严恭敏, 翁浚, 杨小康, 等. 基于毕卡迭代的捷联姿态更新精确数值解法[J]. 宇航学报, 2017, 38(12): 1307-1313.
Yan G M, Weng J, Yang X K, et al. An accurate numerical solution for strapdown attitude algorithm based on Picard iteration[J]. Journal of Astronautics, 2017, 38(12): 1307-1313.

[11] Wu Y X. RodFIter: Attitude reconstruction from inertial measurement by functional iteration[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, 54(5): 2131-2142.

[12] 宋敏. 高动态下捷联惯性导航算法误差分析与优化方法研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2012.
Song M. Research on error analysis and optimization methods for strapdown inertial navigation algorithm under highly dynamic environment[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2012.

文章编号：1005-6734(2019)05-0568-05 doi: 10.13695/j.cnki.12-1222/o3.2019.05.002

多矢量定姿的 SVD 和 QUEST 算法等价性分析

严恭敏[1]，陈若彤[1]，郭 鹃[2]

（1. 西北工业大学 自动化学院，西安 710072；2. 中船航海科技有限责任公司，北京 100070）

摘要：针对姿态确定的 Wahba 问题，证明了姿态矩阵的奇异值分解（SVD）算法与三种四元数特征向量求解（QUEST）算法之间的等价性，给出了一种快速奇异值分解算法，其计算量接近于传统的 ESOQ2 快速算法，对几种算法进行了仿真验证。理论分析和仿真实验表明，就当前计算机的运算能力而言，各种算法之间的数值计算精度和计算量并无显著差别，均可满足实际使用需求。对于多矢量定姿或捷联惯导的惯性系初始对准问题，建议采用姿态矩阵优化和奇异值求解的方法进行描述，更加简洁和直观。

关 键 词：捷联惯导系统；姿态确定；奇异值分解；QUEST 估计方法

中图分类号：V249.3 **文献标志码**：A

Equivalence analysis between SVD and QUEST for multi-vector attitude determination

YAN Gongmin[1], CHEN Ruotong[1], GUO Kun[2]

(1. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. CSSC Marine Technology Co., Ltd., China State Shipbuilding Corporation, Beijing 100070, China)

Abstract: Aiming at Wahba problem of attitude determination, the equivalence between the singular value decomposition (SVD) algorithm of attitude matrix and three quaternion eigenvector algorithms is proved, and a fast SVD singular value decomposition algorithm is presented, whose computation amount is close to that of traditional ESOQ2 fast algorithm. Theoretical analysis and simulation experiments show that there is no significant difference in the numerical calculation accuracy and calculation amount among these algorithms in terms of the computing power of the current computer, and all of them can meet the practical application requirements. For describing the multi-vector attitude determination problem or the SINS initial alignment problem in inertial frame, the approach of attitude matrix optimization and singular value decomposition solution is recommended, which is more concise and intuitive compared with the quaternion eigenvector approach.

Key words: strapdown inertial navigation system; attitude determination; singular value decomposition; QUEST estimation method

捷联惯导系统初始对准的重点在于初始姿态阵的求解，它通常可分为滤波估计和确定性算法两种方法[1]。滤波方法通过建立系统误差模型，模型中往往包含了惯性传感器误差，在系统建模准确的情况下一般具有较好的对准精度。然而，滤波方法通常只有在小失准角误差线性建模条件下才会比较有效，虽然大失准模型及其非线性滤波方法研究较多，但实际工程使用的却比较少。采用大失准角模型通常也只是为了获得粗略的失准角，再转而使用小失准角线性模型，才能得到高精度的初始对准结果[2]。

确定性姿态算法与模型是否线性无关，在航天器姿态确定中应用较多，它同样也适用于捷联惯导的粗对准过程，有时在惯导机动干扰不大的场合也能获得较高的初始对准精度，甚至达到精对准的效果[3-4]。姿态确定算法早期研究主要源于解决卫星姿态的确定问题。1964 年 Harold Black 提出了利用两组观测矢量求取姿态转换矩阵的代数方法 TRIAD（Tri-Axial Attitude Determination，常称为双矢量定姿法）；1965 年 Grace Wahba 提出了应用观测矢量进行星体姿态确定的最小二乘优化问题（常称为 Wahba 问题）[5]；1968 年

收稿日期：2019-08-15；**修回日期**：2019-10-15

基金项目：航天科技集团联合基金（6141B06220404）

作者简介：严恭敏（1977—），男，博士，副教授，主要从事惯性导航与信息融合理论研究。E-mail：yangongmin@163.com

Davenport 提出了 q-method 方法，采用四元数姿态描述方式解决 Wahba 问题，或称 QUEST 估计方法（QUaternion ESTimator）[6]。由于早期计算机的运算能力有限，研究者们提出了一系列改进的~~四元数~~优化快速算法，比如 FOAM（Fast Optimal Attitude Matrix）、ESOQ（EStimator of the Optimal Quaternion）、ESOQ2（Second ESOQ）等算法，主要用于降低计算量和提高数值鲁棒性[7-10]。研究者普遍认为，与姿态的矩阵优化相比，四元数优化具有更少的约束，因而研究工作主要围绕四元数展开。实际上，Wahba 问题的四元数优化与矩阵优化是完全等价的，前者相对于后者并不具有丝毫的姿态求解精度优势，反而是四元数及其快速算法更加烦琐，快速算法的计算量降低程度对现代计算机而言几乎可忽略不计。

本文简要介绍了姿态矩阵的奇异值分解优化与四元数特征向量求解优化之间的等价性，在四元数优化过程中提出了一种新的构造四阶矩阵的方法；为了增强姿态阵优化算法的实用性，给出了一种快速奇异值分解优化算法，其浮点乘法计算量与四元数优化快速算法 ESOQ2 相近；最后，对几种算法之间的等价性进行了仿真验证。

1　定姿算法理论分析

1.1　问题描述

假设三维空间中有 $m\,(m>2)$ 个不共面的矢量 $\boldsymbol{V}_i$（$i=1,2,\cdots,m$），在直角坐标系 b 系和 r 系中同时对这些矢量进行测量，结果分别记为 $\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r$ 和 $\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b$，由于存在测量误差，它们只能近似满足如下变换关系：

$$\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r \approx \boldsymbol{C}_b^r \tilde{\boldsymbol{V}}_i^b \tag{1}$$

多矢量定姿问题就是求解满足式(1)的最优姿态阵 $\boldsymbol{C}_b^r$（右手单位正交阵）。

为了定量描述“最优”性能，这里构造指标函数为

$$J^*(\boldsymbol{C}_b^r)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m w_i\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r-\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b\right|^2=\min \tag{2}$$

其中：w_i 为已知的非负加权因子，一般有 $\sum_{i=1}^m w_i=1$，对于等加权平均可取 $w_i=1/m$ 或直接取 $w_i=1$，并不影响极值条件；$\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r-\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b$ 反映的是在两个坐标系中测量同一矢量的不一致性误差。式(2)所谓“最优”的含义就是使测量误差的加权平方和达到最小。

1.2　三阶矩阵的 SVD 方法

对式(2)中的误差平方进行如下等价变形：

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r-\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b\right|^2=(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r-\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b)^{\mathrm{T}}(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r-\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b)=\\&\left[(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r)^{\mathrm{T}}-(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_b^r)^{\mathrm{T}}\right](\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r-\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b)=\\&\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r\right|^2-(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b-(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_b^r)^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r+\\&(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_b^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b=\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r\right|^2+\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b\right|^2-2(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b\end{aligned} \tag{3}$$

将式(3)代入式(2)，得：

$$\begin{aligned}&J^*(\boldsymbol{C}_b^r)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m w_i\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r-\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b\right|^2=\\&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m w_i\left(\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r\right|^2+\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b\right|^2\right)-\sum_{i=1}^m w_i(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b\end{aligned} \tag{4}$$

在所有测量值采集给定之后，$\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r$ 和 $\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b$ 均是已知的，即式(4)右边第一项中 $\sum_{i=1}^m w_i\left(\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r\right|^2+\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b\right|^2\right)$ 为已知量，因而欲使 $J^*(\boldsymbol{C}_b^r)$ 达到最小，等价于使如式(5)所示的重新构造的指标函数达到最大：

$$J(\boldsymbol{C}_b^r)=\sum_{i=1}^m w_i(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b=\max \tag{5}$$

进一步对式(5)作变换，可得：

$$\begin{aligned}&J(\boldsymbol{C}_b^r)=\sum_{i=1}^m w_i(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b=\\&\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix}w_1(\tilde{\boldsymbol{V}}_1^r)^{\mathrm{T}}\\w_2(\tilde{\boldsymbol{V}}_2^r)^{\mathrm{T}}\\\vdots\\w_m(\tilde{\boldsymbol{V}}_m^r)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{C}_b^r\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{V}}_1^b&\tilde{\boldsymbol{V}}_2^b&\cdots&\tilde{\boldsymbol{V}}_m^b\end{bmatrix}\right)=\\&\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{C}_b^r\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{V}}_1^b&\tilde{\boldsymbol{V}}_2^b&\cdots&\tilde{\boldsymbol{V}}_m^b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1(\tilde{\boldsymbol{V}}_1^r)^{\mathrm{T}}\\w_2(\tilde{\boldsymbol{V}}_2^r)^{\mathrm{T}}\\\vdots\\w_m(\tilde{\boldsymbol{V}}_m^r)^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\right)=\\&\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{C}_b^r\sum_{i=1}^m w_i\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r)^{\mathrm{T}}\right)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}_b^r\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\max\end{aligned} \tag{6}$$

其中，记

$$\boldsymbol{A}=\left[\sum_{i=1}^m w_i\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}=\sum_{i=1}^m w_i\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b)^{\mathrm{T}} \tag{7}$$

假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆且其奇异值分解为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{D}=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$，则式(6)可变为

$$\begin{aligned}&J(\boldsymbol{C}_b^r)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}_b^r\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{C}_b^r(\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\right)=\\&\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}_b^r\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_b^r\boldsymbol{V}\boldsymbol{D})=\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{D})=\max\end{aligned} \tag{8}$$

其中，记 $\boldsymbol{C}^*=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_b^r\boldsymbol{V}$，显然 $\boldsymbol{C}^*$ 是单位正交阵。再记 $\boldsymbol{C}^*=(C_{ij}^*)\ (i,j=1,2,3)$，将式(8)按元素展开，注意到 $\left|C_{ij}^*\right|\leqslant 1$，可得：

$$\begin{aligned}&J(\boldsymbol{C}_b^r)=\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{D})=\\&\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix}C_{11}^*&C_{12}^*&C_{13}^*\\C_{21}^*&C_{22}^*&C_{23}^*\\C_{31}^*&C_{32}^*&C_{33}^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1&0&0\\0&\sigma_2&0\\0&0&\sigma_3\end{bmatrix}\right)=\\&C_{11}^*\sigma_1+C_{22}^*\sigma_2+C_{33}^*\sigma_3\leqslant\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\end{aligned} \tag{9}$$

由于奇异值 $\sigma_1\geqslant\sigma_2\geqslant\sigma_3>0$（如果有奇异值近似等于零则需特别讨论，文中暂不涉及），所以在式(9)中最

后等号当且仅当 $C_{11}^{*}=C_{22}^{*}=C_{33}^{*}=1$ 时成立，这正好对应于 $\boldsymbol{C}^{*}=\boldsymbol{I}$。根据 $\boldsymbol{C}^{*}=\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_b^r\boldsymbol{V}$，可求得最优姿态矩阵：

$$\boldsymbol{C}_b^r=\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

1.3 四阶矩阵的特征向量方法

① QUEST 方法 1

记与姿态阵 $\boldsymbol{C}_b^r$ 对应的变换四元数为 $\boldsymbol{Q}_b^r=[q_0 \quad \boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，它们之间具有如下关系：

$$\boldsymbol{C}_b^r=(q_0^2-\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_v)\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{q}_v\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}+2q_0(\boldsymbol{q}_v\times) \tag{11}$$

将式(11)代入式(5)，转换为以 $\boldsymbol{Q}_b^r$ 为优化对象的指标函数，为

$$\begin{aligned}
&J(\boldsymbol{Q}_b^r)=\mathrm{tr}\left(\left[(q_0^2-\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_v)\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{q}_v\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}+2q_0(\boldsymbol{q}_v\times)\right]\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=\\
&\mathrm{tr}\left((q_0^2-\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_v)\boldsymbol{A}\right)+\mathrm{tr}\left(2\boldsymbol{q}_v\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)+\mathrm{tr}\left(2q_0(\boldsymbol{q}_v\times)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=\\
&(q_0^2-\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_v)\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}\right)+2\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_v\right)+\\
&2q_0\,\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{q}_v\times)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=\max
\end{aligned} \tag{12}$$

若记 $\boldsymbol{z}=[A_{32}-A_{23} \quad A_{13}-A_{31} \quad A_{21}-A_{12}]^{\mathrm{T}}$，其中 A_{ij} $(i,j=1,2,3)$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行 j 列元素，直接按元素展开法不难验证有 $\mathrm{tr}\left((\boldsymbol{q}_v\times)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)=\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}$ 成立。所以，式(12)可化为

$$\begin{aligned}
&J(\boldsymbol{Q}_b^r)=(q_0^2-\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_v)\,\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{A}\right)+2\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_v+2q_0\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}=\\
&(q_0^2-\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_v)\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{q}_v+2q_0\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}=\\
&q_0^2\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})+2q_0\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}+\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}\right]\boldsymbol{q}_v=\\
&\begin{bmatrix}q_0 & \boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_0\\ \boldsymbol{q}_v\end{bmatrix}=\\
&(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_b^r=\max
\end{aligned} \tag{13}$$

其中，记

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) & \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\,\boldsymbol{I}\end{bmatrix} \tag{14}$$

显然，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 为四阶实对称阵，其特征值均为实数且特征向量均为实向量。

为了求解式(13)的极值，考虑到单位四元数约束条件 $(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_b^r=1$，引入拉格朗日乘子 λ 并构造拉格朗日函数：

$$J(\boldsymbol{Q}_b^r)=(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_b^r+\lambda\left[1-(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_b^r\right] \tag{15}$$

对式(15)求导并令其等于零，可得：

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{Q}_b^r)}{\partial \boldsymbol{Q}_b^r}=2\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_b^r-2\lambda\boldsymbol{Q}_b^r=\boldsymbol{0} \quad \text{即} \quad \boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_b^r=\lambda\boldsymbol{Q}_b^r \tag{16}$$

这说明 λ 是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值，$\boldsymbol{Q}_b^r$ 是相应的特征向量。将式(16)代入式(13)，可得：

$$J(\boldsymbol{Q}_b^r)=(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_b^r=(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}\lambda\boldsymbol{Q}_b^r=\lambda(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_b^r=\lambda \tag{17}$$

由此可知，欲使指标函数 $J(\boldsymbol{Q}_b^r)$ 达到最大，须取 λ 为 $\boldsymbol{M}$ 的最大特征值（记为 $\lambda_{\max}$），这时四元数 $\boldsymbol{Q}_b^r$ 即为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的最大特征值 $\lambda_{\max}$ 所对应的单位特征向量。

从前述分析可知，必然有极大值等式 $\lambda_{\max}=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$ 成立，这说明 SVD 姿态阵方法与特征向量四元数方法得到的结果是等价的。

② QUEST 方法 2

若将三维向量视为零标量四元数，则式(5)可化为

$$\begin{aligned}
&J(\boldsymbol{Q}_b^r)=\sum\nolimits_{i=1}^{m}w_i\left\{(-\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r)\circ\left[\boldsymbol{Q}_b^r\circ\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b\circ(\boldsymbol{Q}_b^r)^{*}\right]\right\}_{\mathrm{scale}}=\\
&\sum\nolimits_{i=1}^{m}w_i\left[(\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R}\boldsymbol{M}_{-\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L}\boldsymbol{Q}_b^r)\circ(\boldsymbol{Q}_b^r)^{*}\right]_{\mathrm{scale}}=\\
&\sum\nolimits_{i=1}^{m}w_i(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R}\boldsymbol{M}_{-\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L}\boldsymbol{Q}_b^r)=\\
&(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{m}w_i\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R}\boldsymbol{M}_{-\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L}\right)\boldsymbol{Q}_b^r=(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{Q}_b^r=\max
\end{aligned} \tag{18}$$

其中，运算符“$\circ$”表示四元数的乘法，右上标“*”表示四元数的共轭运算，右下标“scale”表示取四元数的标量部分。记 $\boldsymbol{N}=\sum_{i=1}^{m}w_i\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R}\boldsymbol{M}_{-\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L}$，左四元数构造的矩阵 $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Q}}^{L}=\begin{bmatrix}q_0 & -\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{q}_v & q_0\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{q}_v\times)\end{bmatrix}$，右四元数构造的矩阵 $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Q}}^{R}=\begin{bmatrix}q_0 & -\boldsymbol{q}_v^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{q}_v & q_0\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{q}_v\times)\end{bmatrix}$，不难验证有 $\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R}\boldsymbol{M}_{-\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L}=\boldsymbol{M}_{-\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R}\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L}=\boldsymbol{M}_{-\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L}\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R}=\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L}\boldsymbol{M}_{-\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R}$ 成立，因而计算 $\boldsymbol{N}$ 可采用这四种方法中的任何一种。

比较式(13)和式(18)，发现它们在形式上完全一致，若记 $\boldsymbol{z}_i=[A_{i,32}-A_{i,23} \quad A_{i,13}-A_{i,31} \quad A_{i,21}-A_{i,12}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}_i=\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b)^{\mathrm{T}}$，直接采用元素展开法可以验证式(19)成立：

$$\begin{bmatrix}\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_i) & \boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{z}_i & \boldsymbol{A}_i+\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}}-\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}_i^{\mathrm{T}})\boldsymbol{I}\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R}\boldsymbol{M}_{-\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L} \tag{19}$$

从而容易证明有 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{N}$，当然获得 $\boldsymbol{M}$ 的运算量会略小些，但是计算 $\boldsymbol{N}$ 的过程更直观些。因此，四阶实对称矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的最大特征值 $\lambda_{\max}$ 所对应的单位特征向量即为所求的四元数 $\boldsymbol{Q}_b^r$。

③ QUEST 方法 3

直接将式(2)中的误差平方改写成四元数的形式，为

$$\begin{aligned}
&\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r-\boldsymbol{Q}_b^r\circ\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b\circ(\boldsymbol{Q}_b^r)^{*}\right|^2=\\
&\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r\circ\boldsymbol{Q}_b^r\circ(\boldsymbol{Q}_b^r)^{*}-\boldsymbol{Q}_b^r\circ\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b\circ(\boldsymbol{Q}_b^r)^{*}\right|^2=\\
&\left|(\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r\circ\boldsymbol{Q}_b^r-\boldsymbol{Q}_b^r\circ\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b)\circ(\boldsymbol{Q}_b^r)^{*}\right|^2=\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r\circ\boldsymbol{Q}_b^r-\boldsymbol{Q}_b^r\circ\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b\right|^2=\\
&\left|\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L}\boldsymbol{Q}_b^r-\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R}\boldsymbol{Q}_b^r\right|^2=\\
&\left[(\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L}-\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R})\boldsymbol{Q}_b^r\right]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L}-\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R})\boldsymbol{Q}_b^r=\\
&(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L}-\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^{L}-\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^{R})\boldsymbol{Q}_b^r
\end{aligned} \tag{20}$$

将式(20)代入式(2)，可得指标函数：

$$
\begin{aligned}
&J^*(\boldsymbol{Q}_b^r)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m w_i\left|\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r-\boldsymbol{Q}_b^r\circ\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b\circ(\boldsymbol{Q}_b^r)^*\right|^2=\\
&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m w_i(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^L-\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^R)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^L-\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^R)\boldsymbol{Q}_b^r=\\
&\frac{1}{2}(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}\left[\sum_{i=1}^m w_i(\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^L-\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^R)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^L-\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^R)\right]\boldsymbol{Q}_b^r=\\
&\frac{1}{2}(\boldsymbol{Q}_b^r)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}_b^r=\min
\end{aligned}
\tag{21}
$$

其中，记 $\boldsymbol{K}=\sum_{i=1}^m w_i(\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^L-\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^R)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r}^L-\boldsymbol{M}_{\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b}^R)$，显然 $\boldsymbol{K}$ 也是四阶实对称阵。类似于式(13)~(17)求极值方法，由式(21)可求得四元数 $\boldsymbol{Q}_b^r$ 为矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的最小特征值(记为 $\lambda_{\min}^*$)所对应的单位特征向量。不论是姿态阵 $\boldsymbol{C}_b^r$ 还是四元数 $\boldsymbol{Q}_b^r$，都将使指标函数 J^* 取得同样的极小值，因此两者之间必定是等价的。

2　快速奇异值分解算法（FSVD）

对于式(7)，当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 必定是对称正定阵，求解矩阵 $\boldsymbol{B}=(B_{ij})$ 的特征多项式为

$$
f(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})=\lambda^3+a\lambda^2+b\lambda+c \tag{22}
$$

其中，

$$
\begin{cases}
a=-(B_{11}+B_{22}+B_{33})\\
b=B_{11}B_{22}+B_{11}B_{33}+B_{22}B_{33}-B_{23}^2-B_{12}^2-B_{13}^2\\
c=-(B_{11}B_{22}B_{33}-B_{11}B_{23}^2-B_{12}^2B_{33}+2B_{12}B_{13}B_{23}-B_{13}^2B_{22})
\end{cases}
\tag{23}
$$

由于实对称阵的特征值均为实数，根据三次方程的求根公式可直接求得 $f(\lambda)=0$ 的三个根，分别为

$$
\begin{cases}
\lambda_1=\dfrac{2\sqrt{-3p}-a}{3}\cos\dfrac{\theta}{3}\\
\lambda_{2,3}=\dfrac{2\sqrt{-3p}-a}{3}\cos\dfrac{\theta\pm2\pi}{3}
\end{cases}
\tag{24}
$$

其中，

$$
p=\frac{3b-a^2}{3},
$$

$$
q=\frac{2a^3-9ab+27c}{27},\quad \theta=\arccos\frac{9q}{2p\sqrt{-3p}} \tag{25}
$$

实对称矩阵存在完备的正交特征向量系，即存在两两正交的特征向量，利用这一性质有助于简化 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量求解过程。假设特征值经过排序后有 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3>0$，以下按照特征值重复情况求解特征向量。

① 当有三重特征值时，即 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，则可直接构造三个特征向量：

$$
\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{26}
$$

② 当有一个二重特征值时，即 $\lambda_1=\lambda_2>\lambda_3$ 或 $\lambda_1>\lambda_2=\lambda_3$，与 λ_2 对应的特征向量 $\boldsymbol{v}_2$ 满足如下方程：

$$
(\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}_2=\boldsymbol{0} \tag{27}
$$

记 $\boldsymbol{C}=\lambda_2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，则有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=1$，这说明 $\boldsymbol{C}$ 的三个行向量之间是线性相关的。在矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中寻找绝对值最大的元素（理论上可以是任意不为 0 的元素），假设为 C_{ij}，则有：

$$
\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}C_{i1}&C_{i2}&C_{i3}\end{bmatrix}\boldsymbol{v}_2=0 \tag{28}
$$

其中，$\boldsymbol{C}_i$ 表示矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行向量，而 C_{ij}（$i,j=1,2,3$）为矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行 j 列元素。

如果 $j=1$ 或 $j=2$，可直接构造如下特征向量：

$$
\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}C_{i2}&-C_{i1}&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{29}
$$

而如果 $j=3$，则直接构造如下特征向量：

$$
\boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}0&-C_{i3}&C_{i2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{30}
$$

当 $\lambda_1=\lambda_2>\lambda_3$ 时，使用如下方式构造特征向量 $\boldsymbol{v}_1$ 和 $\boldsymbol{v}_3$：

$$
\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{C}_i\times\boldsymbol{v}_2,\quad \boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2 \tag{31}
$$

而当 $\lambda_1>\lambda_2=\lambda_3$ 时，使用如下方式构造特征向量 $\boldsymbol{v}_3$ 和 $\boldsymbol{v}_1$：

$$
\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{C}_i\times\boldsymbol{v}_2,\quad \boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{v}_3 \tag{32}
$$

③ 当有三个互异特征值时，与 λ_1 对应特征向量 $\boldsymbol{v}_1$ 满足如下方程：

$$
(\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{0} \tag{33}
$$

同样，若记 $\boldsymbol{C}=\lambda_1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}$，则有 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{C})=2$，这说明 $\boldsymbol{C}$ 的三个行向量应在同一平面上（规定零向量可在任意平面上），且至少有两个是不相互平行的，计算如下三组行向量的叉乘：

$$
\boldsymbol{v}_{t1}=(\boldsymbol{C}_1\times\boldsymbol{C}_2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{v}_{t2}=(\boldsymbol{C}_2\times\boldsymbol{C}_3)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{v}_{t3}=(\boldsymbol{C}_3\times\boldsymbol{C}_1)^{\mathrm{T}} \tag{34}
$$

理论上 $\boldsymbol{v}_{t1}$、$\boldsymbol{v}_{t2}$、$\boldsymbol{v}_{t3}$ 三者相互平行，只要不是零向量均可作为特征向量，但在数值上可选取模值最大者，作为 λ_1 对应的特征向量 $\boldsymbol{v}_1$。

对于特征向量 $\boldsymbol{v}_2$ 求法类似于 $\boldsymbol{v}_1$，而针对特征向量 $\boldsymbol{v}_3$，可选择 $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2$。

最后，将特征向量 $\boldsymbol{v}_1$、$\boldsymbol{v}_2$、$\boldsymbol{v}_3$ 做规范化处理，令

$$
\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\dfrac{\boldsymbol{v}_1}{|\boldsymbol{v}_1|}&\dfrac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|}&\dfrac{\boldsymbol{v}_3}{|\boldsymbol{v}_3|}\end{bmatrix} \tag{35}
$$

则有矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值和特征向量分解：

$$
\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda} \tag{36}
$$

其中，$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1\quad\lambda_2\quad\lambda_3)$，且 $\sigma_i=\sqrt{\lambda_i}$（$i=1,2,3$），显然 $\boldsymbol{V}$ 为单位正交阵。

由奇异值分解式 $\boldsymbol{U}\boldsymbol{\Lambda}^{1/2}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 两边同时右乘 $\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$，直接得最优单位正交阵：

$$\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{V}\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}} \tag{37}$$

FSVD 算法的浮点乘法计算量分析：三次方程求根式(23)~(25)中约 30 次；计算特征向量过程中，以情况③最为复杂，约需 50 次；计算最优单位正交阵式(37)约需 60 次。因此，总计乘法约 140 次。当然，在式(24)(25)(35)(37)中还需要 2 次三角函数、1 次反三角函数和 7 次开方运算。

3 仿真验证

本节从仿真的角度对前述理论分析进行验证，设计如下仿真步骤：

① 随机生成一单位正交阵 $\boldsymbol{C}_b^r$ 且满足行列式 $\left|\boldsymbol{C}_b^r\right|=1$；

② 生成 m=100 个随机测量向量 $\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b=[v_{ix}^b \quad v_{iy}^b \quad v_{iz}^b]^{\mathrm{T}}$、误差向量 $\boldsymbol{\varepsilon}_i=[\varepsilon_{ix} \quad \varepsilon_{iy} \quad \varepsilon_{iz}]^{\mathrm{T}}$ 和加权因子 $w_i=0.1+\left|\alpha_i\right|$，其中，$v_{ij}^b\sim N(0,1^2)$，$\varepsilon_{ij}\sim N(0,0.01^2)$，$\alpha_i\sim N(0,1^2)$，$(i=1,2,\cdots,m;\ j=x,y,z)$；

③ 计算 $\tilde{\boldsymbol{V}}_i^r=\boldsymbol{C}_b^r\tilde{\boldsymbol{V}}_i^b+\boldsymbol{\varepsilon}_i$；

④ 分别采用 SVD、FSVD、QUEST1、QUEST2 和 QUEST3 五种算法求解最优姿态矩阵或四元数，除 FSVD 采用第 2 节所提方法外，其它算法直接调用了 Matlab 的 svd()和 eig()函数；

⑤ 以 SVD 算法作为参考基准，计算其它四种算法相对于 SVD 算法的失准角误差的模值 $|\boldsymbol{\phi}|$；

⑥ 重复步骤①~⑤共计 $n=50$ 次，结果如图 1 所示。

从图 1 可以看出，SVD 和三种 QUEST 算法之间的误差均很小，仅为 10^{-15}rad 量级，该误差主要由计算机的数值计算精度引起，这在实际应用中完全可忽略不计。由于计算矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 时进行了平方运算，使得 FSVD 的误差约大一个数量级，在矩阵条件数很大的情况下计算机数值求解误差可能会比较大。至此，通过仿真验证，可以认为 SVD、FSVD、QUEST1、QUEST2 和 QUEST3 五种多矢量定姿算法是相互等价的。

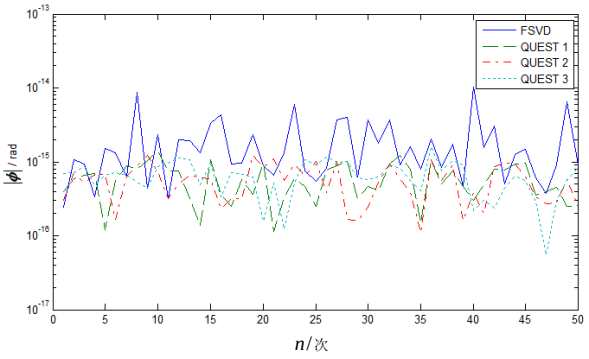


图 1 各种算法之间的误差

Fig.1 Error comparisons for the five algorithms

4 结 论

针对姿态确定的 Wahba 问题，证明了姿态矩阵的奇异值分解算法与三种四元数特征向量求解算法之间的等价性，给出了一种快速奇异值分解算法，对几种算法进行了仿真验证。理论分析和仿真实验表明，对于当前计算机的运算能力而言，各种算法之间的数值计算精度和计算量并无显著差别，均可满足实际应用要求。建议今后大家在撰写论文时，特别是在基于惯性系的初始对准相关论文中，直接采用姿态阵进行表示并用奇异值分解方法进行求解即可，这样更加简洁和直观，而没必要采用更复杂和不易理解的四元数描述，看似提升了论文的理论水平，其实两者的本质和结果是完全等效的[11-12]。

参考文献（References）：

[1] 矫媛媛. 基于星敏感器/陀螺组合测量的卫星姿态确定方法研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2017.

[2] 严恭敏, 严卫生, 徐德民. 简化 UKF 滤波在 SINS 大失准角初始对准中的应用[J]. 中国惯性技术学报, 2008, 16(3): 253-264.
Yan G, Yan W, Xu D. Application of simplified UKF in SINS initial alignment for large misalignment angles[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(3): 253-264.

[3] 郭玉胜, 付梦印, 邓志红, 等. 晃动基座行进间对准问题的 QUEST 算法[J]. 中国惯性技术学报, 2017, 25(2): 182-185.
Guo Y, Fu M, Deng Z, et al. Application of quaternion estimator algorithm dedicated on alignment of swaying and moving carrier[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2017, 25(2): 182-185.

[4] Wu M, Wu Y, Hu X, et al. Optimization-based alignment for inertial navigation systems: theory and algorithm[J]. Aerospace Science and Technology, 2011, 15(1): 1-17.

[5] Wahba G. A least squares estimate of satellite attitude[J]. SIAM Review, 1965, 7(3): 409.

[6] Shuster M D, Oh S D. Three-axis attitude determination from vector observations[J]. Journal of Guidance and Control, 1981, 4(1): 70-77.

[7] Marldey F L. Attitude determination using vector observations: a fast optimal matrix algorithm[J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1993, 41(2): 261-280.

[8] Mortari D. ESOQ: a closed-form solution to the Wahba problem[J]. Journal of the Astronautical Sciences, 1997, 45(2): 195-204.

[9] Mortari D. Second estimator of the optimal quaternion[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2000, 23(5): 885-888.

[10] Markley F L, Mortari D. New developments in quaternion estimation from vector observations[J]. Advances in the Astronautical Sciences, 2000, 106: 373-393.

[11] 陈河, 张志利, 周召发, 等. 两种 SINS 惯性系四元数粗对准算法等价性分析[J]. 系统工程与电子技术, 2018, 40(5): 1098-1103.
Chen H, Zhang Z, Zhou Z, et al. Equivalence analysis between two quaternion based coarse alignment algorithms for SINS with inertial frame[J]. Systems Engineering and Electronics, 2018, 40(5):1098-1103.

[12] 郑振宇, 周爱军, 唐君, 等. 基于地轴矢量解算的 SINS 无纬度支持自对准方法[J]. 宇航学报, 2019, 40(1): 77-84.
Zheng Z, Zhou A, Tang J, et al. An initial alignment method of SINS without latitude based on calculation of earth axis vector[J]. Journal of Astronautics, 2019, 40(1): 77-84.

引文格式：严恭敏，柯欢欢，高小鹏. 对中杆微型惯性测量单元的高精度方位初始对准方法[J]. 导航定位学报, 2020, 8(1): 15-19.（YAN Gongmin, KE Huanhuan, GAO Xiaopeng.An accurate azimuth alignment method for MIMU in centering rod surveying[J]. Journal of Navigation and Positioning, 2020, 8(1): 15-19.）DOI:10.16547/j.cnki.10-1096.20200103.

对中杆微型惯性测量单元的高精度方位初始对准方法

严恭敏[1]，柯欢欢[2]，高小鹏[2]

（1. 西北工业大学 自动化学院，西安 710072；2. 西安精准测控有限责任公司，西安 710075）

摘要：针对在微型惯性测量单元（MIMU）辅助实时动态差分（RTK）对中杆倾斜测量中，倾斜误差补偿效果严重依赖于 MIMU 惯导的方位初始化精度的问题，提出求解初始方位角的 3 点法，即在保持对中杆下尖不动的情况下，将对中杆在 3 个方向上倾斜一定的角度，建立反映方位失准角的量测方程，通过迭代方法进行求解；然后对 3 点法进行简化，得到更为简洁的 2 点法。实验结果表明，经过该方法的 MIMU 惯导方位初始化后，在对中杆倾斜 40°的范围内 RTK 测量精度优于 1.25 cm。

关键词：对中杆；实时动态差分；微型惯性测量单元；方位对准；倾斜误差补偿

中图分类号：P228 **文献标志码**：A **文章编号**：2095-4999(2020)01-0015-05

An accurate azimuth alignment method for MIMU in centering rod surveying

YAN Gongmin[1], *KE Huanhuan*[2], *GAO Xiaopeng*[2]

（1. Shool of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. Xi'an Precise Measurement & Control Co., Ltd.，Xi'an 710075, China）

Abstract: Aiming at the problem that it is susceptible to the azimuth accuracy of miniature inertial measurement unit (MIMU) for the effect of tilt error compensation in the centering rod surveying with the real time kinematic (RTK) assisted by MIMU, the paper proposed an azimuth resolution method: three-point method, that is, under the condition that the lower point of the rod remains unmoved, the centering rod was tilted at certain angles in 3 directions, and a set of measurement equations about the MIMU azimuth were established and resolved by the iteration algorithm; then a concise two-point azimuth identification method was obtained through the simplification of the three-point method. Experimental result showed that a RTK surveying accuracy of less than 1.25 cm could be got within the centering rod tilt angle of 40° after the orientation initialization of the proposed method.

Keywords: centering rod; real time kinematic (RTK); miniature inertial measurement unit (MIMU); azimuth alignment; tilt error compensation

0 引言

实时动态差（real time kinematic, RTK）测量是 1 种常用的全球卫星导航系统（global navigation satellite system, GNSS）测量方法，采用了载波相位动态实时差分方法，可实时得到厘米级的定位精度，它在施工放样、地形图测绘及摄影测量布设像控点等工程测量技术领域获得了广泛的应用，极大地提高了测量作业效率[1-3]。GNSS 接收机测量的是放置在对中杆顶端的天线相位中心的位置，而实际测绘需要的一般是对中杆下尖的位置，传统作业方式需要调整对中杆上的水准气泡居中[4]，作业效率低，在墙角、管线等环境下难以实现对中杆的倾斜测量。

利用先进的倾斜测量技术无需保持对中杆垂直，实现“停下即采，采好即走”，提高作业速度，同时解决了对中杆不能到墙角、崖边等特殊点的测量。倾斜测量技术主要有 2 类：①借助于微惯性

收稿日期：2019-06-22

第一作者简介：严恭敏（1977—），男，福建建瓯人，博士，副教授，研究方向为惯性导航与信息融合理论。

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

测量单元（miniature inertial measurement unit, MIMU）或磁罗盘建立对中杆本体坐标系与地理坐标系之间的转换关系，自动补偿倾斜误差[5]；②“摇一摇”倾斜测量方法，通过晃动对中杆测量空间中多个点，以对中杆长度作为约束条件进行空间交汇计算出测量点的位置[6]。上述 2 类方法都存在一定的缺陷。利用 MIMU 进行倾斜补偿，当对中杆倾斜角较大时，位置补偿精度主要受限于 MIMU 惯导的方位对准精度。本文主要讨论 MIMU 惯导的高精度方位初始对准方法，该方法只需保持对中杆下尖不动，将 GNSS 天线依次倾斜 3 个或 2 个角位置，即可实现对准，与文献[7]的方法“手持 GNSS 接收机步行一段 10 m 左右的距离”相比，空间依赖性小。

1 高精度方位初始对准算法

如图 1 所示，MIMU 与 GNSS 接收机一起固连安装在对中杆的顶端。MIMU 本体坐标系简记为 b 系。对中杆下尖点记为 P_0，GNSS 天线相位中心记为 P_i $(i=1,2,3)$，$\overline{P_0P_i}$ 在 b 系上的投影是常值，记为杆臂矢量 $\boldsymbol{l}^b=\begin{bmatrix}l_x^b & l_y^b & l_z^b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。GNSS 输出的一般是经纬高地理坐标，不难将其转换为当地站心直角坐标，比如以 P_1 点为原点的“东（E）-北（N）-天（U）”直角坐标（单位为 m），后面简记该坐标系为导航参考坐标系（n 系）。

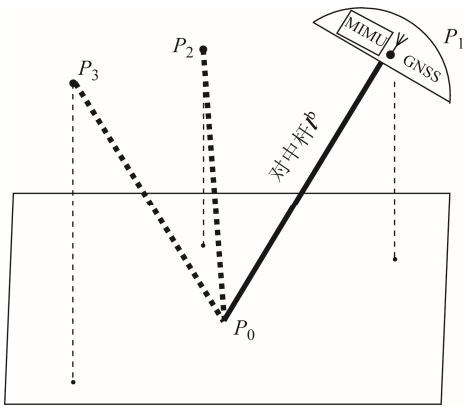


图 1 对中杆及其 3 次角位置倾斜放置示意图

当对中杆放置在地面上处于某倾斜位置 P_i 时，假设对中杆下尖点 P_0 与地面接触的 3 维坐标为 $\boldsymbol{P}_0^n$，对中杆上端 GNSS 接收天线相位中心点 P_i 的理想 3 维坐标为 $\boldsymbol{P}_i^n=\begin{bmatrix}P_{i,E}^n & P_{i,N}^n & P_{i,U}^n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；惯导输出的理想姿态阵为 $\boldsymbol{C}_{b,i}^n$。则有

$$\boldsymbol{P}_i^n=\boldsymbol{P}_0^n+\boldsymbol{C}_{b,i}^n\boldsymbol{l}^b \tag{1}$$

实际应用中，惯导解算输出的姿态阵是有误差的，记为 $\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n$；杆臂标称值也有误差，记为 $\tilde{\boldsymbol{l}}^b$，则式（1）可改写为

$$\boldsymbol{P}_i^n=\boldsymbol{P}_0^n+\left[\boldsymbol{I}+(\boldsymbol{\phi}_i\times)\right]\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n(\tilde{\boldsymbol{l}}^b-\delta\boldsymbol{l}^b) \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{\phi}_i=\begin{bmatrix}\phi_{i,E} & \phi_{i,N} & \phi_{i,U}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为惯导的失准角误差；$\delta\boldsymbol{l}^b=\begin{bmatrix}\delta l_x^b & \delta l_y^b & \delta l_z^b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为杆臂误差。

将式（2）展开并略去关于误差的 2 阶小量，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_i^n&=\boldsymbol{P}_0^n+\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n\tilde{\boldsymbol{l}}^b+(\boldsymbol{\phi}_i\times)\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n\tilde{\boldsymbol{l}}^b-\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n\delta\boldsymbol{l}^b=\\&\boldsymbol{P}_0^n+\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n-\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n\times\boldsymbol{\phi}_i-\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n\delta\boldsymbol{l}^b\end{aligned} \tag{3}$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n=\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n\tilde{\boldsymbol{l}}^b=\begin{bmatrix}\tilde{l}_{i,E}^n & \tilde{l}_{i,N}^n & \tilde{l}_{i,U}^n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ 为标称杆臂在惯导导航系 n 系下的投影。

保持对中杆下尖与地面接触点不动，先后进行 2 次倾斜测量，分别记为 $\boldsymbol{P}_i^n$ 和 $\boldsymbol{P}_j^n$，将它们作差 $\boldsymbol{P}_i^n-\boldsymbol{P}_j^n$，参考式（3）可得

$$\boldsymbol{P}_i^n-\boldsymbol{P}_j^n=(\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n-\tilde{\boldsymbol{l}}_j^n)-\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n\times\boldsymbol{\phi}_i+\tilde{\boldsymbol{l}}_j^n\times\boldsymbol{\phi}_j+(\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,j}^n-\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n)\delta\boldsymbol{l}^b \tag{4}$$

简记为

$$\boldsymbol{Z}_{ij}^n=-\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n\times\boldsymbol{\phi}_i+\tilde{\boldsymbol{l}}_j^n\times\boldsymbol{\phi}_j+\Delta\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,ji}^n\delta\boldsymbol{l}^b \tag{5}$$

式中 $\boldsymbol{Z}_{ij}^n=(\boldsymbol{P}_i^n-\boldsymbol{P}_j^n)-(\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n-\tilde{\boldsymbol{l}}_j^n)=(\boldsymbol{P}_i^n-\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n)-(\boldsymbol{P}_j^n-\tilde{\boldsymbol{l}}_j^n)$ 为构造量测，表示 GNSS 输出与惯导输出之偏差的 2 次倾斜测量间差分；$\Delta\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,ji}^n=\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,j}^n-\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n$ 为惯导姿态阵的 2 次测量间差分。

惯导经过加速度计调平后，通常水平失准角 $\phi_{i,E}$ 和 $\phi_{i,N}$ 都比方位失准角 $\phi_{i,U}$ 小得多，若忽略 $\phi_{i,E}$ 和 $\phi_{i,N}$，则式（5）可近似为

$$\boldsymbol{Z}_{ij}^n=-\tilde{\boldsymbol{l}}_i^H\times\boldsymbol{\phi}_i^U+\tilde{\boldsymbol{l}}_j^H\times\boldsymbol{\phi}_j^U+\Delta\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,ji}^n\delta\boldsymbol{l}^b \tag{6}$$

或者

$$\boldsymbol{Z}_{ij}^n=\tilde{\boldsymbol{L}}_i\phi_{i,U}-\tilde{\boldsymbol{L}}_j\phi_{j,U}+\Delta\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,ji}^n\delta\boldsymbol{l}^b \tag{7}$$

式中：$\tilde{\boldsymbol{l}}_i^H=\begin{bmatrix}\tilde{l}_{i,E}^n & \tilde{l}_{i,N}^n & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\phi}_i^U=\begin{bmatrix}0 & 0 & \phi_{i,U}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；$\tilde{\boldsymbol{L}}_i=\begin{bmatrix}-\tilde{l}_{i,N}^n & \tilde{l}_{i,E}^n & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。

式（7）含有 5 个未知误差参数，无法通过 1 个测量方程求解。若进行了 3 次测量，分别记为 $\boldsymbol{P}_1^n$、$\boldsymbol{P}_2^n$ 和 $\boldsymbol{P}_3^n$，则根据式（7）可构造 2 个测量方程并组成方程组，即

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{Z}_{12}^n\\ \boldsymbol{Z}_{13}^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{L}}_1 & -\tilde{\boldsymbol{L}}_2 & \boldsymbol{0} & \Delta\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,21}^n\\ \tilde{\boldsymbol{L}}_1 & \boldsymbol{0} & -\tilde{\boldsymbol{L}}_3 & \Delta\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,31}^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_{1,U}\\ \phi_{2,U}\\ \phi_{3,U}\\ \delta\boldsymbol{l}^b\end{bmatrix} \tag{8}$$

简记为

$$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{X} \tag{9}$$

当对中杆下尖不动且倾斜某一固定角度时(比如与铅垂线夹角为 30°)，其空间运动轨迹形成 1 锥面，在锥面上均匀选取 3 个测量点，以此构成的测量矩阵 $\boldsymbol{H}$ 是可逆的，这时由式（9）可直接求得未知参数 $\boldsymbol{X}$，即

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Z} \tag{10}$$

如果方位失准角 $\phi_{i,U}$ 不是小角度，则通过多次迭代修正的方法也能求解得正确的方位角，实现大方位失准角下的方位初始化。

特别地，假设 MIMU 的 z 轴平行于对中杆安装，这时对中杆仅沿伸缩方向存在杆臂误差，即有 $\delta\boldsymbol{l}^b=\begin{bmatrix}0 & 0 & \delta l_z^b\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；再假设测量时间比较短，即陀螺漂移引起的方位失准角 $\phi_{i,U}$ 变化不大，可将其视为常值 ϕ_U。则通过 2 次测量可得到测量方程为

$$\boldsymbol{Z}_{12}^n=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{L}}_1-\tilde{\boldsymbol{L}}_2 & \Delta\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,21}^n(:,3)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_U\\ \delta l_z^b\end{bmatrix}\triangleq\boldsymbol{H}_{12}\begin{bmatrix}\phi_U\\ \delta l_z^b\end{bmatrix} \tag{11}$$

式中 $\Delta\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,21}^n(:,3)$ 表示矩阵 $\Delta\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,21}^n$ 的第 3 列向量。式（11）的最小二乘解为

$$\begin{bmatrix}\phi_U\\ \delta l_z^b\end{bmatrix}=(\boldsymbol{H}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{12})^{-1}\boldsymbol{H}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{12}^n \tag{12}$$

如果杆臂矢量 $\boldsymbol{l}^b$ 精确已知，即 $\delta\boldsymbol{l}^b=\boldsymbol{0}$，则式(11)可简化为

$$\boldsymbol{Z}_{12}^n=(\tilde{\boldsymbol{L}}_1-\tilde{\boldsymbol{L}}_2)\phi_U\triangleq\boldsymbol{H}_{12}'\phi_U \tag{13}$$

此时，方位失准角的最小二乘解为

$$\phi_U=(\boldsymbol{H}_{12}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{12}')^{-1}\boldsymbol{H}_{12}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{12}^n \tag{14}$$

若令 $\tilde{\boldsymbol{l}}_1^n=\boldsymbol{P}_1^n=\boldsymbol{0}$，即将 1 位置的计算标称杆臂矢量和 GNSS 的测量值都置为零，则式（13）还可写为

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{l}}_2^H=\tilde{\boldsymbol{l}}_2^H\times\boldsymbol{\phi}^U \tag{15}$$

式中：$\Delta\tilde{\boldsymbol{l}}_2^H=\boldsymbol{P}_2^H-\tilde{\boldsymbol{l}}_2^H=\begin{bmatrix}P_{2,E}^n-\tilde{l}_{2,E}^n & P_{2,N}^n-\tilde{l}_{2,N}^n & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\phi}^U=\begin{bmatrix}0 & 0 & \phi_U\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$。式（15）的几何意义是：2 个水平矢量 $\tilde{\boldsymbol{l}}_2^H$ 和 $\boldsymbol{P}_2^H$ 之间的夹角为 ϕ_U，如图 2 所示，这在 ϕ_U 为大角度时也是成立的。

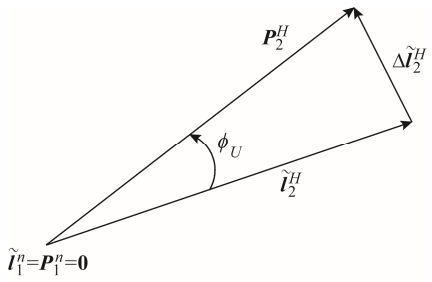


图 2　$\tilde{\boldsymbol{l}}_2^H$ 和 $\boldsymbol{P}_2^H$ 之间的夹角

2　误差分析

2.1　定位误差分析

由 GNSS 测量值 $\boldsymbol{P}_i^n$ 和惯导杆臂计算值 $\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n$ 求解对中杆下尖位置 $\boldsymbol{P}_0^n$ 的实际方法为

$$\tilde{\boldsymbol{P}}_0^n=\boldsymbol{P}_i^n-\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n \tag{16}$$

然而，根据式（3），理论上有

$$\boldsymbol{P}_0^n=\boldsymbol{P}_i^n-\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n+\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n\times\boldsymbol{\phi}_i+\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n\delta\boldsymbol{l}^b \tag{17}$$

比较式（16）和式（17），可知 $\boldsymbol{P}_0^n$ 的测量误差为

$$\delta\boldsymbol{P}_0^n=\tilde{\boldsymbol{P}}_0^n-\boldsymbol{P}_0^n=-\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n\times\boldsymbol{\phi}_i-\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n\delta\boldsymbol{l}^b \tag{18}$$

若只考虑方位失准角影响，$\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n\times\boldsymbol{\phi}_i=\tilde{\boldsymbol{l}}_i^H\times\boldsymbol{\phi}_i^U$ 表示杆臂在水平面上的投影 $\tilde{\boldsymbol{l}}_i^H$ 与 $\boldsymbol{\phi}_i^U$ 叉乘，其大小为 $\left|\phi_{i,U}\right|\cdot\left|\tilde{\boldsymbol{l}}_i^H\right|=\left|\phi_{i,U}\right|l\sin\alpha$，其中 α 为对中杆与铅垂线的夹角；$\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n\delta\boldsymbol{l}^b$ 的大小为杆臂误差的模值 $\delta l=\left|\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n\delta\boldsymbol{l}^b\right|$。所以定位误差可估算为

$$\begin{aligned}&\left|\delta\boldsymbol{P}_0^n\right|=\left|-\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n\times\boldsymbol{\phi}_i-\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n\delta\boldsymbol{l}^b\right|\leqslant\left|\tilde{\boldsymbol{l}}_i^n\times\boldsymbol{\phi}_i\right|+\\&\left|\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,i}^n\delta\boldsymbol{l}^b\right|=\left|\phi_{i,U}\right|l\sin\alpha+\delta l\end{aligned} \tag{19}$$

式（19）表明：方位对准误差与对中杆标称长度误差都会对下尖点的测量计算造成影响；实际应用中杆臂矢量应当标效准确，一般可达到毫米级精度，对于厘米级测绘要求而言，杆长误差通常可以忽略不记。因此，方位对准精度在 MIMU 惯导倾斜补偿方案中非常重要。

2.2　方位对准误差分析

不考虑杆臂误差，式（14）为根据 2 倾斜位置计算方位失准角的公式，重写为

$$\phi_U=(\boldsymbol{H}_{12}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{12}')^{-1}\boldsymbol{H}_{12}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{12}^n \tag{20}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

注意到：$\boldsymbol{Z}_{12}^{n}=(\boldsymbol{P}_{1}^{n}-\boldsymbol{P}_{2}^{n})-(\tilde{\boldsymbol{l}}_{1}^{n}-\tilde{\boldsymbol{l}}_{1}^{n})$ 包含 2 次 GNSS 定位测量，因而 GNSS 定位噪声误差会直接对方位对准精度造成影响，根据最小二乘理论，$\boldsymbol{\phi}_{U}=(\boldsymbol{H}_{12}^{\prime\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{12}^{\prime})^{-1}\boldsymbol{H}_{12}^{\prime\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_{12}^{n}$ 的方差为

$$\mathrm{Var}[\boldsymbol{\phi}_{U}]=2\sigma^{2}(\boldsymbol{H}_{12}^{\prime\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{12}^{\prime})^{-1} \tag{21}$$

式中：$2\sigma^{2}$ 为量测 $\boldsymbol{Z}_{12}^{n}$ 的误差，σ^{2} 为 GNSS 单次定位的东向或北向误差（方差）；$(\boldsymbol{H}_{12}^{\prime\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{12}^{\prime})^{-1}$ 称为水平精度稀释因子（horizontal dilution of precision，HDOP），由于 $\boldsymbol{H}_{12}^{\prime}=\tilde{\boldsymbol{l}}_{1}^{H}-\tilde{\boldsymbol{l}}_{2}^{H}$，当 $\tilde{\boldsymbol{l}}_{1}^{n}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{l}}_{2}^{n}$ 关于铅垂线对称且倾角越大时，HDOP 取值越小，方位对准精度越高。显然，当 $\tilde{\boldsymbol{l}}_{1}^{n}$ 与 $\tilde{\boldsymbol{l}}_{2}^{n}$ 关于铅垂线对称且倾角为 α 时，有 $(\boldsymbol{H}_{12}^{\prime\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_{12}^{\prime})^{-1}=1/(2l\sin\alpha)^{2}$，这时方位对准方差为

$$\mathrm{Var}[\boldsymbol{\phi}_{U}]=\frac{\sigma^{2}}{2(l\sin\alpha)^{2}} \tag{22}$$

比如，当 σ=1 cm、l=2 m 和 α=30°时，经计算方位对准的标准差为 $\sqrt{\mathrm{Var}[\boldsymbol{\phi}_{U}]}=0.32^{\circ}$。

3 实验与结果分析

试验系统主要包括载波相位差分 GNSS、MIMU 惯导系统、对中杆、数据采集笔记本和蓄电池，参见图 3。其中，GNSS 子系统包含基站和移动站，移动站接收机采集频率 5 Hz，水平定位静态精度约为 0.7 cm（1 倍标准差 σ）；MIMU 数据采集频率 100 Hz，陀螺仪零偏稳定性约为 30(°)/h，加速度计零偏重复性约为 $2\times10^{-3}g$（$g=9.8$ m/s^{2}）对中杆顶端 GNSS 天线相位中心距离下尖长度 1.897 m；笔记本同步采集 GNSS 定位与 MIMU 惯性传感器数据，做事后分析，步骤如下：

1）由 MIMU 输出采用 Mahony 算法进行调平[8-9]，倾斜角 α 变化参见图 4，在对中杆 3 个倾斜位置 P_1、P_2 和 P_3 处求得姿态阵 $\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,1}^{n}$、$\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,1}^{n}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{C}}_{b,3}^{n}$，不妨将方位角都设置为 0；

2）根据式（10）迭代求解失准角初始值 $\boldsymbol{\phi}_{3,U}$，再计算姿态阵 $\boldsymbol{C}_{b,3}^{n}$；

3）以位置误差为量测建立 15 维的惯导/GNSS 组合导航模型[10]，从倾斜位置 P_3 开始进行组合卡尔曼（Kalman）滤波；

4）保持对中杆下尖不动，将对中杆在不同方向上倾斜不同角度，每次在倾斜平稳时进行 GNSS 定位测量，利用式（16）计算下尖处 P_0 的定位值。

整个试验过程中，对中杆倾斜角 α 变化如图 4 中实线所示，倾斜角在 0~40°之间变化，从 180~450 s 的离散点为 20 个不同倾斜角度下计算的 P_0 点的 3 维定位误差。定位误差统计如表 1 所列，结果显示：水平和高度的定位最大误差为 1.25 cm，其中误差以均方根（root mean square, RMS）表示。

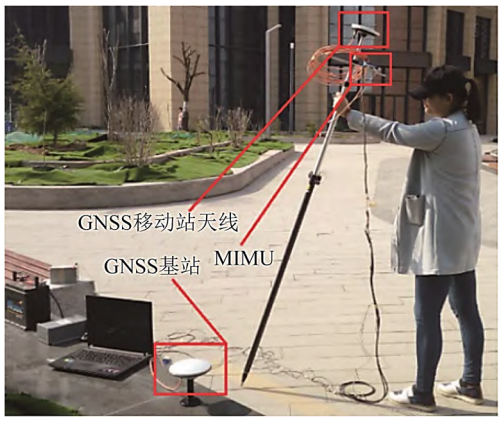


图 3 试验系统配置

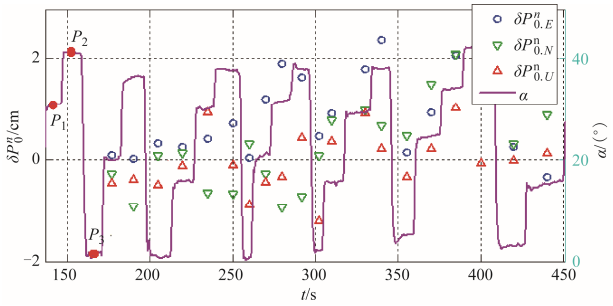


图 4 对中杆倾斜角变化与定位误差

表 1 定位误差统计 cm

统计项目	不同方向的定位结果		
	$\delta P_{0,E}^{n}$	$\delta P_{0,N}^{n}$	$\delta P_{0,U}^{n}$
均值	0.90	0.34	−0.03
RMS	1.25	1.06	0.56

4 结束语

利用 MIMU 惯导辅助 GNSS 进行 RTK 测量作业，能够有效补偿对中杆倾斜时产生的误差，获得满足精度的点位坐标和高程，但其前提是需对 MIMU 惯导进行正确初始化，MIMU 惯导的姿态精度特别是方位精度决定了对中杆倾斜误差补偿的效果。本文给出了 3 点法求解初始方位角的算法，同时也给出了简化的 2 点法算法，应用该方位初始化算法后，实测结果表明：即使对中杆的倾斜角超过 40°，RTK 测量的水平定位精度优于 1.25 cm；反过来看，定位结果也间接验证了方位初始对准算法具有较高的精度。

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

参考文献

[1] 李征航, 黄劲松. GPS 测量与数据处理[M]. 3 版. 武汉: 武汉大学出版社, 2016: 78-119.

[2] 陈伟, 鲍志雄, 林钦坚. 实时动态载波智能测量系统硬件平台架构[J]. 导航定位学报, 2015, 6(2): 76-80.

[3] EI-ASHMAWY K L A. A comparison between analytical aerial photogrammetry, laser scanning, total station and global positioning system surveys for generation of digital terrain model[J]. Geocarto International, 2015, 30(2): 154-162.

[4] 朱庆伟, 王家伟, 王涛. 工程测量中高精度对中杆设计研究[J]. 西安科技大学学报, 2017,37(2): 280-284.

[5] 谢爱萍. 基于 IMEMS 传感器的 RTK 对中杆倾斜改正的研究[J]. 矿山测量, 2015(5): 44-46,49.

[6] 张鲜妮, 王磊. 一种改善 RTK 测量精度的新方法[J]. 大地测量与地球动力学, 2011, 31(5): 128-131.

[7] 上海华测导航技术股份有限公司. 一种新型 GNSS 接收机倾斜测量系统及方法: 109269471[P]. 2018-11-09.

[8] MAHONY R, HAMEL T, PFLIMLIN J. Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(5): 1203-1218.

[9] 黄坡, 马艳, 杨万扣. 基于 Mahony 滤波器和 PID 控制器的四旋翼飞行器姿态控制[J]. 计算机工程应用技术, 2014, 10(7): 1611-1617.

[10] 严恭敏. 捷联惯导算法及车载组合导航系统研究[D]. 西安: 西北工业大学, 2004.

（上接第 14 页）

[2] 赵磊, 金培权, 张蓝蓝, 等. Layered Model: 一个面向室内空间的移动对象数据模型[J]. 计算机研究与发展, 2011, 48(增刊 3): 274-281.

[3] AFYOUNI I, RAY C, CLARAMUNT C. Spatial models for indoor and context-aware navigation systems: a survey[J]. Journal of Spatial Information Science, 2012, 4(1): 85-123.

[4] 郭仁忠, 应申, 李霖. 基于面片集合的 3D 产权体的拓扑自动构建[J]. 测绘学报, 2012, 41(4): 620-626.

[5] YING S, GUO R Z, LI L, et al. Construction of 3D volumetric objects for a 3D cadastral system[J]. Transactions in GIS, 2015, 19(5): 758-779.

[6] OCHMANN S, VOCK R, WESSEL R, et al. Automatic reconstruction of parametric building models from indoor point clouds[J]. Computers & Graphics, 2016(54): 94-103.

[7] KIM J S，LI K J. Simplification of geometric objects in an indoor space[J]. ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing. 2019(147): 146-162.

[8] TATENO K, TOMBARI F, NAVAB N. Large scale and long standing simultaneous reconstruction and segmentation[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2017(157): 138-150.

[9] 李佩瑶, 汤圣君, 刘铭崴, 等. 面向导航的 IFC 建筑模型室内空间信息提取方法[J]. 地理信息世界, 2015, 22(6): 78-84.

[10] LIN Y H, LIU Y S, GAO G, et al. The IFC-based path planning for 3D indoor spaces[J]. Advanced Engineering Informatics, 2013, 27(2): 189-205.

[11] 黄楠鑫, 王佳, 李智, 等. 基于 IFC 的室内地图模型构建研究[J]. 图学学报, 2019, 40(1): 186-192.

[12] FERRUCCI V. Generalised extrusion of polyhedra[C]//Association for Computing Machinery(ACM). Proceedings of the second ACM symposium on solid modeling and applications. New York: ACM, 1993: 35-42. DOI: 10.1145/164360.164376.

[13] LEDOUX H, MEIJERS M. Topologically consistent 3D city models obtained by extrusion[J]. International Journal of Geographical information Science, 2011, 25(4): 557-574.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

网络首发时间：2020-03-11 11:20:14
网络首发地址：http://kns.cnki.net/kcms/detail/10.1226.v.20200309.1515.007.html

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2020.02.007

传统组合导航中的实用 Kalman 滤波技术评述

严恭敏，邓　瑀

（西北工业大学自动化学院，西安 710072）

摘　要：在随机线性系统建模准确的情况下，Kalman 滤波是线性最小方差无偏估计。针对传统惯导/卫导组合导航的实际应用，难以精确建模，给出了常用的建模方法、状态量选取原则、离散化方法及滤波快速计算方法。讨论了平方根滤波、自适应滤波、联邦滤波和非线性滤波等技术的适用场合，并给出了使用建议。针对前人研究可观测度中未考虑随机系统噪声的缺陷，提出了更加合理的以初始状态均方误差阵为参考的可观测度定义和分析方法。提出了均方误差阵边界限制方法，可有效抑制滤波器的过度收敛和滤波发散。该讨论可为工程技术人员提供一些有实用价值的参考。

关键词：捷联惯导系统；组合导航；Kalman 滤波；评述

中图分类号：V249.3　　**文献标志码**：A　　**开放科学（资源服务）标识码（OSID）**：

文章编号：2095-8110(2020)02-0050-15

Review on Practical Kalman Filtering Techniques in Traditional Integrated Navigation System

YAN Gong-min, DENG Yu

(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Kalman filtering is a minimum-variance unbiased estimator in the case of accurate modeling for stochastic linear systems. For practical application in the traditional INS/GNSS integrated navigation, it is always difficult to obtain an ideal precise model. In this paper, commonly used modeling methods, selection principle for state variables, discretization method and fast calculation methods are presented. The applications of square root filtering, adaptive filtering, federated filtering and nonlinear filtering are discussed, and then some useful suggestions are given. In view of the defects of previous studies on observability analysis without considering the noise effect of stochastic system, a more reasonable observability definition and analysis method with respect to the initial state mean square error matrix is proposed. The use of boundary limiting method for mean square error matrix is also proposed, which can effectively suppress filter excessive convergence and avoid filter divergence. It is hoped that the discussion can provide useful references for engineers and technicians.

Key words: Strapdown inertial navigation system; Integrated navigation system; Kalman filtering; Review

收稿日期：2019-01-09；**修订日期**：2019-02-26

作者简介：严恭敏(1977-)，男，博士，副教授，主要从事惯性导航与信息融合理论研究。E-mail: yangongmin@163.com

0　前言

估计理论是概率论与数理统计的一个分支，它是根据受扰动的观测数据来提取系统某些参数或状态的一种数学方法。1795 年，高斯提出了最小二乘法；1912 年，费歇尔(R. A. Fisher)提出了极大似然估计法，从概率密度的角度考虑估计问题；1940 年，维纳提出了在频域中设计统计最优滤波器的方法，称为维纳滤波，但它只能处理平稳随机过程问题且滤波器设计复杂，应用受到很大限制；1960 年，卡尔曼基于状态方程描述提出了一种最优递推滤波方法，称为 Kalman 滤波，它既适用于平稳随机过程，也适用于非平稳过程，一经提出便得到了广泛应用。在 Kalman 滤波器出现以后，针对随机动态系统的估计理论的发展基本上都是以它的框架为基础的一些扩展和改进[1]。

Kalman 滤波器最早和最成功的应用实例便是在组合导航领域。惯性导航系统(Inertial Navigation System，INS)是最重要的一种导航方式，它能提供姿态、方位、速度和位置，甚至还包括加速度和角速率等导航信息，可用于运载体的正确操纵和控制。惯导具有自主性强、动态性能好、导航信息全面且输出频率高等优点，但其误差随时间不断累积，长期精度不高。相比而言，全球导航卫星系统(Global Navigation Satellite System，GNSS)的优点是精度高且误差不随时间增大，缺点是导航信息不够全面、信号容易受到干扰、在室内等环境下接收不到卫星信号而无法使用。惯导和卫导之间具有很强的互补性，惯导/卫导组合导航提高了系统整体的精度和可靠性，被公认为是最佳的组合导航方案[2]。除了惯导和卫导外，传统的辅助导航方法有里程仪(或多普勒计程仪)、高度表和地磁方位(多用于低精度场合)，当然还有天文导航、地图/重力/地磁匹配导航等，但是后者不太常用或应用领域相对比较狭窄。随着机器人和自动驾驶技术的兴起，激光雷达、视觉图像、即时定位与地图构建(Simultaneous Localization and Mapping，SLAM)、因子图(factor graph)和人工智能(Artificial Intelligence，AI)等导航手段或数据处理方法不断涌现，组合导航和信息融合新技术的研究和发展方兴未艾[3-6]。限于笔者的知识面，论文主要讨论了传统 Kalman 滤波组合导航算法，以惯导/卫导组合为例，指出实际 Kalman 滤波应用中可能遇到的问题及其解决思路，希望能为工程技术人员提供一些有实用价值的参考。

1　Kalman 滤波基本原理

给定 Kalman 滤波随机系统的状态空间模型

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{X}_{k-1}+\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{W}_{k-1}\\ \boldsymbol{Z}_k=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{V}_k\end{cases}\tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{X}_k$ 是 n 维的状态向量；$\boldsymbol{Z}_k$ 是 m 维的量测向量；$\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}$、$\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}$ 和 $\boldsymbol{H}_k$ 是已知的系统结构参数，分别称为 n 阶的状态一步转移矩阵、$n\times l$ 阶的系统噪声分配矩阵、$m\times n$ 阶的量测矩阵；$\boldsymbol{W}_{k-1}$ 是 l 维的系统噪声(或称过程噪声)向量，$\boldsymbol{V}_k$ 是 m 维的量测噪声向量，两者都是零均值的高斯白噪声向量序列，且它们之间互不相关，即满足

$$\begin{cases}\mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k]=\boldsymbol{0}, & \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{W}_j^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{Q}_k\delta_{kj}\\ \mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k]=\boldsymbol{0}, & \mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{V}_j^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{R}_k\delta_{kj}\\ \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{V}_j^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{2}$$

式中，δ_{kj} 为克罗内克函数。式(2)是 Kalman 滤波状态空间模型中对于噪声要求的基本假设，一般要求 $\boldsymbol{Q}_k$ 是非负定的且 $\boldsymbol{R}_k$ 是正定的，即有 $\boldsymbol{Q}_k\geqslant 0$ 且 $\boldsymbol{R}_k>0$。实际上，通过选择合适的噪声分配阵 $\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}$，可以保证 $\boldsymbol{Q}_k$ 总是正定的[1]。

经过推导，标准(或称传统)Kalman 滤波包含 5 个基本公式，分别为：

1)状态一步预测

$$\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}\tag{3}$$

2)状态一步预测均方误差阵

$$\boldsymbol{P}_{k/k-1}=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}\tag{4}$$

3)滤波增益

$$\boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_k)^{-1}\tag{5}$$

4)状态估计

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k=\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}+\boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1})\tag{6}$$

5)状态估计均方误差阵

$$\boldsymbol{P}_k=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{P}_{k/k-1}\tag{7}$$

其中，式(3)和式(4)统称为时间更新，式(5)～式(7)统称为量测更新；式(3)和式(6)组成滤波计算回路(一阶矩计算)，式(4)、式(5)和式(7)组成增益计算回路(二阶矩计算)。注意到滤波计算回路受增益计算回路的影响，而滤波计算回路不对增益计算回路产生任何影响。

欲启动 Kalman 滤波计算，必须预先设置状态估计的初值 $\hat{\boldsymbol{X}}_0$ 和均方误差阵初值 $\boldsymbol{P}_0$。理论上，当取 $\hat{\boldsymbol{X}}_0=\mathrm{E}[\boldsymbol{X}_0]$ 且 $\boldsymbol{P}_0=\mathrm{Var}[\boldsymbol{X}_0]$ 时，Kalman 滤波为

线性最小方差无偏估计。然而，在实际应用中，某一次滤波过程只会是随机过程总体的一个样本实现，况且滤波状态初值的真值往往是未知的，所以一般将状态初值设置为真值附近的某值，有时甚至直接设置为零向量。可见，Kalman 滤波虽然理论上是无偏估计，但是实际滤波结果却往往是有偏的，有幸的是只要滤波器是渐进稳定的，随着滤波步数的增加，初值的影响将会逐渐消失。与 $\mathrm{E}[\boldsymbol{X}_0]$ 一样，$\mathrm{Var}[\boldsymbol{X}_0]$ 也不可能准确已知，一般将均方误差阵初值 $\boldsymbol{P}_0$ 设置为对角矩阵，各对角线元素的平方根粗略地反映了相应状态分量初值的不确定度。滤波初值的设置往往还需考虑状态的可观测性，基本设置原则简要叙述如下。

对于可观测性较强的状态分量，对应的状态初值和均方误差阵设置偏差容许适当大些，它们随着滤波更新将会快速收敛，如果均方误差阵设置过小，则当初始状态误差较大时会使状态收敛速度缓慢，变为有偏估计。而对于可观测性较弱的状态，对应的状态初值和均方误差阵应该设置得尽量准确，如果均方误差阵设置过大，容易引起状态估计过程中的有偏或剧烈波动；反之，如果均方误差阵设置过小，同样会使状态收敛速度变慢，这两种情况下均方误差阵计算值都不宜用于评估相应状态估计的精度。对于不可观测的状态分量，其状态估计及其均方误差阵不会随滤波更新而变化，即不会有滤波效果。例如在不转位的惯导 Kalman 滤波初始对准中，等效水平加速度计随机常值零偏（等效东向陀螺随机常值漂移）的方差设置太大会影响水平（方位）失准角的估计，因为两者是相互依赖的且通常认为前者的可观测性较弱，只有前者设置得适当的小，后者的估计精度才会比较高。

2 惯导/卫导组合导航系统建模

常用的 Kalman 滤波是离散形式的，但在实际系统分析和建模时，多是以连续时间形式表示。惯导/卫导组合导航 Kalman 滤波的连续时间随机系统模型如下

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{w}^b(t)\\ \boldsymbol{Z}(t)=\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{v}(t)\end{cases}\tag{8}$$

$$\begin{cases}\mathrm{E}[\boldsymbol{w}^b(t)]=\boldsymbol{0}, & \mathrm{E}[\boldsymbol{w}^b(t)(\boldsymbol{w}^b(\tau))^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{q}(t)\delta(t-\tau),\\ \mathrm{E}[\boldsymbol{v}(t)]=\boldsymbol{0}, & \mathrm{E}[\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(\tau)]=\boldsymbol{r}(t)\delta(t-\tau),\\ \mathrm{E}[\boldsymbol{w}^b(t)\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}(\tau)]=\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{9}$$

其中

$$\boldsymbol{X}(t)=[\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\quad(\delta\boldsymbol{v}^n)^{\mathrm{T}}\quad(\delta\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}\quad(\boldsymbol{\varepsilon}^b)^{\mathrm{T}}\quad(\boldsymbol{\nabla}^b)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{Z}(t)=\begin{bmatrix}\tilde{\boldsymbol{v}}^n_{\mathrm{INS}}-\tilde{\boldsymbol{v}}^n_{\mathrm{GNSS}}\\ \tilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{INS}}-\tilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GNSS}}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{aa} & \boldsymbol{M}_{av} & \boldsymbol{M}_{ap} & -\boldsymbol{C}_b^n & \boldsymbol{0}_{3\times3}\\ \boldsymbol{M}_{va} & \boldsymbol{M}_{vv} & \boldsymbol{M}_{vp} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{C}_b^n\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{M}_{pv} & \boldsymbol{M}_{pp} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3}\\ & & \boldsymbol{0}_{6\times15} & & \end{bmatrix},\boldsymbol{G}(t)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{C}_b^n & \boldsymbol{0}_{3\times3}\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{C}_b^n\\ \boldsymbol{0}_{9\times6} & \end{bmatrix},\boldsymbol{w}^b(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_g^b\\ \boldsymbol{w}_a^b\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}(t)=[\boldsymbol{0}_{6\times3}\quad\boldsymbol{I}_{6\times6}\quad\boldsymbol{0}_{6\times6}],\boldsymbol{v}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_v\\ \boldsymbol{v}_p\end{bmatrix}$$

其中，$\boldsymbol{\phi}$、$\delta\boldsymbol{v}^n$、$\delta\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{\varepsilon}^b$、$\boldsymbol{\nabla}^b$ 分别为惯导失准角、速度误差、位置误差、陀螺随机常值漂移和加速度计随机常值偏值；$\tilde{\boldsymbol{v}}^n_{\mathrm{INS}}$、$\tilde{\boldsymbol{v}}^n_{\mathrm{GNSS}}$ 分别为惯导和卫导速度；$\tilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{INS}}$、$\tilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GNSS}}$ 分别为惯导和卫导位置（含纬度、经度和高度）；分块矩阵 $\boldsymbol{M}_{ij}(i,j=a,v,p)$ 的表达式可详见文献[1]；$\boldsymbol{w}_g^b$ 和 $\boldsymbol{w}_a^b$ 分别为陀螺仪角速度测量噪声和加速度计比力测量噪声；$\boldsymbol{v}_v$ 和 $\boldsymbol{v}_p$ 分别为卫星接收机速度测量噪声和位置测量噪声；$\delta(t)$ 为狄拉克函数；右上标 b 表示右-前-上载体坐标系，n 表示东/E-北/N-天/U 地理导航坐标系。注意到 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{I}_{6\times6}$，当噪声 $\boldsymbol{w}_i^b(i=g,a)$ 3 个分量的强度相等时（实际中通常也是这么设置的），可将 $\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}_i^b$ 等效为一个三维噪声向量，即 $\boldsymbol{w}_i^n=\boldsymbol{G}\boldsymbol{w}_i^b$，这样处理之后会使状态一步预测均方误差阵式(4)中的系统噪声整体 $\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}$ 变为对角阵，有利于降低计算量。

式(8)是一种比较常用的惯导/卫导组合 15 维状态建模，主要考虑了惯性器件典型误差和惯导导航参数解算误差，且将卫导测量误差视为简单的白噪声，它能够满足大部分的实际应用。对于海上或无需精密高度定位的场合，为了降低滤波器维数和计算量，有时可将天向通道中的加速度计随机常值偏值、速度误差和高度误差简化删去。但是，对于捷联惯导而言，如果导航运行过程中俯仰或横滚角机动变化较大，此时载体坐标系中的 3 个加速度计随机常值偏值容易从天向通道中辨识出来，高度通

道不宜再作简化处理。

对于惯导而言，组合导航的主要目的在于通过速度或位置量测估计出失准角甚至惯性器件误差，提高惯导系统精度。在实际应用中，速度量测和位置量测之间是存在一定程度的信息冗余的。在高精度惯导中，失准角和惯性器件误差都比较小且稳定，需要较长时间才能估计出这些误差，通常有位置量测就可以，而不需要速度量测。在低精度惯导中，失准角和惯性器件误差都相对较大且不稳定，需要通过速度量测才能更快速地估计出这些误差，如果仅用位置量测则往往不能起到很好的误差抑制效果，除非实际位置测量噪声非常小。

不同导航系统之间进行测量参数或导航参数比对组合，往往都得考虑两者之间的时空不同步差异问题，即杆臂误差和时间不同步误差。根据实际情况，考虑是否将这些误差量增广列作 Kalman 滤波状态。

对于惯导与卫导之间的杆臂误差，建议事先进行准确测定，再作为已知参数设定并补偿，这样有利于降低滤波器维数。除非在某些特定的高精度应用场合，如机载定位定向系统(Position and Orientation System，POS)中，卫导天线安装在飞机蒙皮上方，惯导安装在机腹仪器仓内，难以准确测量出两者的相对位置，此时需将不能准确测定的杆臂误差列为状态。一般情况下，惯导精度等级越低或载体转动机动性越差，将越难通过滤波方法估计出杆臂误差，因而在低精度惯导中应当尽量事先给出准确的杆臂参数。

接下来分析时间不同步问题。通常导航计算机接收到惯性器件信号的延迟较少，而卫星信号从采集到定位解算再到传输给导航计算机，可能存在几十甚至一、二百毫秒的延迟，有些卫导系统延迟时间还不固定，这对高速飞行器的组合导航系统而言是十分不利的。有些情况下，时间延迟波动带来的误差远大于卫导本身的定位误差，例如飞机速度 200m/s，延迟 150ms 将会引起 30m 的时间不同步定位误差，而卫导定位误差一般小于 10m。如果卫导相对于惯导时间延迟基本固定不变，则可以作为状态进行滤波估计，在一定量级的载体加速度机动条件下是可观测的。如果时间延迟参数存在波动又难以准确估计，则应当优先考虑在组合导航系统硬件设计上做好同步处理和补偿，否则只能从软件算法上等效放大卫导的量测噪声(不好处理的非白噪声)，相当于降低了卫导的测量精度，必然会对组合导航系统造成负面影响。

显然，惯导的系统级标定或初始精对准过程均可视为一种特殊的组合导航算法，它们都以静止零速为参考速度，惯导解算速度即为速度误差观测量。系统级标定将惯性器件的漂移误差、刻度系数误差，以及器件之间的安装误差等待标定参数都扩充为滤波状态，通过一套完整的转动方案充分激励出所有误差源的影响，借助 Kalman 滤波器从导航速度误差量测中估计出待标定参数。精对准的主要目标在于从导航速度误差中估计出失准角，有时还能够估计获得部分惯性器件误差或抵消惯性器件误差的影响，例如多位置对准方法、单轴或双轴旋转对准方法等。

3　连续时间随机系统的离散化问题

在导航计算机上运算的 Kalman 滤波总是离散化形式的，针对如式(8)给出的连续时间随机系统，在使用 Kalman 滤波之前必须先进行离散化处理。随机系统离散化与确定性系统离散化最大的区别在于对输入噪声的等效处理。

简记 $\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{X}(t_k)$、$\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}=\boldsymbol{G}(t_{k-1})$、$\boldsymbol{Z}_k=\boldsymbol{Z}(t_k)$ 和 $\boldsymbol{H}_k=\boldsymbol{H}(t_k)$，且记 T_s 为离散化间隔，对式(8)等效离散化，可近似得式(1)，其中

$$\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\approx \mathrm{e}^{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{F}(\tau)\mathrm{d}\tau}\approx \boldsymbol{I}+\boldsymbol{F}(t_{k-1})T_s \approx \boldsymbol{I}+\bar{\boldsymbol{F}}(t_k,t_{k-1})T_s \tag{10}$$

$$\boldsymbol{Q}_{k-1}\approx \boldsymbol{q}(t_{k-1})T_s \tag{11}$$

$$\boldsymbol{R}_k\approx \boldsymbol{r}(t_k)/T_s \tag{12}$$

式(10)中，第 1 个约等号原因在于系统矩阵 $\boldsymbol{F}(t)$ 是近似可交换的，即有 $\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{F}(\tau)\approx\boldsymbol{F}(\tau)\boldsymbol{F}(t)$；第 2 个约等号原因在于将 $\boldsymbol{F}(t)$ 近似为常值，且 $\boldsymbol{F}(t_{k-1})T_s$ 为小量即 $|\boldsymbol{F}(t_{k-1})T_s|\gg|\boldsymbol{F}^2(t_{k-1})T_s^2|$，忽略了泰勒级数展开的高阶项；第 3 个约等号右端 $\bar{\boldsymbol{F}}(t_k,t_{k-1})$ 表示时间段 $[t_{k-1},t_k]$ 内的系统阵平均值，该计算方式比取 $\boldsymbol{F}(t_{k-1})$ 的精度高。式(11)计算简洁，通常没有必要采用如文献[2]所述的复杂的噪声方差阵计算方法，计算量大且精度提升并不明显，况且实际系统中噪声设置可能本身就比较粗糙，多数情况下即使相差 3～5 倍，对 Kalman 滤波结果的影响也不大，简单地缩短离散化间隔往往远比提高离散化阶次更为有效。在常用车载或机载组合导航中，建议离散化间隔不大于 0.1s，如果惯导加速或转弯机动越大，或者惯导精度

越高，则离散化间隔应当取得越小。组合导航系统的精度不仅取决于惯导的解算精度，还受限于惯导误差方程传播的计算精度[7]。

在式(8)所示的量测模型中，$\boldsymbol{v}(t)$ 为连续时间白噪声，$\boldsymbol{r}(t)$ 为其功率谱密度，理论上连续时间白噪声的带宽无限，只是一种理想化的建模表示，这在实际系统中是不可能存在的。在实际应用中，大多数系统的量测方程是以离散形式直接给出的，如果在一定量测频率范围内量测噪声的方差大小基本不变，则在量测设备允许的条件下选用较高的量测频率对提高滤波估计精度是有益的；如果系统状态变化比较平缓，为了降低量测更新频率和减少计算量，则可将相继多次量测作平均处理，并相应减少量测噪声，利用平均量测进行 Kalman 滤波量测更新与进行高频率量测更新是基本等效的。例如在以速度为量测的扰动基座 Kalman 滤波初始对准中，反映失准角变化规律的惯导速度为缓变量，外界基座干扰为快变量，可利用一段时间内(如 1s)的平均速度代替瞬时速度作为量测，这样可在减少基座干扰影响的同时降低量测更新频率。式(12)正说明了，在 $\boldsymbol{r}(t_k)$ 为缓变或定值的情况下，若使用较长的量测离散化间隔 T_s，则需要设置较小的噪声参数 $\boldsymbol{R}_k$。

4 噪声相关条件下的建模问题

在标准 Kalman 滤波中关于噪声的基本假设满足式(2)，如果不满足该条件，通常称其为噪声相关条件下的 Kalman 滤波，主要包括系统噪声与量测噪声相关、系统噪声为有色噪声、量测噪声为有色噪声三种情形[1-2]。

处理系统噪声与量测噪声相关的方法是将量测引入状态方程，从而消除相关性。事实上，系统噪声与量测噪声相关的实际系统例子非常罕见，即使相关也很难准确获得它们之间的相关性矩阵，因而该种情形往往只有理论上探讨的意义。

对于系统噪声或量测噪声为有色噪声的情形，通行的做法是对有色噪声建模，将其表示为白噪声激励的输出，即对有色噪声进行白化处理，再将有色噪声模型列入系统方程，构成增广系统。由于 Kalman 滤波采用状态方程描述系统，因而理论上只有能够用有限维状态方程描述的有色噪声才能作增广处理。实际应用时多将有色噪声近似成 AR(p)模型(p 阶自回归时间序列模型)，而且阶次一般不会太高，往往取 1 阶(至多 2 阶)就足够了[8]。

以惯导/卫导组合导航为例，常将陀螺漂移(加速度计零偏类似)建成如下误差模型

$$\varepsilon = \varepsilon_b + \varepsilon_r + \varepsilon_w \tag{13}$$

式中，ε_b 为随机常值过程，ε_r 为相关过程，ε_w 为角速率白噪声，三者分别表示陀螺漂移误差中的不易变部分(随机常值)、缓变部分和快变部分。如果将惯性器件中相关过程都建模成 AR(1)模型，则 6 个惯性器件(3 个轴陀螺＋3 个轴加速度计)将增加 6 维状态，如果采用 AR(2)模型则需增加 12 维状态，这对 Kalman 滤波器而言增加了很大的计算负担。从实用角度看，太复杂的惯性器件建模方法是不可取的，能大幅提高导航系统精度的结论也是不可信的[9-10]。在实际应用中，一般以“随机常值＋白噪声”或“AR(1)相关过程＋白噪声”建模就足够了，前者多用于器件误差变化时间相对于系统工作时间而言比较长(相对稳定)的情形，而后者主要用于误差变化时间相对较短的情形。

对于卫导量测噪声，建模为 AR(1)也足够了，实际上卫导测量序列前后之间的相关性也很小，特别在量测间隔较大时(1s 量级)，完全可近似为白噪声。同时，可将量测噪声矩阵当作对角阵看待，进而使用序贯 Kalman 滤波进行计算，避免了矩阵求逆运算，滤波结果与非对角阵量测噪声设置之间的差别不大。

另外指出，在导航中影响导航精度的主要因素是惯性器件的长时间相关误差项，而短相关或白噪声的贡献一般非常小，导航算法本身就是个积分过程，具有较强的高频噪声抑制能力。因而在导航算法前端应用数字滤波、小波滤波甚至神经网络滤波等手段进行去噪的做法是没什么意义甚至不可取的，降噪作用不大，反而有可能引起系统带宽变窄。前述所说的 AR 建模主要指的也是对相关时间较长项建模，而对于较短项完全可以忽略。

5 滤波快速计算问题

标准 Kalman 滤波算法的计算量(主要指浮点乘法运算次数)与状态维数的三次方成正比，状态维数的增加，使得计算量呈几何级数增长，高维系统的滤波对于导航计算机来说是一个沉重的负担，对于单片机之类的嵌入式系统而言尤其如是。

在运载体机动情况下，高精度的捷联惯导系统要求较高的惯性器件采样频率和导航解算频率。

同理，在组合导航 Kalman 滤波中，为了获得高精度的惯导误差状态及其均方误差阵的传播，也需要较高的 Kalman 滤波时间更新频率。据分析，在组合导航 Kalman 滤波中状态均方误差阵预测的计算量最多(而非量测更新的矩阵求逆计算)，约占 70％以上。针对状态转移矩阵 $\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}$ 为稀疏矩阵的特点，常规算法存在大量的乘零运算操作，白白浪费了计算量，文献[11]提出了一种矩阵外积法，使得均方误差阵预测 $\boldsymbol{P}_{k/k-1}$ 所需的乘法次数降为 s^2-u^2(其中 s 和 u 分别为状态转移矩阵中非零元素的个数和数值为 1 的元素个数)。更进一步地，文献[12]基于系统矩阵为稀疏矩阵、量测噪声方差阵为对角阵且量测矩阵的非零元均为 1，以及惯导水平通道和高度通道弱耦合的特点，提出了均方误差阵预测直接展开计算，采用量测更新序贯滤波处理，以及将系统矩阵中次要元素强制置零和降维次优滤波等措施，极大地减少了 Kalman 滤波的乘法计算次数。直接展开计算法不仅减少了乘法计算量，还减少了用于程序循环控制的变量计算和比较次数，最终滤波运行速度与常规算法相比可提高 1 个数量级以上。当然，直接展开计算法的缺点是增加了程序的代码长度，典型的惯导/卫导组合算法程序约增加 50k 字节左右。

特别地，在低精度微机电系统(Micro-Electro-Mechanical System，MEMS)惯导/卫导组合中，根据物理含义，可以明显地知道某些系统状态分量之间是几乎无关的(例如陀螺随机常值漂移与杆臂误差之间)或弱相关的(例如失准角与位置误差之间、陀螺随机常值漂移与速度误差之间)，因而可以直接将它们之间的均方误差阵相应元素置零，无需计算，以节约计算量并减少程序代码。但需要注意的是，置零可能引起均方误差阵的非正定，这需要与均方误差阵下限设置技术结合使用，详见第 11 节。

实际系统中，捷联惯导算法的更新频率通常在 100Hz 以上，组合导航 Kalman 滤波的时间更新频率建议不低于 10Hz。如果在一个惯导算法更新周期(10ms)内无法完成一次 Kalman 滤波时间更新，则可以将 Kalman 滤波时间更新分散成计算量大致相同的数小片(比如 50 小片)，每 10ms 仅计算其中的一部分(10 小片)，这样在 5 个惯导算法更新周期(50ms)内便可完成一次 Kalman 滤波时间更新，同理也可将量测更新作同样的分散处理。这种分散处理的计算技术称之为时间分散 Kalman 滤波(Time-Distributed Kalman Filtering，TDKF)算法[13]。

6　平方根滤波问题

在标准 Kalman 滤波中，均方误差阵 $\boldsymbol{P}_k$ 表示的是状态估计误差的二阶统计量(一种平方量)。众所周知，一个数的平方在数值表示上需要更多的数字位数，一般 2 倍于该数的表示，因此为了保证滤波精度，均方误差阵 $\boldsymbol{P}_k$ 的更新(增益计算回路，计算 $\boldsymbol{K}_k$ 可除外)往往比状态估计 $\hat{\boldsymbol{X}}_k$ 的更新(滤波计算回路)需要更多的有效数字位数。

平方根滤波算法主要是针对均方误差阵更新过程设计，采用均方误差阵 $\boldsymbol{P}_k$ 的平方根进行循环更新，以减少数值表示的位数和减小计算误差。与标准 Kalman 滤波算法相比，平方根滤波计算只需要大约一半的有效数字位数就能达到同样的滤波精度，这在早期计算机位数不高时(单精度浮点甚至定点情形)是特别有效的。

下面以捷联惯导的天向失准角误差传播方程为例来说明 Kalman 滤波所需的有效数字位数。天向失准角误差方程为

$$\dot{\phi}_{\mathrm{U}}=\left(\omega_{\mathrm{N}}+\frac{v_{\mathrm{E}}}{R_{Nh}}\right)\phi_{\mathrm{E}}+\frac{v_{\mathrm{N}}}{R_{Mh}}\phi_{\mathrm{N}}+\frac{\tan L}{R_{Nh}}\delta v_{\mathrm{E}}+\left(\omega_{\mathrm{N}}+\frac{v_{\mathrm{E}}\sec^2 L}{R_{Nh}}\right)\delta L-\frac{v_{\mathrm{E}}\tan L}{R_{Nh}^2}\delta h-\varepsilon_{\mathrm{U}} \tag{14}$$

式中，各符号含义参见文献[1]。假设惯导的有效速度表示范围为 0.001m/s～100m/s，式(14)中第一或第二项的数量级范围为 10^5，因此，$\dot{\phi}_{\mathrm{U}}$ 至少需要 5 位有效数字才能全面表示，其方差表示至少需要 10 位有效数字。在计算机中，单精度浮点数(float)的有效位数是 7 位，双精度浮点数(double)的有效位数是 16 位。因此，以单精度浮点数作为 Kalman 滤波的方差传递，数字有效位数稍显不够，但如采用平方根滤波就能够满足了。

常用的平方根滤波算法有 Potter 平方根滤波、奇异值分解(Singular Value Decomposition，SVD)滤波、UD 分解滤波和信息平方根滤波等算法[1-2]。如果导航计算机仅支持单精度浮点运算，则需要考虑采用平方根滤波算法，并优先推荐使用 UD 分解滤波算法，而其他平方根滤波算法必要性不大。目前大部分计算机都支持双精度浮点运算，此时在组合导航 Kalman 滤波应用中则完全没有必要再采用平方根滤波算法，因为平方根滤波算法的计算量总

是大于常规滤波算法的。

另外指出，表示导航参数比表示导航误差需要更多的有效数字位数。在惯导解算中，如果惯导速度的精度为 0.001m/s，定位解算周期为 $T=0.01$s，根据如下纬度更新公式可大致分析一下纬度表示所需的有效数字位数为

$$L_m = L_{m-1} + v_{N,m-1} T / R_{Mh} \tag{15}$$

式中，不妨假设前一时刻的纬度取值 $L_{m-1}=1$(rad)，由 $v_{N,m-1}T/R_{Mh} \approx 10^{-12}$(rad) 可知，为了准确得到当前时刻的纬度 L_m，其表示需要 12 位有效数字，才会使得在大数与小数相加过程中小数不会被完全湮没。从以上计算分析过程看，适当延长导航更新周期 T(即降低采样频率)可以在一定程度上减小数字表示位数，这对平台惯导系统而言是合适的，但对同时存在角运动和线运动的高动态捷联惯导系统来说是不可行的，因为在捷联惯导解算中为补偿不可交换误差，动态越大采样率要求就越高。

综上所述，无论从惯导解算还是从组合滤波角度看，除非作特殊处理，应当在硬件上选用具备双精度浮点运算能力的导航计算机。

7 自适应滤波与强跟踪滤波问题

理论上，只有在随机动态系统的结构参数和噪声统计特性参数都准确已知的条件下，标准 Kalman 滤波才能获得状态的最优估计。然而，实际应用中以上两类参数的获取都或多或少存在一些误差，致使 Kalman 滤波的精度降低，严重时还可能会引起滤波发散。不难理解，随机系统的模型误差往往会影响到其输出，换言之，量测输出中很可能隐含了关于系统模型(例如噪声参数)的某些信息，那么当系统模型参数不够准确时就有可能根据量测输出对部分参数进行自适应估计建模，这实质上属于系统辨识问题。

自适应滤波的方法很多，比较常见的一种状态空间模型描述为

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{X}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{W}_{k-1} \\ \boldsymbol{Z}_k = \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{V}_k \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k] = \boldsymbol{q}_k, \quad \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{W}_j^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{Q}_k\delta_{kj}, \\ \mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k] = \boldsymbol{r}_k, \quad \mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{V}_j^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{R}_k\delta_{kj}, \\ \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{V}_j^{\mathrm{T}}] = \boldsymbol{0} \end{cases} \tag{17}$$

其中，$\boldsymbol{q}_k$、$\boldsymbol{r}_k$、$\boldsymbol{Q}_k$ 和 $\boldsymbol{R}_k$ 为待自适应辨识的噪声参数。

文献[14]提出了一种自适应滤波算法，它在进行状态估计的同时还可以通过量测输出在线实时地估计系统的噪声参数。但笔者认为要同时对所有的噪声参数进行自适应估计一般是不可能的。实际上，系统噪声均值 $\boldsymbol{q}_k$ 和量测噪声均值 $\boldsymbol{r}_k$ 都可以增广等效为待估计的系统状态，通过可观测性分析判断能否进行自适应估计，如果不可观，则进行自适应滤波处理必然是无效的。因此，自适应滤波需要解决的主要问题是辨识系统噪声方差阵 $\boldsymbol{Q}_k$ 和量测噪声方差阵 $\boldsymbol{R}_k$。系统噪声属于系统的固有特性，一般不易发生改变，即使有些变化，通常只要设置大致准确即可，相差 3～5 倍往往也不会对滤波估计结果造成太大的影响。在实际滤波应用中，微小的精度提高是次要的，系统工作的稳定性和可靠性才是更重要的，因而一般没必要对系统噪声作自适应处理。量测噪声主要由外部因素引起，容易发生变化且有可能变化较大，有必要采用自适应滤波处理，因而量测噪声方差阵 $\boldsymbol{R}_k$ 自适应滤波算法是实际中最常用的方法，其算法可表示为

$$\hat{\boldsymbol{R}}_k = (1-\beta_k)\hat{\boldsymbol{R}}_{k-1} + \beta_k(\hat{\boldsymbol{Z}}_{k/k-1}\hat{\boldsymbol{Z}}_{k/k-1}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}) \tag{18}$$

$$\beta_k = \frac{\beta_{k-1}}{\beta_{k-1}+b} \tag{19}$$

式中，b 为渐消因子，其取值范围通常为 0.9～0.999，取值越小则自适应能力越强，但引起状态估计波动也可能越大；$\hat{\boldsymbol{Z}}_{k/k-1} = \boldsymbol{Z}_k - \boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}$ 为 Kalman 滤波新息。

与标准 Kalman 滤波算法不同，在自适应滤波中除增益计算回路影响滤波计算回路外，式(18)还显示滤波计算回路的 $\boldsymbol{Z}_k$ 亦对增益计算回路的 $\hat{\boldsymbol{R}}_k$ 造成了影响，因而自适应滤波的滤波计算回路不再是简单线性的，其滤波实质上是一个异常复杂的非线性系统。理论上要进行自适应滤波的可观测性或稳定性等分析是非常困难的，实际使用中应尽量减少自适应参数的数目，以保证滤波的稳定可靠性。提高 $\hat{\boldsymbol{R}}_k$ 在自适应过程中可靠性的一种简单而有效的措施，是采用序贯滤波处理并对 $\hat{\boldsymbol{R}}_k$ 的每一个对角线分量设置上下边界限制，强制使其始终保持在合理的范围内。

Kalman 滤波的噪声自适应效果与随机系统的可观测性密切相关。对于可观测性很强的系统，对部分噪声进行自适应处理是有可能实现的；但如果系统可观测性本就比较弱，还要进行噪声自适应就有可能比较困难了。在惯导/卫导组合导航中，根

据位置或速度量测，要滤波估计陀螺漂移，特别是高精度的方位陀螺漂移，往往需要比较长的时间才会有估计效果，因此针对陀螺噪声的自适应处理基本上是不可行的。

强跟踪滤波也可以看作是一种自适应滤波方法，文献[15]给出了强跟踪滤波的理想特性：1）较强的关于模型参数失配的鲁棒性；2）较低的关于噪声及初值统计特性的敏感性；3）极强的关于突变状态的跟踪能力，并在滤波器达到稳态时仍保持这种能力；4）适中的计算复杂性。然而笔者认为强跟踪滤波存在理想是很理想的，但现实是很现实的问题，其在线自适应调整 Kalman 滤波增益使得输出残差序列正交的目标是完美的，但在实际应用中具体操作方法却是很难实现的，特别对于高维数的系统而言。此外，在强跟踪滤波中并没有考虑量测异常的影响，如果量测出现异常，则迫使状态跟随异常量测变化的思路是极不合适的。

在强跟踪滤波中，渐消因子的选取有单重和多重之分。单重渐消因子将所有量测和状态作为整体处理，使得所有状态总体上跟随量测的变化，即使没有突变的状态也会受到不良量测的影响。多重渐消因子考虑了不同状态之间的突变差异，分别分配以不同的比例系数，越不易变化的状态比例系数越接近 1，越易变的越大于 1，但多重渐消因子依然跟随量测的整体变化。为了更加细致地区分不同量测的影响，笔者曾提出了基于序贯滤波的多重渐消自适应滤波方法[1]。在强跟踪滤波中，若选取较少的渐消因子则求解简单，但也存在明显的缺陷；若渐消因子多，虽适应性强，但设计复杂，特别对于高维系统，要设计出合适的渐消因子参数矩阵是非常困难的，这是强跟踪滤波的一大弊端或不实用之处。针对强跟踪滤波的有效性验证，研究控制方面的文献选取的例子通常是比较简单的低维系统，可能容易产生效果[16]；但对于研究组合导航方面的高维例子，很多论文中展示的效果是读者难以复现的[17]，从而导致论文研究很多，实际应用却几乎没有。

组合导航强跟踪滤波性能与量测故障检测需求之间是相互矛盾的。强跟踪往往要求系统状态估计快速跟踪量测的变化，但量测快速变化有时是由故障引起的，虽然巨大变化的野值型故障容易被检测并被隔离掉，但稍微偏离正常值的量测就会让强跟踪滤波与故障检测算法无法同时满足，过分强调强跟踪性能必然损失故障检测能力，有引入错误的风险；而过分强调故障检测能力就会损失强跟踪性能。在实际应用中，总是以系统可靠性为首位的，状态一般不会发生突变，例如以高精度惯导的陀螺漂移估计为例，陀螺漂移对系统的影响微小，其估计过程必然是一个漫长的累积过程，不可能在短时间的量测突变中完成状态估计，如果因突变而产生错误的估计反而会对系统造成更大的负面影响。

8　联邦滤波问题

标准 Kalman 滤波的计算量与状态维数的三次方成正比，计算量因状态维数增加而急剧变大。一个复杂的大系统往往包含众多的状态变量，但大系统通常可以分解成若干子系统，并且在子系统中可能还存在一个关键的公共参考系统。例如惯导/卫导/里程仪/气压高度表组合导航系统就是这样的一个典型系统，它以惯导系统为主要参考导航系统（假设无故障），其他三种导航子系统在正常工作时辅助惯导，以提高系统总体导航精度，当某一系统出现故障时将被监测和隔离，以免影响系统的总体性能。针对这类大系统，可以设计一个高维的综合滤波器，包含所有状态变量，再进行 Kalman 滤波，这一处理方式通常称为集中式滤波；也可以采取所谓的联邦滤波方法进行分散降阶处理，采用联邦滤波有利于降低各子系统的计算量，还便于各子系统的故障诊断和隔离，避免有故障的子系统影响整个滤波器，提高总体性能。

N. A. Carlson 提出的联邦滤波是一种两级滤波器[18]，其示意图参见图 1。联邦滤波器包含 1 个主滤波器、N 个子滤波器，以及主滤波器至子滤波器的反馈开关。N 个子滤波器的局部估计（$\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(ci)}$ 和 $\boldsymbol{P}_k^{(ci)}$）都送入主滤波器，跟主滤波器的估计（$\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(m)}$ 和 $\boldsymbol{P}_k^{(m)}$）一起进行最优融合以得到全局估计（$\hat{\boldsymbol{X}}_k^{g}$ 和 $\boldsymbol{P}_k^{g}$）。

根据联邦滤波的反馈与否以及信息分配系数 $\beta_i(i=1,2,\cdots,N,m)$ 的选取策略不同，滤波器具有不同的结构和特性：1）如果选择 $\beta_m=0$，则相当于主滤波器不进行滤波而只进行信息融合；2）如果去除图 1 中虚线连线部分的反馈功能，则各子滤波器独立工作，由于没有反馈重置的影响，所以系统具有较强的容错能力；3）如果选择 $\beta_m=\beta_i=1/\overline{N}$ 并进行反馈重置，即主滤波器与子滤波器平均分配信息，此时系统整体精度较高，但容错能力有所下降。

在联邦滤波中，如果所有子滤波器的状态均为

公共状态，则全局状态融合精度与集中滤波器精度相同，结果均是最优的，且最优性与信息分配系数 β_i 的选择无关。但是当某些滤波器存在私有状态时，联邦滤波的精度一般低于集中滤波，这时联邦滤波是一种次优滤波算法。

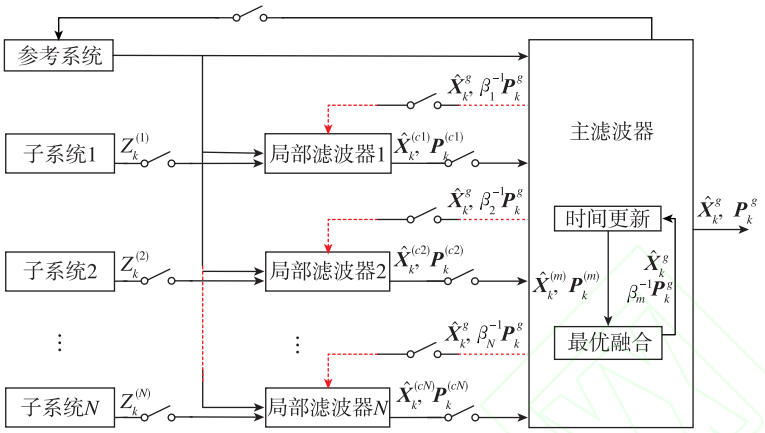


图 1 联邦滤波示意图

Fig. 1 Schematic diagram for federated Kalman filtering

Carlson 在提出联邦滤波时曾声称联邦滤波器已被美国空军的容错导航系统“公共卡尔曼滤波器”计划选为基本算法[19]，但从目前组合导航系统的发展情况看，历经 30 余年实践该算法并没有明显的优势，未获得广泛的实际应用。既然联邦滤波实际用途不大，那么针对信息分配系数的所谓最优性研究也就没什么意义了[20-21]。

针对目前常用的车载惯导/卫导/里程仪组合导航系统，或许是工程师们没有领悟到联邦滤波的精妙之处，据笔者所知并没有实际产品采用联邦滤波方案，而一般是采用三者的两两组合构成 3 个子组合导航系统，即惯导/卫导、航位推算/卫导和惯导/航位推算。在卫导信号有效时，惯导/卫导、航位推算/卫导组合工作，滤波估计惯导误差及里程仪与惯导之间的安装偏差角和里程仪刻度系数误差，以惯导或航位推算的输出作为系统输出，并没必要再将 2 个滤波器进行信息融合；在卫导信号短时间无效时，以纯惯导导航作为系统输出；在卫导信号较长时间无效时，惯导/航位推算工作，这时航位推算能够有效抑制惯导误差随时间发散，导航输出精度主要取决于航位推算精度。

9 非线性滤波问题

标准 Kalman 滤波仅适用于线性系统。对非线性系统作滤波估计，最常用和有效的方法是先进行泰勒级数展开，略去高阶项后近似为线性系统，再进行线性 Kalman 滤波。这种处理方法称为扩展 Kalman 滤波（Extended Kalman Filtering，EKF），或称推广 Kalman 滤波。如果对非线性系统作泰勒级数展开并保留二阶项，则称为二阶 Kalman 滤波。不像确定性系统的二阶泰勒展开比一阶展开精度高一阶，即前者误差为 O^3 而后者误差为 O^2，二阶滤波的精度并不明显比一阶 EKF 精度高，反而是对于高维系统而言，二阶滤波的计算量增加了许多，因此二阶滤波的性价比很低，并不实用。对于部分非线性系统，主要针对滤波时间更新过程，有时简单地采用降低更新周期的办法就能有效降低非线性的影响。

EKF 采用解析方法进行一、二阶矩概率统计特性的近似传播，当系统非线性函数的雅可比矩阵求解比较复杂时，研究者们提出了利用采样点进行概率传播的滤波方法，例如采用确定性采样策略的无迹 Kalman 滤波（Unscented Kalman Filter，UKF）、中心差分 Kalman 滤波（Central Difference Kalman Filter，CDKF），以及基于随机采样策略的粒子滤波（Particle Filter，PF）等[22]。对于高维系统而言，粒子滤波计算量巨大，目前还难以在嵌入式导航计算机中应用；UKF 和 CDKF 也鲜有实际应用的实例报道。在研究和解决传统惯导/卫导组合导航问题时，为了引出非线性滤波而评价 EKF 因模型非线性或模型不准确会引起滤波发散，多数是存在夸张成分，或者没用好基础的 EKF。

惯导系统的姿态(可用欧拉角、四元数或姿态阵表示)、速度和位置等导航参数满足如下非线性微分方程组

$$\dot{\boldsymbol{C}}_b^n = \boldsymbol{C}_b^n(\boldsymbol{\omega}_{nb}^b \times) \tag{20}$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n = \boldsymbol{C}_b^n \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{g}^n \tag{21}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{M}_{pv} \boldsymbol{v}^n \tag{22}$$

式中,各符号含义详见文献[1]。如果直接对上述导航参数状态作组合导航 Kalman 滤波估计,则称为直接滤波方法。直接滤波法并没有太大的优势,因为导航参数方程组始终是非线性的[23]。一般应建立如式(8)所示的导航参数误差方程,误差方程具有良好的线性特性,可以直接使用线性 Kalman 滤波估计。相对于直接滤波而言,利用误差方程进行组合导航 Kalman 滤波估计的处理方法称为间接滤波,在估计出导航误差参数之后,对计算导航参数进行校正便可获得准确的导航结果。在间接滤波中,对于惯性级惯导系统,失准角通常为角分量级、速度误差为 1m/s 量级、水平定位误差为 1km 量级,即使是低精度惯导系统,失准角误差最大为度量级,在短时间内(数十秒甚至几分钟)也可以将误差传播视为线性的。

基于速度误差或位置误差量测的惯导/卫导组合导航,速度和位置误差都容易保持为小量,且在 3 个失准角误差中由于天向重力的耦合作用,2 个水平失准角的可观测性都很强,它们在很短时间内便可获得估计并校正使之成为小量,因而只有大方位失准角的非线性建模和滤波具有一定的必要性和实用价值。当失准角较大时,采用非线性建模和滤波方法,例如 UKF 或 CDKF,即使滤波估计是二阶精确的,但三阶或更高阶误差总是被忽略的,换句话说,不论采取什么样的非线性滤波方法,虽说比线性 Kalman 滤波精度更高,但总是存在高阶截断误差。特别是在大失准角的情况下,如果仅仅采用输出校正方式将难以实现状态的最优估计。对于非线性滤波应用,为了提高估计精度,在滤波估计过程中宜采用状态反馈校正措施,使失准角逐渐减小,使误差传播转变为线性传播。在线性模型条件下,非线性滤波方法与线性 Kalman 滤波相比没有任何优势,反而是非线性方法的计算量通常更大。因此,在大失准角情况下使用非线性滤波的主要目的在于迅速估计出粗略的失准角,可以不将惯性传感器误差列入滤波模型以降低维数,滤波过程中当失准角降低至比较小时,从大失准角非线性滤波方式转到小失准角线性 Kalman 滤波方式会更加有效,降低计算量的同时还能达到最优滤波估计精度[24]。在实际应用中,绝大部分非线性组合导航问题都可以转化为线性方法解决,且线性滤波方法更加稳定可靠。当然,在某些对时间要求比较苛刻的初始对准中,如果采用非线性粗对准+线性精对准两段式对准的滤波时间太长,可以改用数据存储与逆向导航技术,有利于缩短对准时间和提高对准精度[25]。

10　可观测度分析问题

在现代控制理论中,确定性系统的可观测性是指由一段量测输出确定系统状态的能力,它属于定性的描述,对于某一状态或状态组合,要么可观测要么不可观测。定常系统的可观测性分析,可以使用可观测性矩阵进行判断,方法简单;但是时变系统的可观测性分析通常比较复杂,难以简单而有效地给出结论。

在 Kalman 滤波理论中,随机系统的可观测性概念与确定性系统略有区别,前者表示从一段量测中获得系统状态的无偏估计的能力。如果量测噪声阵正定,随机系统的可观测性与相应确定性系统的可观测性结论恰好一致。对于随机系统,仅仅进行定性的可观测性分析是不够的,显然,不可观测的状态分量肯定不会有滤波估计效果。但对于可观测的状态分量,即便获得了该状态的无偏估计(一阶矩),然而其均方误差(二阶矩)还是存在大小差异的,均方误差可以看作是 Kalman 滤波估计精度的定量描述,它随时间的变化正体现了滤波器的收敛速度。

状态估计的初值 $\hat{\boldsymbol{X}}_0$ 一般是不能准确知道的,而只能根据经验粗略设定;初始均方误差阵 $\boldsymbol{P}_0$ 反映的是状态初值的估计误差,原则上 $\hat{\boldsymbol{X}}_0$ 设置得越粗略则 $\boldsymbol{P}_0$ 应当设置得越大。Kalman 滤波的目的在于给出状态的估值,误差越小越好,随着滤波的不断推进,均方误差阵 $\boldsymbol{P}_k$ 往往会慢慢变小。为了评判滤波器的精度和收敛速度,需选取一个参考值,通常选为初值 $\boldsymbol{P}_0$ 且将其设置为较大的值,这也符合状态初值不太准确的事实,之后随着滤波进展 $\boldsymbol{P}_k$ 不断变小,便显示出了滤波的效果。如果随机系统建模准确,Kalman 滤波均方误差阵 $\boldsymbol{P}_k$ 反映了各状态之间的协方差,其中对角线元素为对应状态分量估计的均方误差。因此,从 $\boldsymbol{P}_k$ 随时间的变化过程中可以看

出状态估计误差的变化情况，以及对角线元素的变化幅度，正好定量描述了对应状态分量估计效果的强弱程度，特别针对时变系统，$\boldsymbol{P}_k$ 的变化曲线还可用于分析系统时变参数对状态估计的影响，或有助于改进系统设计和运动激励方案。

针对系统状态向量中的每一个分量 $X_{k(j)}(j=1,2,\cdots,n)$，定义它的可观测度如下[26]

$$\sigma_{k(j)}=\sqrt{\frac{P_{0(jj)}}{P_{k(jj)}}} \tag{23}$$

由此可知，可观测度是针对某一状态分量在某一时刻而言的，其含义是某一状态分量的初始设置误差的标准差 $P_{0(jj)}$ 与同一状态分量在 k 时刻的滤波误差标准差 $P_{k(jj)}$ 的比值。可观测度为无因次量，在数值上越大，表明在经过一段时间 Kalman 滤波后，相应状态分量的估计误差下降程度越显著，或者说精度提升效果就越明显。根据经验，可人为设置如下阈值大致判断状态分量 $X_{k(j)}$ 的可观测度强弱

$$\begin{cases}\text{不可观测} & (\sigma_{k(j)}\leqslant 1)\\ \text{弱} & (1<\sigma_{k(j)}\leqslant 2)\\ \text{中等} & (2<\sigma_{k(j)}\leqslant 10)\\ \text{强} & (\sigma_{k(j)}>10)\end{cases} \tag{24}$$

如果绘制出可观测度 $\sigma_{k(j)}$ 相对于时间 k 的对数曲线 $k-\lg(\sigma_{k(j)})$，则能够直观地显示出状态估计的可观测度变化趋势。当然，如果直接给出各状态分量误差的标准差曲线 $k-\sqrt{P_{k(jj)}}$，也能够表示出状态估计误差的绝对大小变化情况。

对于时变随机系统的可观测度分析，文献中常讨论的方法有分段线性定常系统(Piece-Wise Constant Systems，PWCS)方法[27-28]，通过分析系统的提取可观测矩阵(Stripped Observability Matrix，SOM)的奇异值或条件数，判断系统状态的可观测度[29-32]。实际上，那些方法是存在本质缺陷的，它没有考虑到系统噪声的影响，相当于把系统当作确定性系统看待，举一特殊的随机定常系统例子，如下

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}X_{k,1}\\X_{k,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{k-1,1}\\X_{k-1,2}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}Z_{k,1}\\Z_{k,2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{k,1}\\X_{k,2}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}V_{k,1}\\V_{k,2}\end{bmatrix}\end{cases} \tag{25}$$

其中，量测噪声均值 $\mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k]=\boldsymbol{0}$，方差阵 $\mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{V}_j^{\mathrm{T}}]=\begin{bmatrix}1&0\\0&10^2\end{bmatrix}\delta_{kj}$。若按确定性系统计算可观测性矩阵有 $\boldsymbol{O}=\begin{bmatrix}1&0\\0&10\end{bmatrix}$，再进行奇异值分解判断，易得出状态分量 $X_{k,2}$ 的可观测度比 $X_{k,1}$ 更高的错误结论。实际上，与状态分量 $X_{k,1}$ 相比，$X_{k,2}$ 的量测噪声均方差与量测矩阵同时扩大了 10 倍，因而两状态分量的可观测度应当是完全一样的。这一简单例子也说明了，随机系统的可观测度分析必须考虑到噪声的影响。

文献[33]给出的基于 Kalman 滤波均方误差阵 $\boldsymbol{P}_k$ 的特征值和特征向量的可观测度分析方法才是非常合理的方法，它充分考虑了系统所有噪声的影响，不只是量测噪声 $\boldsymbol{R}_k$、还有系统噪声 $\boldsymbol{Q}_k$ 和状态先验噪声 $\boldsymbol{P}_0$ 都会对 $\boldsymbol{P}_k$ 产生影响。实际上，$\boldsymbol{P}_k$ 的对角线元素的平方根正好代表了各状态的滤波估计精度(均方误差大小)，这在 Kalman 滤波建模准确的情况下是必然成立的，如果实际应用时出现偏差，不应归咎于该分析方法不适用，而应重新审视建模是否准确。对于状态维数众多的系统，不同类型状态之间的物理含义是不同的，一般不能相互比较滤波估计精度，例如惯导/卫导组合的速度误差和定位误差之间，但同类误差之间是具有可比较性的，例如东向、北向和天向速度误差之间。若对均方误差阵 $\boldsymbol{P}_k$ 作特征值分解，特征向量往往表示一些状态的线性组合，它们不一定表示相同的物理量，因此通过比较特征值的大小来确定状态组合的可观测度，其物理意义不够明确。其实，最简单和最合适的方法就是直接选取 $\boldsymbol{P}_k$ 的对角线元素的平方根作为相应状态的可观测度，且同类物理量状态之间可直接进行比较。

最后指出，PWCS 可观测度分析方法宣称无需滤波就能获得系统状态的可观测度，计算量小。事实上 PWCS 方法是粗略的，惯导/卫导组合的可观测度与载体具体的运行轨迹(机动状况与持续时间长短)密切相关，PWCS 分段越少精度越差，有可能忽略了一些重要的运行细节，只有当 PWCS 分段时间无限短时(同于 Kalman 滤波时间更新周期)其结果才是精确的，与 Kalman 滤波均方误差阵分析方法一致(仅是不考虑噪声的情况下)，这时并不存在计算量上的优势。

11 均方误差阵边界限制问题

标准 Kalman 滤波是线性最小方差无偏估计，在系统建模准确的情况下，可以获得状态的最优估

计。但是,在实际系统中,模型或多或少存在一些偏差,随着滤波的推进,长时间后有些状态的均方误差会逐渐变小,特别是对于不受或少受系统噪声影响的状态,例如随机常值状态(陀螺随机常值漂移或加速度计常值偏值)。均方误差变得很小,理论上表示所对应状态的滤波精度很高,但实际上由于建模误差或干扰影响,该状态不可能达到相应的估计精度,从而出现了理论精度与实际精度之间的矛盾。这一现象在惯导/卫导组合的天向通道中表现得尤为明显,由于天向存在重力耦合的影响,使得天向加速度计随机常值偏值的可观测度很高,短时间内就会获得很好的滤波效果,均方误差阵对应元素将快速收敛变得很小,但是,如果建模不准确,例如加速度计零偏会随温度缓慢变化,则均方误差过度收敛后滤波器将难以再适应状态的缓慢变化,产生滤波估计偏差。

解决滤波器均方误差过度收敛的一种方法是采用虚拟噪声注入技术,即人为加大系统噪声,使得由于噪声的不断激励作用,状态估计均方误差不至于过度收敛得太小。但加大系统噪声后,可能带来的不利后果是,如果长时间得不到量测更新,状态估计均方误差将变得很大,这也与实际情况不符。防止均方误差过度收敛的另一种直接而有效的方法是[13],根据状态的实际物理含义或经验设置一定的均方误差下限边界 $\boldsymbol{P}_{\min}$ 限制(通常为对角阵),当滤波器量测更新均方误差阵 $\boldsymbol{P}_k$ 的对角线元素小于 $\boldsymbol{P}_{\min}$ 对应下限值时,人为直接强制将其取为下限值,可用伪代码表示为

```
for  i = 1,2,…,n
  if  P_k(i,i) < P_min(i,i)
    P_k(i,i) = P_min(i,i)
  end
end
```

这里一般不必考虑 $\boldsymbol{P}_k$ 非对角线元素的影响,总可保证 $\boldsymbol{P}_k$ 是对称正定的。当然,均方误差下界也不能设置得过大,否则会影响 Kalman 滤波估计精度,造成状态波动。

类似地,也可以采用均方误差阵上限限制措施,防止可能出现的滤波异常。只是上限边界限制不能再简单采用直接设置对角线元素的方法,因为这可能导致 $\boldsymbol{P}_k$ 不正定,而可采用如下方法

```
for  i = 1,2,…,n
  if  P_k(i,i) > P_max(i,i)
    s = sqrt(P_max(i,i)/P_k(i,i))
    for  j = 1,2,…,n
      P_k(i,j) = P_k(i,j) × s
      P_k(j,i) = P_k(j,i) × s
    end
  end
end
```

其中,$\boldsymbol{P}_{\max}$ 为人为设置的均方误差上限边界对角阵,上述伪代码式的含义是,当对角线均方误差 $\boldsymbol{P}_k(i,i)$ 超过上限 $\boldsymbol{P}_{\max}(i,i)$ 时,将 $\boldsymbol{P}_k$ 的第 i 行和第 i 列元素都同时缩小 s 倍,显然,也总能保证 $\boldsymbol{P}_k$ 是对称正定的。

12　结论与建议

标准 Kalman 滤波基本公式在理论上非常完美且不复杂,在随机系统建模理想准确的条件下,能够得到系统状态的最优估计,即线性最小方差无偏估计。但在实际组合导航应用中,系统建模或多或少存在误差,也就使得实际应用时不存在理想最优的前提条件,研究者和工程师们在关注滤波估计精度的同时,更应关注实际应用时的滤波稳定性和可靠性。

导航技术是一门工程实践性很强的技术。从技术传承和工程应用的角度看,特别在组合导航的非线性滤波、强跟踪滤波和联邦滤波等几个方面,建议热心的研究者们在发表论文时能给出仿真部分的数据和代码,供他人学习参考或改进,这样才更有利于促进群体理论研究水平的提升和成果转化。遗憾的是,目前许多论文的仿真结果是不可复现的,浪费了大量科研经费和读者的时间精力,迫使读者也即后继的研究者又提出了看似效果更好的不可复现的所谓新方法,如此不断反复,理论和仿真研究似乎非常完美深入,但却鲜有实际应用。

不妨将经典 Kalman 滤波与经典控制领域的比例-积分-微分(Proportianl-Integral-Derivative,PID)控制做个类比。现代控制理论虽然取得了很大的发展,解决了许多经典控制理论不能解决的问题,但经典 PID 控制仍然应用最为广泛,其原因在于:1)结构简单、鲁棒性和适应性好;2)大多数控制对象

使用常规 PID 即可满足实际需求;3)调节整定很少依赖于系统的具体模型;4)各种高级控制方法在应用上还不完善,难以被技术人员掌握。笔者认为上述描述也非常适合于传统 Kalman 滤波与许多高级滤波方法的对比。研究者们在提出和仿真新滤波方法时往往过分强调了新方法的优势,而忽略了传统 Kalman 滤波方法通过细节上的简单处理也可能实现同样的效果,例如采用系统状态反馈、状态估计均方误差阵(P)的方差限制或重置、系统噪声方差阵(Q)的虚拟建模、量测噪声方差阵(R)的自适应处理等措施。可以说,在许多场合仅需对 PQR 参数进行简单调整,就能应用好组合导航 Kalman 滤波技术,取得良好的估计效果。

致谢 感谢以下同行对论文初稿的审阅并提出宝贵的修改意见:付强文、翁浚、王茂松、张全、杨君、王文举、匿名评审专家。

参考文献

[1] 严恭敏,翁浚. 捷联惯导算法与组合导航原理[M]. 西安:西北工业大学出版社,2019: 92, 106-192.
Yan Gongmin, Weng Jun. Strapdown inertial navigation algorithm and integrated navigation principle[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2019: 92, 106-192(in Chinese).

[2] 秦永元,张洪钺,汪叔华. 卡尔曼滤波与组合导航原理(第 3 版)[M]. 西安: 西北工业大学出版社,2015: 1-4,45.
Qin Yongyuan, Zhang Hongyue, Wang Shuhua. Kalman filtering and integrated navigation principle(3rd Edition)[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2015:1-4,45(in Chinese).

[3] 罗建军. 组合导航原理及应用[M]. 西安: 西北工业大学出版社,2012: 26-30.
Luo Jianjun. Principles and applications of integrated navigation[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2012: 26-30(in Chinese).

[4] 王常虹, 窦赫暄, 陈晓东, 等. 无人平台 SLAM 技术研究进展[J]. 导航定位与授时, 2019,6(4):12-19.
Wang Changhong, Dou Hexuan, Chen Xiaodong, et al. Research progress in simultaneous localization and mapping for unmanned vehicles[J]. Navigation Positioning and Timing, 2019, 6(4):12-19(in Chinese).

[5] 高军强,汤霞清,张环,等. 基于因子图的车载 INS/GNSS/OD 组合导航算法[J]. 系统工程与电子技术, 2018,40(11):2547-2553.
Gao Junqiang, Tang Xiaqing, Zhang Huan, et al. Vehicle INS/GNSS/OD integrated navigation algorithm based on factor graph[J]. Systems Engineering and Electronics, 2018, 40 (11): 2547-2553 (in Chinese).

[6] 张涛,徐晓苏. 基于小波和人工智能技术的车辆无缝定位技术研究[J]. 控制与决策,2010,25(7): 1109-1112.
Zhang Tao, Xu Xiaosu. Research of seamless location technology for vehicle based on wavelet and AI technology[J]. Control and Decision, 2010,25(7): 1109-1112(in Chinese).

[7] 严恭敏. Kalman 滤波时间更新频率的选择[EB/OL]. [2014-04-07] [2020-01-18]. http://blog.sina.com.cn/s/blog_40edfdc90101l1ng.html.
Yan Gongmin. Kalman filter time update frequency selection[EB/OL]. [2014-04-07][2020-01-18]. http:// blog.sina.com.cn/s/blog_40edfdc90101l1ng.html(in Chinese).

[8] 严恭敏,李四海,秦永元. 惯性仪器测试与数据分析[M]. 北京: 国防工业出版社,2012:82-91.
Yan Gongmin, Li Sihai, Qin Yongyuan. Inertial instrument testing and data analysis[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2012: 82-91 (in Chinese).

[9] Nassar S, Schwarz K P, El-Sheimy N. INS and INS/GPS accuracy improvement using autoregressive(AR) modeling of INS sensor errors[C]// Procee-dings of Institute of Navigation National Technical Meeting, 2004.

[10] Han S, Wang J. Quantization and colored noises error modeling for inertial sensors for GPS/INS integration[J]. IEEE Sensors Journal, 2011, 11(6): 1493-1503.

[11] 董绪荣,陶大欣. 一个快速 Kalman 滤波方法及其在 GPS 动态数据处理中的应用[J]. 测绘学报,1997,26(3):221-227.
Dong Xurong, Tao Daxin. An efficient Kalman filtering algorithm and its application in kinematic GPS data processing[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1997, 26(3): 221-227(in Chinese).

[12] Zhu Q, Yan G, Yang P. A rapid computation method for Kalman filtering in vehicular SINS/GPS integrated system[J]. Applied Mechanics and Materials, 2012, 182-183: 541-545.

[13] 严恭敏. PSINS 开发板的核心算法技术[R]. 深圳,2018.
Yan Gongmin. Core algorithm technology of PSINS de-

velopment board[R]. Shenzhen, 2018(in Chinese).

[14] Sage A P, Husa G W. Adaptive filtering with unknown prior statistics[C]//Proceedings of Joint Automatic Control Conference. New York, USA: ASME, 1969: 760-769.

[15] 周东华，席裕庚，张钟俊．一种带多重次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波器[J]. 自动化学报，1991，17(6)：689-695.
Zhou Donghua, Xi Yugeng, Zhang Zhongjun. A suboptimal multiple fading extended Kalman filter[J]. Acta Automatica Sinica, 1991, 17(6): 689-695(in Chinese).

[16] 邓自立．自校正滤波理论及其应用—现代时间序列分析方法[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2003：161-192.
Deng Zili. Self-tuning filtering theory and its application-modern time series analysis method[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2003: 161-192(in Chinese).

[17] 吴富梅，杨元喜．一种两步自适应抗差 Kalman 滤波在 GPS/INS 组合导航中的应用[J]. 测绘学报，2010，39(5)：522-523.
Wu Fumei, Yang Yuanxi. A new two-step adaptive robust Kalman filtering in GPS/INS integrated navigation system[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2010, 39(5): 522-523(in Chinese).

[18] Carlson N A. Federated square root filter for decentralized parallel processors[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1990, 26(3): 517-525.

[19] Loomis P V W, Carlson N A, Berarducci M P. Common Kalman filter: fault-tolerant navigation for next generation aircraft[C]// Proceedings of the 1988 National Technical Meeting of the Institute of Navigation. Santa Barbara, CA, 1988: 38-45.

[20] 顾启泰，王颂．联邦滤波器的最优性[J]. 清华大学学报(自然科学版)，2003，43(11)：1460-1463.
Gu Qitai, Wang Song. Optimized federated filter[J]. Journal of Tsinghua University(Sci&Tech), 2003, 43(11): 1460-1463(in Chinese).

[21] 邱恺，吴训忠，张宗麟，等．全局最优联邦滤波器信息分配原则[J]. 控制理论与应用，2007，24(1)：39-45.
Qiu Kai, Wu Xunzhong, Zhang Zonglin, et al. Information-sharing scheme for federated filter with optimality[J]. Control Theory & Applications, 2007, 24(1): 39-45(in Chinese).

[22] 赵琳，王小旭，丁继成．组合导航系统非线性滤波算法综述[J]. 中国惯性技术学报，2009，17(1)：46-54.
Zhao Lin, Wang Xiaoxu, Ding Jicheng. Overview of nonlinear filter methods applied in integrated navigation system[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2009, 17(1): 46-54(in Chinese).

[23] 杨鹏翔，秦永元，周琪，等．基于欧拉角微分模型的捷联惯导直接非线性对准方法[J]. 传感技术学报，2011，24(3)：386-391.
Yang Pengxiang, Qin Yongyuan, Zhou Qi, et al. SINS direct nonlinear alignment algorithm based on Euler angle differential model[J]. Chinese Journal of Sensors and Actuators, 2011, 24(3): 386-391(in Chinese).

[24] 严恭敏，严卫生，徐德民．简化 UKF 滤波在 SINS 大失准角初始对准中的应用[J]. 中国惯性技术学报，2008，16(3)：253-264.
Yan Gongmin, Yan Weisheng, Xu Demin. Application of simplified UKF in SINS initial alignment for large misalignment angles[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2008, 16(3): 253-264(in Chinese).

[25] 严恭敏，严卫生，徐德民．逆向导航算法及其在捷联罗经动基座初始对准中的应用[C]// 第 27 届中国控制会议，2008：724-729.
Yan Gongmin, Yan Weisheng, Xu Demin. On reverse navigation algorithm and its application to SINS gyro-compass in-movement alignment[C]// Proceedings of the 27th Chinese Control Conference, 2008: 724-729(in Chinese).

[26] Yan G M, Yang X K, Su X J, et al. Error distribution method and analysis of observa-bility degree based on the covariances in Kalman filter[C]// Proceedings of the 37th Chinese Control Conference, 2018: 4900-4905.

[27] Goshen-Meskin D, Bar-Itzhack I Y. Observability analysis of piece-wise constant systems, part I: theory[J]. IEEE Transactions Aerospace and Electronic Systems, 1991, 28(4): 1056-1067.

[28] Goshen-Meskin D, Bar-Itzhack I Y. Observability analysis of piece-wise constant systems, part II: application to inertial navigation in-flight alignment[J]. IEEE Transactions Aerospace and Electronic Systems, 1991, 28(4): 1068-1075.

[29] 程向红，万德钧，仲巡．捷联惯导系统的可观测性和可观测度研究[J]. 东南大学学报，1997，27(6)：6-11.
Cheng Xianghong, Wan Dejun, Zhong Xun. Study on

observability and its degree of strapdown inertial navigation system[J]. Uournal of Southeast University, 1997, 27(6): 6-11(in Chinese).

[30] 万德钧，房建成．惯性导航系统初始对准[M]．南京：东南大学出版社，1998:83-109.
Wan Dejun, Fang Jiancheng. Initial alignment of inertial navigation system[M]. Nanjing: Southeast University Press, 1998:83-109(in Chinese).

[31] 冯绍军，袁信．观测度及其在卡尔曼滤波器设计中的应用[J]．中国惯性技术学报，1999，7(2)：18-21.
Feng Shaojun, Yuan Xin. Observatility and its application in Kalman filter design[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 1999, 7(2): 18-21(in Chinese).

[32] 宁晓琳，房建成．航天器自主天文导航系统的可观测性及可观测度分析[J]．北京航空航天大学学报，2005，31(6)：673-677.
Ning Xiaolin, Fang Jiancheng. Analysis of observability and the degree of observability in autonomous celestial navigation[J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2005, 31(6): 673-677(in Chinese).

[33] Ham F M, Brown R G. Observability, eigenvalues and Kalman filtering [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1983, 19(2): 269-273.

文章编号：1005-6734(2020)02-0141-06 doi.10.13695/j.cnki.12-1222/o3.2020.02.001

纬度未知条件下的抗扰动惯性系初始对准改进方法

严恭敏[1,3]，李思锦[1]，高文劭[2]，李 津[3]，任建新[1,3]
（1. 西北工业大学自动化学院，西安 710072; 2. 北京机械设备研究所，北京 100854;
3. 电子信息控制重点实验室，成都 610036）

摘要：基于捷联惯导系统（SINS）的惯性系初始对准原理，推导了在纬度未知条件下同时进行纬度估计和进行初始对准递推计算的改进算法。利用奇异值分解（SVD）求解最优单位正交矩阵，根据最优矩阵的行列式值确定纬度正负符号和确定右手姿态阵。分析并给出了纬度估计误差公式和初始对准失准角误差公式。对南北纬度下的未知纬度初始对准进行了仿真验证，结果表明改进算法能够获得正确的纬度估计值和实现精确的姿态初始对准，它们的误差特性均与理论推导的误差规律相符。

关 键 词：捷联惯导系统；姿态初始对准；纬度估计；误差分析
中图分类号：V249.3 **文献标志码：**A

An improvement for SINS anti-rocking alignment under geographic latitude uncertainty

YAN Gongmin[1,3], LI Sijin[1], GAO Wenshao[2], LI Jin[3], REN Jianxin[1,3]
(1. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. Beijing Machine and Equipment Institute, Beijing 100854, China;
3. Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, Chengdu 610036, China)

Abstract: Using the so-called inertial-frame based initial alignment principle for strapdown inertial navigation system (SINS), an improved algorithm for the recursive calculation of simultaneous latitude estimation and initial alignment is presented under the geographic latitude uncertainty. The singular value decomposition (SVD) method is used to solve and obtain the optimal unit orthogonal matrix, and the positive-negative sign of the actual latitude and the right hand property of the attitude matrix are determined by the optimal matrix determinant. Moreover, the latitude estimation error formula and the misalignment angle error formula for initial alignment are also analyzed and presented. Finally, initial alignment tests with latitude uncertainty are simulated and verified. The simulation results show that the proposed algorithm can obtain correct latitude estimation and get accurate initial alignment attitude, and the error characteristics are in good consistence with those in the theoretical analyses.

Keywords: strapdown inertial navigation system(SINS); initial alignment attitude; latitude estimation; error analysis

传统的惯导系统初始对准法一般是在惯导所处地理位置（主要是指纬度）准确已知的条件下进行的，然而在某些特殊的环境中，比如水下、深山密林里、隧道深处或者载机停放在机库内不能接收到卫星定位信号时，也会有初始对准的需求，因此，在纬度未知的条件下进行初始对准研究具有一定的理论意义和应用价值[1-3]。此外，如果惯导系统在初始对准过程中能够同时给出纬度估计值，就可以对装订的纬度信息进行比对判断，从而使惯导具备一定的输入粗差告警或容错能力。文献[1]首先提出了纬度未知条件下的惯导初始对准问题，但是它只适用于静基座情形。基于惯性系的初始对准方法是近年来惯导算法研究的一个热点方向[4-7]，它具有很强的抗干扰能力。在晃动基座下，文献[2]利用重力矢量在惯性空间中随时间变

收稿日期：2020-01-02；**修回日期：**2020-04-24
基金项目：国家重点研发计划地球观测与导航专项基金（2017YFB0503001-2）
作者简介：严恭敏（1977—），男，博士，副教授，主要从事惯性导航与信息融合理论研究。E-mail：yangongmin@163.com

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

化的几何关系给出了纬度求解算法，值得指出的是，该文献及其随后的研究都只是注意到了纬度数值大小的确定，而均未给出纬度正负符号的确定方法[8-11]，所以它们只能适用于北半球正纬度地区，当然，这些方法将纬度确定和初始对准划分为两个独立的阶段，从而也存在对准时间较长的明显缺点。

本文同样采取惯性系初始对准方案，但在算法设计上将纬度对初始对准的影响单独分离出来，易于实现纬度未知条件下的相关参数递推更新。通过重力矢量在惯性系中随时间变化的几何关系求解纬度大小，采用奇异值分解(singular value decomposition, SVD) 方法求解最优单位正交阵，再根据最优矩阵的行列式值确定实际纬度的正负符号，从而使新的初始对准算法也适用于南半球负纬度地区。改进算法可同时兼顾纬度的正负确定和姿态阵的初始对准，显著缩短了初始对准时间。

1 惯性系初始对准算法

首先给出几种坐标系及其记号：地心惯性坐标系（ i 系），地球坐标系（ e 系），“东-北-天”地理坐标系（ n 系），“右-前-上”载体坐标系（ b 系），初始对准起始时刻地理惯性坐标系（ n_0 系），起始时刻载体惯性坐标系(b_0 系), 各坐标系的具体定义可参见文献[12]。其中，在初始对准的起始零时刻，n_0 系和 b_0 系分别与 n 系和 b 系重合，随后在整个对准过程中 n_0 系和 b_0 系均相对于惯性空间不转动，可见 n_0 系和 b_0 系之间的姿态变换阵 $\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0}$ 必为常值矩阵。

捷联惯导系统的比力方程为

$$\dot{\boldsymbol{v}}^n = \boldsymbol{C}_b^n \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \boldsymbol{v}^n + \boldsymbol{g}^n \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{v}^n$ 为惯导速度；$\boldsymbol{C}_b^n$ 为姿态矩阵；$\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b$ 为加速度计输出的比力；$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = [0 \quad \omega_{ie}\cos L \quad \omega_{ie}\sin L]^{\mathrm{T}}$ 为地球自转角速度，L 为惯导所处纬度，ω_{ie} 为地球自转角速率大小；$\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ 为惯导在地球表面上移动而引起的导航系旋转角速度；$\boldsymbol{g}^n = [0 \quad 0 \quad -g]^{\mathrm{T}}$ 为重力矢量，g 为当地重力加速度大小。

在扰动基座下，惯导没有明显的线位置移动，近似有 $\dot{\boldsymbol{v}}^n \approx \boldsymbol{v}^n \approx \boldsymbol{0}$，则式(1)可简化为

$$\boldsymbol{C}_b^n \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b = -\boldsymbol{g}^n \tag{2}$$

根据矩阵链乘规则，对式(2)中的姿态阵作分解，有

$$\boldsymbol{C}_{n_0}^n \boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0} \boldsymbol{C}_b^{b_0} \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b = -\boldsymbol{g}^n \tag{3}$$

式(3)两边同时左乘 $\boldsymbol{C}_n^{n_0}$，可得

$$\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0} \boldsymbol{C}_b^{b_0} \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b = -\boldsymbol{C}_n^{n_0} \boldsymbol{g}^n \tag{4}$$

其中，$\boldsymbol{C}_b^{b_0}$ 可由惯导的陀螺输出 $\boldsymbol{\omega}_{b_0 b}^b = \boldsymbol{\omega}_{ib}^b$ 进行实时姿态跟踪，即 $\dot{\boldsymbol{C}}_b^{b_0} = \boldsymbol{C}_b^{b_0}(\boldsymbol{\omega}_{ib}^b \times)$；而 $\boldsymbol{C}_n^{n_0}$ 的计算与地球自转角速度 $\boldsymbol{\omega}_{n_0 n}^n = \boldsymbol{\omega}_{in}^n = \boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ 相关，有

$$\boldsymbol{C}_n^{n_0} = \mathrm{e}^{(t\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times)} = \begin{bmatrix} \cos\omega_{ie}t & -\sin\omega_{ie}t\sin L & \sin\omega_{ie}t\cos L \\ \sin\omega_{ie}t\sin L & 1-(1-\cos\omega_{ie}t)\sin^2 L & (1-\cos\omega_{ie}t)\sin L\cos L \\ -\sin\omega_{ie}t\cos L & (1-\cos\omega_{ie}t)\sin L\cos L & 1-(1-\cos\omega_{ie}t)\cos^2 L \end{bmatrix} \tag{5}$$

式(4)可简记为

$$\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0} \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{b_0} = -\boldsymbol{g}^{n_0} \tag{6}$$

其中，分别记

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{b_0} = \boldsymbol{C}_b^{b_0} \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^b \tag{7}$$

$$\boldsymbol{g}^{n_0} = \boldsymbol{C}_n^{n_0} \boldsymbol{g}^n = -g \begin{bmatrix} \sin\omega_{ie}t\cos L \\ (1-\cos\omega_{ie}t)\sin L\cos L \\ 1-(1-\cos\omega_{ie}t)\cos^2 L \end{bmatrix} = -g \left(\begin{bmatrix} \cos L & 0 & 0 \\ 0 & \sin L\cos L & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 L \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sin\omega_{ie}t \\ (1-\cos\omega_{ie}t) \\ -(1-\cos\omega_{ie}t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \triangleq -g(\boldsymbol{G}\boldsymbol{W}_t + \boldsymbol{Z}) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{G} = \mathrm{diag}\left(\cos L \quad \sin L\cos L \quad \cos^2 L\right) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{W}_t = \left[\sin\omega_{ie}t \quad (1-\cos\omega_{ie}t) \quad -(1-\cos\omega_{ie}t)\right]^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{Z} = \left[0 \quad 0 \quad 1\right]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

将式(8)代入式(6)，可得

$$\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0} \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{b_0} = g\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{W}_t + \boldsymbol{Z}\right) \tag{12}$$

在初始对准过程中的 t_k（ $k = 1, 2 \cdots N$ ）时刻，若将 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{b_0}$ 和 $\boldsymbol{W}_t$ 的计算值分别记为 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},k}^{b_0}$ 和 $\boldsymbol{W}_k$，则由式(12)可得

$$\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0} \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},k}^{b_0} = g\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{W}_k + \boldsymbol{Z}\right) \tag{13}$$

利用向量 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},k}^{b_0}$ 和 $\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{W}_k + \boldsymbol{Z}\right)$ 构造如下三阶矩阵

$$\boldsymbol{A}_k = \sum_{i=1}^{k} \left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{W}_i + \boldsymbol{Z}\right)\left(\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},i}^{b_0}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{G}\sum_{i=1}^{k} \boldsymbol{W}_i \left(\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},i}^{b_0}\right)^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Z}\sum_{i=1}^{k} \left(\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},i}^{b_0}\right)^{\mathrm{T}} \triangleq \boldsymbol{G}\boldsymbol{M}_k + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{F}_k \tag{14}$$

易知，式(14)右端的三阶矩阵 $\boldsymbol{M}_k$ 和三维向量 $\boldsymbol{F}_k$ 分别存在如下递推关系

$$\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{M}_{k-1} + \boldsymbol{W}_k \left(\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},k}^{b_0}\right)^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

$$\boldsymbol{F}_k = \boldsymbol{F}_{k-1} + \left(\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},k}^{b_0}\right)^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

且递推初值分别为 $\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{F}_0 = \boldsymbol{0}$。显然，$\boldsymbol{G}$ 为仅与纬度有关的常值矩阵，$\boldsymbol{Z}\boldsymbol{F}_k$ 中仅有第三行元素是非零的。

在式(15)(16)中，$\boldsymbol{M}_k$ 和 $\boldsymbol{F}_k$ 均与纬度 L 无关，即使纬度未知也可以实现 $\boldsymbol{M}_k$ 和 $\boldsymbol{F}_k$ 的递推计算，而当获得纬度 L 之后，便可由式(14)直接计算矩阵 $\boldsymbol{A}_k$。

在初始对准完成时刻 t_N，设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}_N$ 的奇异

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

值分解为

$$\boldsymbol{A}_N = \boldsymbol{U}_N \boldsymbol{\Sigma}_N \boldsymbol{V}_N^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

根据多矢量定姿原理（Wahba 问题的求解原理），满足式(13)的最优姿态阵 $\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0}$ 的解为[13]

$$\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0} = \boldsymbol{U}_N \boldsymbol{V}_N^{\mathrm{T}} \tag{18}$$

不难看出，姿态阵的优化求解与当地重力大小 g 无关。

2　纬度确定

2.1　纬度大小计算

如图 1 所示，点 O 为惯导所处位置的纬圈中心，P_i（P_j）为惯导初始对准过程中的 t_i（t_j）时刻在惯性坐标系中的位置，Q 为重力加速度垂线 $\boldsymbol{g}_i^{n_0}$（$\boldsymbol{g}_j^{n_0}$）与地轴的交点（注意不是地心，除非惯导在赤道上），点 Q 所在的纬圈与重力垂线的夹角 L 即为纬度。

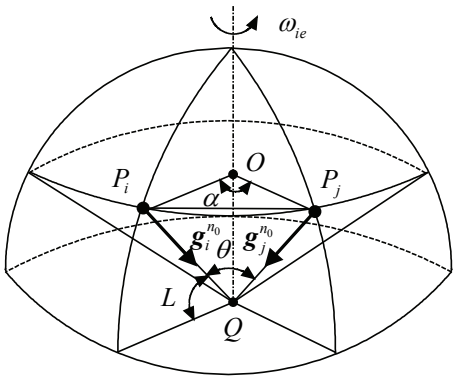


图 1　纬度确定几何示意图

Fig.1　Geometric diagram for latitude determination

由图 1 可得如下几何线段长度之间的关系

$$\left|P_iP_j\right| = 2\left|P_iO\right|\sin(\alpha/2) \tag{19}$$

$$\left|P_iP_j\right| = 2\left|P_iQ\right|\sin(\theta/2) \tag{20}$$

$$\left|P_iO\right| = \left|P_iQ\right|\cos L \tag{21}$$

此外还可得以下两个角度关系

$$\alpha = \omega_{ie}(t_j - t_i) \tag{22}$$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{g}_i^{n_0}\cdot\boldsymbol{g}_j^{n_0}}{\left\|\boldsymbol{g}_i^{n_0}\right\|\left\|\boldsymbol{g}_j^{n_0}\right\|} = \frac{(\boldsymbol{g}_i^{n_0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_j^{n_0}}{\left\|\boldsymbol{g}_i^{n_0}\right\|\left\|\boldsymbol{g}_j^{n_0}\right\|} \tag{23}$$

根据式(19)~(21)，可求解得

$$\cos L = \frac{\sin(\theta/2)}{\sin(\alpha/2)} \tag{24}$$

需要说明的是，为确保 α 和 θ 之间角度关系正确对应，须确保 $t_j - t_i < 12$ h，这对实际的数分钟至多数十分钟的初始对准应用而言总是可以满足的。

将式(6)代入式(23)，可得

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},i}^{b_0})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},j}^{b_0})}{\left\|\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},i}^{b_0}\right\|\left\|\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},j}^{b_0}\right\|} = \frac{(\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},i}^{b_0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},j}^{b_0}}{\left\|\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},i}^{b_0}\right\|\left\|\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},j}^{b_0}\right\|} \tag{25}$$

为了降低实际惯导比力测量噪声和基座干扰运动的影响，一般采用一段时间 Δt 内的比力均值（或积分）进行平滑之后再计算夹角，可得

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{v}_i^{b_0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j^{b_0}}{\left\|\boldsymbol{v}_i^{b_0}\right\|\left\|\boldsymbol{v}_j^{b_0}\right\|} \tag{26}$$

其中

$$\boldsymbol{v}_m^{b_0} = \int_{t_m-\Delta t/2}^{t_m+\Delta t/2} \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{b_0}\,\mathrm{d}t \quad (m = i, j) \tag{27}$$

通常取 $(t_i - \Delta t/2)$ 为初始对准的起始时刻，取 $(t_j + \Delta t/2)$ 为对准的结束时刻，而 Δt 取 10 s 量级即可。为了权衡平滑效果和夹角 θ 大小往往取 $\Delta t = t_j - t_i$，也就是 t_i 和 t_j 分别对应于总初始对准时间 t_N 的 1/4 和 3/4 时刻。

综合式(22)(24)(26)，可得纬度计算公式

$$L^{+} = \arccos\left[\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{(\boldsymbol{v}_i^{b_0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_j^{b_0}}{\left\|\boldsymbol{v}_i^{b_0}\right\|\left\|\boldsymbol{v}_j^{b_0}\right\|}\right)\Big/\sin\left(\frac{\omega_{ie}(t_j - t_i)}{2}\right)\right] \tag{28}$$

值得特别注意的是，式(28)只能计算得到正的纬度值，因而这里 L 的右上标使用了记号“$^{+}$”。后面将介绍纬度正负符号的确定方法。

2.2　纬度符号确定

如果实际纬度为负值（L 的右上标使用记号“$^{-}$”），则对于式(9)，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G} &= \mathrm{diag}\left(\cos L^{-} \quad \sin L^{-}\cos L^{-} \quad \cos^2 L^{-}\right) = \\ &\quad \mathrm{diag}\left(1 \quad -1 \quad 1\right)\times \\ &\quad \mathrm{diag}\left(\cos L^{+} \quad \sin L^{+}\cos L^{+} \quad \cos^2 L^{+}\right) \triangleq \boldsymbol{N}\boldsymbol{G}^{+}\end{aligned} \tag{29}$$

显然，可以将对角阵 $\boldsymbol{N}$ 看作是将其右边矩阵的第二行取反的一个算子。

参考式(14)，$\boldsymbol{A}_N$ 总可使用正纬度表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_N &= \boldsymbol{G}\boldsymbol{M}_N + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{F}_N = \boldsymbol{N}\boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{M}_N + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{F}_N = \\ &\quad \boldsymbol{N}(\boldsymbol{G}^{+}\boldsymbol{M}_N + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{F}_N) \triangleq \boldsymbol{N}\boldsymbol{A}_N^{+}\end{aligned} \tag{30}$$

考虑到 $\boldsymbol{A}_N$ 的奇异值分解

$$\boldsymbol{A}_N = \boldsymbol{U}_N\boldsymbol{\Sigma}_N\boldsymbol{V}_N^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{U}_N^{+}\boldsymbol{\Sigma}_N\boldsymbol{V}_N^{\mathrm{T}} \tag{31}$$

其中，记 $\boldsymbol{U}_N = \boldsymbol{N}\boldsymbol{U}_N^{+}$，即有 $\boldsymbol{U}_N^{+} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{U}_N$。比较式(30)(31)，易知有式(32)成立。

$$\boldsymbol{A}_N^{+} = \boldsymbol{U}_N^{+}\boldsymbol{\Sigma}_N\boldsymbol{V}_N^{\mathrm{T}} \tag{32}$$

因此，针对正纬度计算的 $\boldsymbol{A}_N^{+}$ 的最优单位正交阵 $(\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0})^{+}$ 为

$$(\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0})^{+} = \boldsymbol{U}_N^{+}\boldsymbol{V}_N^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{U}_N\boldsymbol{V}_N^{\mathrm{T}} \tag{33}$$

显然，有

$$\det[(\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0})^{+}] = \det(\boldsymbol{N})\det(\boldsymbol{U}_N\boldsymbol{V}_N^{\mathrm{T}}) = \det(\boldsymbol{N})\det(\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0}) = -1,$$

这说明如果实际纬度为负，则使用正纬度计算的 $\boldsymbol{A}_N^{+}$ 的最优阵 $(\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0})^{+}$ 将为左手坐标变换阵。这时，只需简单地将式(33)两边同时左乘 $\boldsymbol{N}$，即可得正确的负纬度优化阵

$$\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0} = \boldsymbol{N}(\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0})^{+} = \boldsymbol{U}_N\boldsymbol{V}_N^{\mathrm{T}} \tag{34}$$

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

事实上，不论实际纬度值正负，均可暂先计算与 $\boldsymbol{A}_k^+ = \boldsymbol{G}^+\boldsymbol{M}_k + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{F}_k$ 对应的最优单位正交矩阵，记为 $\tilde{\boldsymbol{C}}_{b_0}^{n_0}$；再计算式(35)（等价于计算单位正交阵的行列式）

$$s = (\tilde{\boldsymbol{C}}_{b_0(3,:)}^{n_0} \times \tilde{\boldsymbol{C}}_{b_0(1,:)}^{n_0})(\tilde{\boldsymbol{C}}_{b_0(2,:)}^{n_0})^{\mathrm{T}} \tag{35}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{C}}_{b_0(i,:)}^{n_0}$ 表示矩阵 $\tilde{\boldsymbol{C}}_{b_0}^{n_0}$ 的第 $i(i=1,2,3)$ 行向量。由于 $\tilde{\boldsymbol{C}}_{b_0}^{n_0}$ 是单位正交阵，因而 s 只能取值+1 或 −1，当 $s=+1$ 时，$\tilde{\boldsymbol{C}}_{b_0}^{n_0}$ 即为正确的右手姿态阵；而当 $s=-1$ 时，表明 $\tilde{\boldsymbol{C}}_{b_0}^{n_0}$ 是左手矩阵，需将其第二行取反，并且式(28)所计算的纬度应当取负值。综上可得

$$\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0} = \mathrm{diag}(1 \quad s \quad 1)\tilde{\boldsymbol{C}}_{b_0}^{n_0} \tag{36}$$

$$L = sL^+ \tag{37}$$

至此，完成了姿态阵和纬度的正负确定。

3 误差分析

3.1 纬度误差分析

在式(25)中，当 t_i 和 t_j 分别取初始对准的起始时刻和结束时刻，即当 $t_i = t_0$ 和 $t_j = t_N$ 时，有

$$\cos\theta = \frac{(\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},0}^{b_0})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},N}^{b_0})}{\left|\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},0}^{b_0}\right|\left|\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},N}^{b_0}\right|} = \frac{(\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},0}^{n_0})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{n_0}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},N}^{n}}{\left|\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},0}^{n_0}\right|\left|\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},N}^{n}\right|} \tag{38}$$

若不考虑基座晃动和惯导测量误差，有理想比力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},0}^{n_0} = \boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},N}^{n} = [0 \quad 0 \quad g]^{\mathrm{T}}$，将其与式(5)代入式(38)，可得：

$$\cos\theta = \frac{\begin{bmatrix}0\\0\\g\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\cos\omega_{ie}t & -\sin\omega_{ie}t\sin L & \sin\omega_{ie}t\cos L\\ \sin\omega_{ie}t\sin L & 1-(1-\cos\omega_{ie}t)\sin^2 L & (1-\cos\omega_{ie}t)\sin L\cos L\\ -\sin\omega_{ie}t\cos L & (1-\cos\omega_{ie}t)\sin L\cos L & 1-(1-\cos\omega_{ie}t)\cos^2 L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\g\end{bmatrix}}{g\cdot g} =$$
$$1-(1-\cos\omega_{ie}t)\cos^2 L = 1-(1-\cos\alpha)\cos^2 L \tag{39}$$

实际上，不难验证式(39)与式(24)相互等价，可见矩阵 $\boldsymbol{C}_n^{n_0}$ 的第 3 行 3 列元素即为 $\cos\theta$，也可以将式(39)看作是推导纬度求解公式的一种新方法。

若考虑惯导测量误差，假设陀螺等效常值漂移为 $\boldsymbol{\varepsilon}^{n_0} = [\varepsilon_{\mathrm{E}}^{n_0} \quad \varepsilon_{\mathrm{N}}^{n_0} \quad \varepsilon_{\mathrm{U}}^{n_0}]^{\mathrm{T}}$，加速度计在起始时刻 t_0（不妨取 $t_0 = 0$）和结束时刻 t_N 的等效零偏分别为 $\boldsymbol{\nabla}_0^{n_0} = [\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0} \quad \nabla_{\mathrm{N},0}^{n_0} \quad \nabla_{\mathrm{U},0}^{n_0}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{\nabla}_N^{n} = [\nabla_{\mathrm{E},N}^{n} \quad \nabla_{\mathrm{N},N}^{n} \quad \nabla_{\mathrm{U},N}^{n}]^{\mathrm{T}}$，并将测量误差及转角 $\omega_{ie}t$ 视为小量，则式(38)变为

$$\cos\tilde{\theta} = \frac{(\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf},0}^{n_0})^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{C}}_n^{n_0}\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf},N}^{n}}{\left|\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf},0}^{n_0}\right|\left|\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf},N}^{n}\right|} \approx \frac{(\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf},0}^{n_0})^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{I}+(t_N-t_0)\boldsymbol{\varepsilon}^{n_0}\times\right]\boldsymbol{C}_n^{n_0}\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf},N}^{n}}{\left|\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf},0}^{n_0}\right|\left|\tilde{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{sf},N}^{n}\right|} \approx$$
$$\frac{\begin{bmatrix}\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0}\\ \nabla_{\mathrm{N},0}^{n_0}\\ g+\nabla_{\mathrm{U},0}^{n_0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}1 & -\varepsilon_{\mathrm{U}}^{n_0}t_N & \varepsilon_{\mathrm{N}}^{n_0}t_N\\ \varepsilon_{\mathrm{U}}^{n_0}t_N & 1 & -\varepsilon_{\mathrm{E}}^{n_0}t_N\\ -\varepsilon_{\mathrm{N}}^{n_0}t_N & \varepsilon_{\mathrm{E}}^{n_0}t_N & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\omega_{ie}t_N\sin L & \omega_{ie}t_N\cos L\\ \omega_{ie}t_N\sin L & 1 & 0\\ -\omega_{ie}t_N\cos L & 0 & 1-(1-\cos\omega_{ie}t_N)\cos^2 L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\nabla_{\mathrm{E},N}^{n}\\ \nabla_{\mathrm{N},N}^{n}\\ g+\nabla_{\mathrm{U},N}^{n}\end{bmatrix}}{\left|\begin{bmatrix}\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0} & \nabla_{\mathrm{N},0}^{n_0} & g+\nabla_{\mathrm{U},0}^{n_0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right|\cdot\left|\begin{bmatrix}\nabla_{\mathrm{E},N}^{n} & \nabla_{\mathrm{N},N}^{n} & g+\nabla_{\mathrm{U},N}^{n}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right|} \approx$$
$$\frac{\begin{bmatrix}\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0}+g\varepsilon_{\mathrm{N}}^{n_0}t_N\\ \nabla_{\mathrm{N},0}^{n_0}-g\varepsilon_{\mathrm{E}}^{n_0}t_N\\ g+\nabla_{\mathrm{U},0}^{n_0}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\nabla_{\mathrm{E},N}^{n}-\nabla_{\mathrm{N},N}^{n}\omega_{ie}t_N\sin L+(g+\nabla_{\mathrm{U},N}^{n})\omega_{ie}t_N\cos L\\ \nabla_{\mathrm{E},N}^{n}\omega_{ie}t_N\sin L+\nabla_{\mathrm{N},N}^{n}\\ -\nabla_{\mathrm{E},N}^{n}\omega_{ie}t_N\cos L+(g+\nabla_{\mathrm{U},N}^{n})[1-(1-\cos\omega_{ie}t_N)\cos^2 L]\end{bmatrix}}{(g+\nabla_{\mathrm{U},0}^{n_0})(g+\nabla_{\mathrm{U},N}^{n})} \approx$$
$$\frac{\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0}g\omega_{ie}t_N\cos L+g^2\varepsilon_{\mathrm{N}}^{n_0}\omega_{ie}t_N^2\cos L-\nabla_{\mathrm{E},N}^{n}g\omega_{ie}t_N\cos L}{(g+\nabla_{\mathrm{U},0}^{n_0})(g+\nabla_{\mathrm{U},N}^{n})}+[1-(1-\cos\omega_{ie}t_N)\cos^2 L] \approx$$
$$\frac{(\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0}-\nabla_{\mathrm{E},N}^{n}+g\varepsilon_{\mathrm{N}}^{n_0}t_N)\omega_{ie}t_N\cos L}{g}+\cos\theta \tag{40}$$

考虑到 $\cos\tilde{\theta} = \cos(\theta+\delta\theta) \approx \cos\theta - \delta\theta\sin\theta$，则由式(40)可得夹角 θ 的计算误差为

$$\delta\theta = -\frac{(\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0}-\nabla_{\mathrm{E},N}^{n}+g\varepsilon_{\mathrm{N}}^{n_0}t_N)\omega_{ie}t_N\cos L}{g\sin\theta} \tag{41}$$

另外，对式(24)两边同时求误差，可得

$$-\delta L\sin L = \frac{\cos(\theta/2)}{2\sin(\alpha/2)}\delta\theta \tag{42}$$

将式(41)代入(42)，考虑 $\sin(\theta/2) = \cos L\sin(\alpha/2)$，得

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\delta L=\frac{\cos(\theta/2)(\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0}-\nabla_{\mathrm{E},N}^{n}+g\varepsilon_{\mathrm{N}}^{n_0}t_N)\omega_{ie}t_N\cos L}{2g\sin(\alpha/2)\sin L\sin\theta}=\frac{\cos(\theta/2)(\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0}-\nabla_{\mathrm{E},N}^{n}+g\varepsilon_{\mathrm{N}}^{n_0}t_N)\omega_{ie}t_N\cos L}{4g\sin(\alpha/2)\sin L\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}=\frac{(\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0}-\nabla_{\mathrm{E},N}^{n}+g\varepsilon_{\mathrm{N}}^{n_0}t_N)\omega_{ie}t_N}{4g\sin^2(\alpha/2)\sin L}\approx\frac{(\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0}-\nabla_{\mathrm{E},N}^{n})/g+\varepsilon_{\mathrm{N}}^{n_0}t_N}{\omega_{ie}t_N\sin L}\tag{43}$$

由式(43)可见，右端分母存在因子 $\sin L$，因而在低纬度地区，纬度估计误差 δL 可能会比较大；分母中时间 t_N 表明，延长初始对准时间有利于减小纬度估计误差。式(43)右端分子表示 t_0 与 t_N 时刻的重力测量沿经度方向的张角误差，一部分由北向等效陀螺漂移 $\varepsilon_{\mathrm{N}}^{n_0}$ 引起，另一部分由东向等效加速度计零偏 $\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0}$ 和 $\nabla_{\mathrm{E},N}^{n_0}$ 引起，如果加速度计零偏保持为常值则近似有 $\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0}\approx\nabla_{\mathrm{E},N}^{n_0}$，这时加速度计零偏并不会引起纬度估计误差；如果初始对准过程中捷联惯导系统出现大角度转动，这时等效加速度零偏将难以保持为常值，这对纬度估计是十分不利的。

3.2　对准误差分析

想要通过奇异值分解式(17)进行后续误差分析是十分困难的，这里以 t_0 和 t_N 两个时刻的比力测量值进行双矢量定姿，再作误差分析，所得结论能为实际应用提供一些有益的参考。

常值阵 $\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0}$ 的双矢量定姿计算公式为

$$\boldsymbol{C}_{b_0}^{n_0}=\begin{bmatrix}-(\boldsymbol{g}_0^{n_0})^{\mathrm{T}}\\(\boldsymbol{g}_0^{n_0}\times\boldsymbol{g}_N^{n_0})^{\mathrm{T}}\\-(\boldsymbol{g}_0^{n_0}\times\boldsymbol{g}_N^{n_0}\times\boldsymbol{g}_0^{n_0})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},0}^{b_0})^{\mathrm{T}}\\(\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},0}^{b_0}\times\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},N}^{b_0})^{\mathrm{T}}\\(\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},0}^{b_0}\times\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},N}^{b_0}\times\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf},0}^{b_0})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\tag{44}$$

类似于文献[12]的分析方法（过程稍显烦琐，从略），不考虑基座运动干扰的影响，可以获得由惯性器件测量误差引起的初始对准失准角 $\boldsymbol{\phi}=[\phi_{\mathrm{E}}\quad\phi_{\mathrm{N}}\quad\phi_{\mathrm{U}}]^{\mathrm{T}}$ 公式，其三个分量分别为

$$\phi_{\mathrm{E}}=-\nabla_{\mathrm{N},N}^{n}/g\tag{45}$$

$$\phi_{\mathrm{N}}=\nabla_{\mathrm{E},N}^{n}/g\tag{46}$$

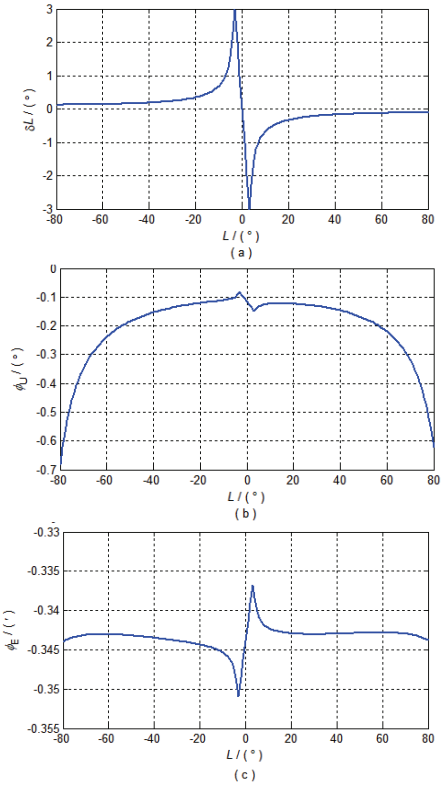
$$\phi_{\mathrm{U}}=\frac{-\varepsilon_{\mathrm{E}}^{n_0}+(\nabla_{\mathrm{N},N}^{n}-\nabla_{\mathrm{N},0}^{n})/\mathrm{g}/t_N}{\omega_{ie}\cos L}+\frac{(\nabla_{\mathrm{E},0}^{n_0}+\nabla_{\mathrm{E},N}^{n})\tan\mathrm{L}}{2g}+\frac{\delta L\omega_{ie}t_N\cos L}{2}-\frac{\varepsilon_{\mathrm{U}}^{n_0}t_N}{2}\tag{47}$$

与文献[1]对比，式(46)显示，采用纬度自估计方法后，陀螺漂移不影响北向失准角误差。式(47)右端的第一项中 $(\nabla_{\mathrm{N},N}^{n}-\nabla_{\mathrm{N},0}^{n})/\mathrm{g}/t_N$ 表明，对准起止时刻的等效北向加速度计零偏变化，其作用等效于东向陀螺漂移，这一结论与文献[14, 15]一致；第三项显示方位失准角受纬度估计误差 δL 的影响，纬度越低且对准时间越长影响就越大；第二项和第四项的影响一般相对较小些。显然，与文献[1]的静基座解析对准相比，惯性系初始对准方法的方位失准角误差影响因素要复杂得多。

4　仿真验证

惯性系初始对准方法的抗干扰能力在很多文献中都有验证，并且也已经得到了广泛的实际应用。这里主要针对纬度未知条件下的南北纬度估计能力进行仿真。

不妨假设捷联惯导系统的载体坐标系与导航坐标系重合，陀螺仪的随机常值漂移误差为 0.03 °/h，加速度计的随机常值零偏为 100 μg，纬度仿真取值范围为 –80 °~ 80 ° 且每隔 1 ° 取一个仿真点。仿真纬度估计误差和初始对准失准角误差结果如图 2 所示。从图 2 (a)中可以看出，低纬度地区的纬度估计误差总体上较大。但值得一提的是，由于式(24)中须确保余弦函数值不大于 1 才有意义，即必须有角度条件 $\theta\leqslant\alpha$ 成立，然而当计算值 $\theta>\alpha$ 时，需对余弦函数作最大值为 1 的限幅处理，因此图 2 (a)中纬度为 0° 时误差反而会比较小。在图 2 (b)中，低纬度地区的方位失准角基本上不受纬度估计误差的影响，而高纬度地区主要与 cos$L$ 成反比。在图 2 (c)和 2 (d)中，水平失准角误差可以视为常值。总体而言，失准角仿真结果与准确已知纬度情况下的初始对准误差规律相符。



(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

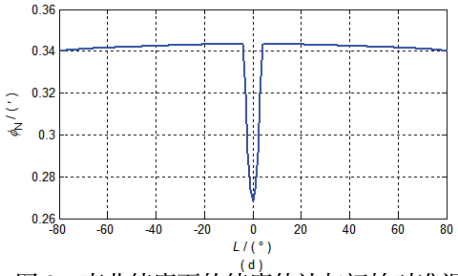


图 2 南北纬度下的纬度估计与初始对准误差

Fig.2 Latitude & attitude estimated errors in north-south latitude simulation

5 结 论

根据惯性系初始对准的数值计算特点，给出了纬度未知情况下三阶优化矩阵的数值递推改进算法，它将纬度估计和单位正交阵确定有效隔离，两者可同时实现，避免了以往文献算法中须将两者分开依次实现的缺点。当在南半球纬度为负的地区进行初始对准时，改进算法利用奇异值分解优化矩阵中行列式值为负的特点给出了正确的纬度确定方法。改进算法给出的纬度估计误差公式表明，在低纬度地区甚至赤道上，纬度估计误差会比较大，因而纬度估计结果一般只在中高纬度地区才具有较精确的参考意义。与传统的静基座解析初始对准相比，惯性系初始对准的方位失准角影响因素众多，除外部基座干扰外，惯性器件本身的测量误差也会对初始对准精度带来更多不利的影响。特别在大晃动甚至惯导系统存在明显方位转动的情况下，建议还是通过输入已知纬度参数并使用滤波估计的方法将惯性器件误差参数建模，这样才容易获得更高的初始对准精度。

参考文献（References）：

[1] 严恭敏, 严卫生, 徐德民, 等. 纬度未知条件下捷联惯导系统初始对准分析[J]. 航天控制, 2008, 26(2): 31-34.
Yan G, Yan W, Xu D, et al. SINS initial alignment analysis under geographic latitude uncertainty[J]. Aerospace Control, 2008, 26(2): 31-34.

[2] 王跃刚, 杨家胜, 杨波. 纬度未知条件下捷联惯导系统晃动基座的初始对准[J]. 航空学报, 2012, 33(12): 2322-2329.
Wang Y, Yang J, Yang B. SINS initial alignment of swaying base under geographic latitude uncertainty[J]. ActaAeronautica et AstronauticaSinica, 2012, 33(12): 2322-2329.

[3] 郑振宇, 周爱军, 唐君, 等. 基于地轴矢量解算的 SINS 无纬度支持自对准方法[J]. 宇航学报, 2019, 40(1): 77-84.
Zheng Z, Zhou A, Tang J, et al. An initial alignment method of SINS without latitude based on calculation of Earth axis vector[J]. Journal of Astronautics, 2019, 40(1): 77-84.

[4] Gaiffe T, Cottreau Y, Faussot N, et al. Highly compact fiber optic gyrocompass for applications at depths up to 3000m[C]//International Symposium on Underwater Technology. 2000:155-160.

[5] 秦永元, 严恭敏, 顾冬晴, 等. 摇摆基座上基于 g 信息的捷联惯导粗对准研究[J]. 西北工业大学学报, 2005, 23(5): 681-684.
Qin Y, Yan G, Gu D, et al. A clever way of SINS coarse alignment despite rocking ship[J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2005, 23(5): 681-684.

[6] 练军想, 汤勇刚, 吴美平, 等. 捷联惯导惯性系动基座对准算法研究[J]. 国防科技大学学报, 2007, 29(5): 95-99.
Lian J, Tang Y, Wu M, et al. Study on SINS alignment algorithm with inertial frame for swaying bases[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2007, 29(5): 95-99.

[7] Che Y, Wang Q, Gao W, et al. An improved inertial frame alignment algorithm based on horizontal alignment information for marine SINS[J]. Sensors, 2015, 15(10): 25520-25545.

[8] Liu Y, Xu X, Liu X, et al. A self-alignment algorithm for SINS based on gravitational apparent motion and sensor data denoising[J]. Sensors, 2015, 15(5): 9827-9853.

[9] Liu X, Liu X, Song Q, et al. A novel self-alignment method for SINS based on three vectors of gravitational apparent motion in inertial frame[J]. Measurement, 2015, 62: 47-62.

[10] Lyu W, Cheng X. Novel self-alignment algorithm with unknown latitude for SINS on swing base[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2017, 25(3): 281-288.

[11] 刘锡祥, 杨燕, 黄永江, 等. 未知纬度条件下基于重力视运动与小波去噪的 SINS 自对准方法[J]. 中国惯性技术学报, 2016, 24(3): 306-313.
Liu X, Yang Y, Huang Y, et al. Self-alignment algorithm without latitude for SINS based on gravitational apparent motion and wavelet denoising[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2016, 24(3): 306-313.

[12] 吴枫，秦永元，周琪. 间接解析自对准算法误差分析[J]. 系统工程与电子技术, 2013, 35(3): 586-590.
Wu F, Qin Y, Zhou Q. Error analysis of indirect analytic alignment algorithm[J]. Systems Engineering and Electronics, 2013, 35(3): 586-590.

[13] 严恭敏, 陈若彤, 郭鹋. 多矢量定姿的 SVD 和 QUEST 算法等价性分析[J]. 中国惯性技术学报, 2019, 27(5): 568-572.
Yan G, Chen R, Guo K. Equivalence analysis between SVD and QUEST for multi-vector attitude determination[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2019, 27(5): 568-572.

[14] 严恭敏. 捷联惯导系统动基座初始对准及其它相关问题研究[R]. 西安: 西北工业大学, 2008.
Yan G. Research on SINS in-movement initial alignment and some other problems[R]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2008.

[15] 蒋飞宇，阳洪，王瑜，等. 加表斜坡零偏对惯导初对准的影响及补偿研究[J]. 压电与声光, 2016, 38(06): 947-950,955.
Jiang F, Yang H, Wang Y, et al. The influence and compensation of slope bias of accelerometer on initial alignment of strapdown inertial navigation system[J]. Piezoelectrics&Acoustooptics, 2016, 38(06): 947-950, 955.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

文章编号：1005-6734(2020)03-0347-06 doi.10.13695/j.cnki.12-1222/o3.2020.03.010

一种求解等效旋转矢量高阶误差补偿系数的新方法

严恭敏[1]，李思锦[1]，郭正东[2]
（1. 西北工业大学 自动化学院，西安 710072；2. 海军潜艇学院，青岛 266199）

摘要：在传统等效旋转矢量多子样算法中，仅考虑了二阶不可交换误差的补偿而忽略了高阶项的影响，算法精度有限。高阶误差补偿算法在一定程度上提高了等效旋转矢量的计算精度，但是其系数求解方法比较烦琐。针对以上问题，提出一种采用数值仿真方法进行误差补偿算法系数的求解方法，将等效旋转矢量方程（Bortz 方程）分解为互不相关的不同重数的角速度叉乘积的形式，随机仿真生成高阶误差期望值和一组角增量的叉乘积，建立量测方程组，通过角增量矩阵秩的计算化简消除叉乘积之间的相关性，最终求得所有误差补偿系数，所提方法具有操作简单和易于推广的突出优点。在大锥角圆锥运动和大角度机动环境下进行了对比仿真验证，与传统算法相比新的高阶算法的精度提高了 2~3 个数量级。

关 键 词：捷联姿态算法；等效旋转矢量；高阶误差补偿系数；随机仿真
中图分类号：V249.3 **文献标志码：**A

A new method to obtain high-order error compensation coefficients for equivalent rotation vector

YAN Gongmin[1], LI Sijin[1], GUO Zhengdong[2]
(1. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. Navy Submarine Academy, Qingdao 266199, China)

Abstract: In the traditional multi-sample error compensation algorithm, the rotation vector accuracy is limited by the fact that only the compensation of second-order non-commutative error is considered and the influence of higher-order terms are all ignored. The rotation vector accuracy can be improved if high-order non-commutative error is taken into account, while it will encounter big difficulties in obtaining the error compensation coefficients. A new way to the solution of high-order error compensation coefficients by numerical simulation is proposed. First, the rotation vector equation (Bortz equation) is decomposed into different-order of cross-product of the angular rates, where they are independent of each other. Next, the cross-product of the expected value of the high-order error and a group of angular increment are generated by random simulation, and a set of measure equations are established. Finally, the correlation among the cross-products is eliminated by the rank operation of the angular increment matrix, and all the error compensation coefficients are obtained. The proposed method has the advantages of simple operation and easy generalization. Some algorithms are simulated and compared under large coning motion and high rate maneuvering environment, and the proposed high-order algorithm shows a 2~3 orders of magnitude accuracy improvement compared with the traditional algorithm.

Key words: strapdown attitude algorithm; equivalent rotation vector; high-order error compensation coefficients; random simulation

收稿日期：2020-04-11；**修回日期：**2020-06-21
基金项目：航天科技集团联合基金（6141B06220404）
作者简介：严恭敏（1977—），男，博士，副教授，主要从事惯性导航与信息融合理论研究。E-mail：yangongmin@163.com

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

捷联惯导算法的关键在于姿态更新算法，其主流方法是先使用陀螺角增量多子样采样计算等效旋转矢量，补偿转动不可交换误差，再使用等效旋转矢量计算姿态更新四元数。等效旋转矢量多子样算法的理论基础是 Bortz 方程[1]，传统基于泰勒级数展开或基于圆锥运动环境下优化的多子样算法推导，都忽略了 Bortz 方程中三阶以上项的影响，虽然理论上在一个姿态更新周期内子样数越多精度越高，但是，实际算法精度往往达不到宣称的理想效果，特别是在大角度机动或大锥角圆锥运动环境下，有时采用高子样算法的精度反而不如低子样算法的精度。

目前，提高姿态解算精度的研究方向主要有两个。其一是数值迭代算法，姿态的数学表示方法有姿态阵、等效旋转矢量、四元数和罗德里格参数等，只要能建立起这些表示方法与角速度输入之间的运动学关系，均可以采用积分或微分数值迭代计算的方法进行求解，这类方法的优点是精度高且实现简单，稍显不足之处是计算量略大[2-6]。其二是等效旋转矢量的高阶误差补偿算法，它考虑了 Bortz 方程中高阶项的影响，将高阶项表示为多子样的多重叉积之和的形式，先推导求解出高阶误差补偿系数再进行补偿，其优点是在进行姿态更新应用时计算量相对较小[7]。

等效旋转矢量高阶误差补偿系数的求解是比较烦琐的，但幸运的是可以将 Bortz 方程中的低阶项分解为多个部分，各部分恰好能够表示为不同重数的叉积形式，且它们之间互不相关，只要分别进行求解即可[7,8]。文献[9]给出了单重叉积系数即传统多子样系数的随机仿真求解算法，通用性强且计算机编程实现简单；文献[10]借鉴同样的思路，给出了双重叉积和三重叉积系数的求解算法，但由于多重叉积之间存在相关性问题，去除相关过程的推导依然有些烦琐。本文采用多重叉积矩阵秩的数值判断方法直接消除相关性，更加简单，该方法可直接推广至五子样和六子样等更高子样算法。最后，在圆锥运动和大机动情况下进行了算法的对比仿真验证，并给出了一些实际使用建议。

1 高阶误差补偿算法原理

等效旋转矢量微分方程(Bortz 方程)为[1]

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{\phi^2}\left(1-\frac{\phi}{2}\cot\frac{\phi}{2}\right)\left[\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega})\right] \quad (1)$$

其中，$\boldsymbol{\omega}$ 为动坐标系相对于参考坐标系的转动角速度输入，$\phi=|\boldsymbol{\phi}|$ 为等效旋转矢量 $\boldsymbol{\phi}$ 的模值。将式(1)中的余切函数作泰勒级数展开，经整理后可得

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}=\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega}+\left(\frac{1}{12}+\frac{\phi^2}{720}+\frac{\phi^4}{30240}+\cdots\right)\left[\boldsymbol{\phi}\times(\boldsymbol{\phi}\times\boldsymbol{\omega})\right] \quad (2)$$

将等效旋转矢量作如下“和分解”[7]

$$\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{\phi}_2+\boldsymbol{\phi}_3+\boldsymbol{\phi}_4+\boldsymbol{\phi}_5+\cdots \quad (3)$$

再将式(3)代入式(2)，可得

$$\begin{aligned}&\dot{\boldsymbol{\phi}}_1+\dot{\boldsymbol{\phi}}_2+\dot{\boldsymbol{\phi}}_3+\dot{\boldsymbol{\phi}}_4+\dot{\boldsymbol{\phi}}_5+\cdots=\\&\quad\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{\phi}_2+\boldsymbol{\phi}_3+\boldsymbol{\phi}_4+\cdots)\times\boldsymbol{\omega}+\\&\quad\left(\frac{1}{12}+\frac{\phi^2}{720}+\cdots\right)\left\{(\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{\phi}_2+\boldsymbol{\phi}_3+\boldsymbol{\phi}_4+\cdots)\times\right.\\&\quad\left.\left[(\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{\phi}_2+\boldsymbol{\phi}_3+\boldsymbol{\phi}_4+\cdots)\times\boldsymbol{\omega}\right]\right\}=\\&\quad\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_1\times\boldsymbol{\omega}+\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_2\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{12}\boldsymbol{\phi}_1\times(\boldsymbol{\phi}_1\times\boldsymbol{\omega})\right]+\\&\quad\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_3\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{12}\left[\boldsymbol{\phi}_1\times(\boldsymbol{\phi}_2\times\boldsymbol{\omega})+\boldsymbol{\phi}_2\times(\boldsymbol{\phi}_1\times\boldsymbol{\omega})\right]\right\}+\\&\quad\left\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_4\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{12}\left[\boldsymbol{\phi}_1\times(\boldsymbol{\phi}_3\times\boldsymbol{\omega})+\boldsymbol{\phi}_3\times(\boldsymbol{\phi}_1\times\boldsymbol{\omega})+\right.\right.\\&\quad\left.\left.\boldsymbol{\phi}_2\times(\boldsymbol{\phi}_2\times\boldsymbol{\omega})\right]+\frac{\phi^2}{720}\boldsymbol{\phi}_1\times(\boldsymbol{\phi}_1\times\boldsymbol{\omega})\right\}+\cdots\end{aligned} \quad (4)$$

令式(4)左右两边的项一一对应相等，可得如下五个子式

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_1=\boldsymbol{\omega} \quad (5a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_1\times\boldsymbol{\omega} \quad (5b)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_3=\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_2\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{12}\boldsymbol{\phi}_1\times(\boldsymbol{\phi}_1\times\boldsymbol{\omega}) \quad (5c)$$

$$\dot{\boldsymbol{\phi}}_4=\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_3\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{12}\left[\boldsymbol{\phi}_1\times(\boldsymbol{\phi}_2\times\boldsymbol{\omega})+\boldsymbol{\phi}_2\times(\boldsymbol{\phi}_1\times\boldsymbol{\omega})\right] \quad (5d)$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\phi}}_5=&\frac{1}{2}\boldsymbol{\phi}_4\times\boldsymbol{\omega}+\frac{1}{12}\left[\boldsymbol{\phi}_1\times(\boldsymbol{\phi}_3\times\boldsymbol{\omega})+\boldsymbol{\phi}_3\times(\boldsymbol{\phi}_1\times\boldsymbol{\omega})+\right.\\&\left.\boldsymbol{\phi}_2\times(\boldsymbol{\phi}_2\times\boldsymbol{\omega})\right]+\frac{\phi^2}{720}\boldsymbol{\phi}_1\times(\boldsymbol{\phi}_1\times\boldsymbol{\omega})\end{aligned} \quad (5e)$$

假设输入角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 为关于时间 t 的 $(N-1)$ 次多项式，即

$$\boldsymbol{\omega}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_{N-1} & \boldsymbol{w}_{N-2} & \cdots & \boldsymbol{w}_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}t^{N-1}\\t^{N-2}\\\vdots\\1\end{bmatrix}\triangleq\boldsymbol{W}\begin{bmatrix}t^{N-1}\\t^{N-2}\\\vdots\\1\end{bmatrix} \quad (6)$$

式中，$\boldsymbol{w}_j\ (j=N-1,N-2\cdots0)$ 均为三维列向量，$\boldsymbol{W}$ 为 $3\times N$ 维的系数矩阵。假设在一个姿态更新时间段 $(0,T]$ 内进行了 N 次等间隔陀螺角增量采样，记为 $\Delta\boldsymbol{\theta}_{j+1}$，显然有

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_{j+1}=\int_{jh}^{(j+1)h}\boldsymbol{\omega}\mathrm{d}t \quad (7)$$

式中，$h=T/N$ 为陀螺采样间隔。根据文献[9]，有角速度多项式系数与角增量之间的关系

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_{N-1} & \boldsymbol{w}_{N-2} & \cdots & \boldsymbol{w}_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{\theta}_1 & \Delta\boldsymbol{\theta}_2 & \cdots & \Delta\boldsymbol{\theta}_N\end{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}^{-1} \tag{8}$$

式中，$\boldsymbol{\Gamma}$ 是与 N 和 T 有关的已知矩阵。由式(8)可知，角速度多项式各项系数 $\boldsymbol{w}_j$ 均是所有角增量采样 $\Delta\boldsymbol{\theta}_{j+1}$ 的线性组合，因此式(6)中角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 总可以表示为角增量 $\Delta\boldsymbol{\theta}_{j+1}$ 的线性组合多项式形式，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{w}_{N-1}t^{N-1}+\boldsymbol{w}_{N-2}t^{N-2}+\cdots+\boldsymbol{w}_0=\\(\gamma_{11}\Delta\boldsymbol{\theta}_1+\gamma_{21}\Delta\boldsymbol{\theta}_2+\cdots+\gamma_{N1}\Delta\boldsymbol{\theta}_N)t^{N-1}+\\(\gamma_{12}\Delta\boldsymbol{\theta}_1+\gamma_{22}\Delta\boldsymbol{\theta}_2+\cdots+\gamma_{N2}\Delta\boldsymbol{\theta}_N)t^{N-2}+\cdots+\\(\gamma_{1N}\Delta\boldsymbol{\theta}_1+\gamma_{2N}\Delta\boldsymbol{\theta}_2+\cdots+\gamma_{NN}\Delta\boldsymbol{\theta}_N)\end{aligned} \tag{9}$$

式中，γ_{ij} 为逆阵 $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ 的第 i 行 j 列元素，是已知量。式(5a)显示，$\boldsymbol{\phi}_1$ 是角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 的积分即角增量，因而 $\boldsymbol{\phi}_1$ 也可以表示为 $\Delta\boldsymbol{\theta}_{j+1}$ 的线性组合多项式形式，根据式(9)可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}_1=(\gamma_{11}\Delta\boldsymbol{\theta}_1+\gamma_{21}\Delta\boldsymbol{\theta}_2+\cdots+\gamma_{N1}\Delta\boldsymbol{\theta}_N)t^N/N+\\(\gamma_{12}\Delta\boldsymbol{\theta}_1+\gamma_{22}\Delta\boldsymbol{\theta}_2+\cdots+\gamma_{N2}\Delta\boldsymbol{\theta}_N)t^{N-1}/(N-1)+\cdots+\\(\gamma_{1N}\Delta\boldsymbol{\theta}_1+\gamma_{2N}\Delta\boldsymbol{\theta}_2+\cdots+\gamma_{NN}\Delta\boldsymbol{\theta}_N)t+0\end{aligned} \tag{10}$$

若角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 关于时间 t 的最低非零幂次为 0、最高非零幂次为 $N-1$，则经积分后，角增量 $\boldsymbol{\phi}_1$ 的最低非零幂次为 1、最高非零幂次为 N；考虑到 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\boldsymbol{\phi}_1$ 的最低非零幂次项和最高非零幂次项是线性相关的，则在一般非定轴转动情形下叉积 $\boldsymbol{\phi}_1\times\boldsymbol{\omega}$ 的最低非零幂次为 2、最高非零幂次为 $2N-2$，所以式(5b)经积分后 $\boldsymbol{\phi}_2$ 的最低非零幂次为 3、最高非零幂次为 $2N-1$；以此类推，可分析得 $\boldsymbol{\phi}_3$、$\boldsymbol{\phi}_4$ 和 $\boldsymbol{\phi}_5$ 等分解项的最低和最高非零幂次，总结见表 1。其中，在式(5e)的右端最后一项中含等效旋转矢量模方因子 ϕ^2，显然 $\phi^2=\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}$ 的最低非零幂次为 2、最高幂次为无穷，所以 $\boldsymbol{\phi}_5$ 的最高非零幂次是无穷的。

表 1　等效旋转矢量分解的最低和最高非零幂次

Tab1.　The lowest and highest non-zero power for the decomposition of rotation vector

	$\boldsymbol{\phi}_1$	$\boldsymbol{\phi}_2$	$\boldsymbol{\phi}_3$	$\boldsymbol{\phi}_4$	$\boldsymbol{\phi}_5$	$\boldsymbol{\phi}_k\ (k\geqslant 6)$
最低	1	3	5	5	7	⩾7
最高	N	$2N$-1	$3N$-1	$4N$-1	∞	∞

根据三维向量的叉乘性质，将式(10)叉乘式(9)，其结果必定可以表示成如下 $N(N-1)/2$ 项单重叉积的线性组合形式

$$\boldsymbol{\phi}_1\times\boldsymbol{\omega}=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}k'_{ij}\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times\Delta\boldsymbol{\theta}_j \tag{11}$$

式(11)中，k'_{ij} 是与 γ_{ij} 和时间 t 有关的系数，具体表达式比较复杂。将式(11)对时间积分不会改变其整体表示形式，仅会改变系数 k'_{ij}，因此，由式(5b)可知 $\boldsymbol{\phi}_2$ 也总可以表示为角增量采样单重叉积 $\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times\Delta\boldsymbol{\theta}_j$ 的线性组合形式，记为

$$\boldsymbol{\phi}_2=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}k_{ij}\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times\Delta\boldsymbol{\theta}_j \tag{12}$$

依此类推，$\boldsymbol{\phi}_3$ 可以表示为 $N^2(N-1)/2$ 项双重叉积 $\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_j\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k)$ 的线性组合；而 $\boldsymbol{\phi}_4$ 也可以表示为 $N^3(N-1)/2$ 项三重叉积 $\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_j\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_k\times\Delta\boldsymbol{\theta}_l)\right]$ 的线性组合（注意：在文献[7,10]中将 $\boldsymbol{\phi}_4$ 分为 $\boldsymbol{\phi}_{4-1}$ 和 $\boldsymbol{\phi}_{4-2}$ 两部分是没必要的，因为总有 $(\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times\Delta\boldsymbol{\theta}_j)\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_k\times\Delta\boldsymbol{\theta}_l)=\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_j\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_k\times\Delta\boldsymbol{\theta}_l)\right]-\Delta\boldsymbol{\theta}_j\times\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_k\times\Delta\boldsymbol{\theta}_l)\right]$ 成立，即 $\boldsymbol{\phi}_{4-2}$ 必定可以表示成 $\boldsymbol{\phi}_{4-1}$ 的线性组合）。然而，由于式(5e)中含因子 ϕ^2，理论上 $\boldsymbol{\phi}_5$ 不能完全表示为四重叉积形式，所以采用多子样多重叉积法最多只能精确补偿至三重叉积项。当然，若作模方近似 $\phi^2=(\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{\phi}_2+\cdots)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\phi}_1+\boldsymbol{\phi}_2+\cdots)\approx\boldsymbol{\phi}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\phi}_1$，则 $\boldsymbol{\phi}_5$ 的最高幂次为 $5N-1$，就有可能采用非叉乘的方式对其进行近似补偿，这不在论文的讨论范围内。

式(5)和表 1 表明，传统的等效旋转矢量误差补偿算法只补偿至 $\boldsymbol{\phi}_2$ 项，即忽略了 $\boldsymbol{\phi}_3$ 及其之后所有项，误差阶为 $O(t^5)$；$\boldsymbol{\phi}_3$ 和 $\boldsymbol{\phi}_4$ 具有相同的误差阶 $O(t^5)$，若仅补偿 $\boldsymbol{\phi}_3$ 则误差依然为 $O(t^5)$，意义不大；若同时补偿 $\boldsymbol{\phi}_3$ 和 $\boldsymbol{\phi}_4$ 而忽略 $\boldsymbol{\phi}_5$，则误差阶为 $O(t^7)$。目前，所谓的高阶误差补偿算法，即为对 $\boldsymbol{\phi}_2$、$\boldsymbol{\phi}_3$ 和 $\boldsymbol{\phi}_4$ 同时进行了误差补偿的等效旋转矢量多子样算法。

2　高阶误差补偿系数求解

2.1　求解步骤

根据式(9)和式(10)的表达方式直接求解式(12)中的单重叉积系数 k_{ij}，甚至进一步求解双重或三重叉积系数，十分的烦琐。因此，这里通过随机数值仿真的方法求解这些系数，主要以求解双重叉积系数 k_{ijk} 为例，单重叉积系数 k_{ij} 和三重叉积系数 k_{ijkl} 的求解过程类似。

求解等效旋转矢量误差补偿双重叉积系数 k_{ijk} 的具体步骤如下：

（1）给定子样数 N，不妨将等效旋转矢量更新周期作归一化处理，即令 $T=1$；

（2）随机生成一组角速度多项式系数 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_{N-1} & \boldsymbol{w}_{N-2} & \cdots & \boldsymbol{w}_0\end{bmatrix}$，根据式(5a)～式(5c)和卷积算法[4]依次计算 $\boldsymbol{\phi}_1$、$\boldsymbol{\phi}_2$ 和 $\boldsymbol{\phi}_3$ 的多项式系数，再计算多项式在 $T=1$ 时刻取值 $\boldsymbol{\phi}_3(1)$，此即三阶不可交换误差的期望值。

（3）根据步骤（2）中的角速度多项式系数，按式(7)生成一组角增量数据 $\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{\theta}_1 & \Delta\boldsymbol{\theta}_2 & \cdots & \Delta\boldsymbol{\theta}_N\end{bmatrix}$，它们满足量测方程 $\boldsymbol{\phi}_3(1)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=j+1}^{N}k_{ijk}\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_j\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k)$，$k_{ijk}$ 为 $n=N^2(N-1)/2$ 个候选的待定系数；

（4）重复步骤（2）和（3）共记 m 次，一般需

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

满足 $3m \geqslant n$，将所有量测方程合并在一起写成方程组形式 $\left[\boldsymbol{\phi}_3(1)\right]_{3m\times 1}=\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_j\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k)\right]_{3m\times n}\left[k_{ijk}\right]_{n\times 1}$；

（5）根据向量的双重叉积性质（雅可比恒等式）$\boldsymbol{V}_1\times(\boldsymbol{V}_2\times\boldsymbol{V}_3)+\boldsymbol{V}_2\times(\boldsymbol{V}_3\times\boldsymbol{V}_1)+\boldsymbol{V}_3\times(\boldsymbol{V}_1\times\boldsymbol{V}_2)=\boldsymbol{0}$ 可知，由角增量构造的矩阵 $\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_j\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k)\right]_{3m\times n}$ 不是列满秩的，可试着删去某一列并判断删除前后的秩是否一致，若相等则将该列删去并删去与该列对应的系数 k_{ijk}，消除相关性，用此方法直到将角增量矩阵化为列满秩的，当然，也可通过调用 Matlab 软件的“rref”函数获得角增量矩阵的极大无关列向量组直接实现列满秩。

（6）在角增量矩阵列满秩情况下利用最小二乘法求解方程组，得到 n' 个互不相关的双重叉积补偿系数 k_{ijk}，可用 Matlab 的“format rat”命令将浮点小数解转化为分数解输出。

2.2 二子样误差补偿系数

经过仿真计算，获得二子样算法的所有误差补偿系数如表 2 所列。

表 2 二子样算法误差补偿系数

Tab.2 Error compensation coefficients of 2 sub-sample algorithm

ij	k_{ij}	ijk	k_{ijk}	$ijkl$	k_{ijkl}
12	2/3	112	2/15	1112	1/126
		212	-2/15	1212	-19/315
				2212	1/126

二子样算法的误差补偿系数数目不多，可根据表 2 直接写出完整的等效旋转矢量高阶误差补偿算法公式，为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\phi}=&\sum_{i=1}^{2}\Delta\boldsymbol{\theta}_i+\sum_{ij}k_{ij}\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times\Delta\boldsymbol{\theta}_j+\sum_{ijk}k_{ijk}\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_j\times\Delta\boldsymbol{\theta}_k)+\\&\sum_{ijkl}k_{ijkl}\Delta\boldsymbol{\theta}_i\times\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_j\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_k\times\Delta\boldsymbol{\theta}_l)\right]=\\&(\Delta\boldsymbol{\theta}_1+\Delta\boldsymbol{\theta}_2)+\frac{2}{3}\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\Delta\boldsymbol{\theta}_2+\frac{2}{15}\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\Delta\boldsymbol{\theta}_2)+\\&\frac{-2}{15}\Delta\boldsymbol{\theta}_2\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\Delta\boldsymbol{\theta}_2)+\frac{1}{126}\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\Delta\boldsymbol{\theta}_2)\right]+\\&\frac{-19}{315}\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_2\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\Delta\boldsymbol{\theta}_2)\right]+\frac{1}{126}\Delta\boldsymbol{\theta}_2\times\left[\Delta\boldsymbol{\theta}_2\times(\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\Delta\boldsymbol{\theta}_2)\right]\end{aligned}\tag{12}$$

式中，求和符号 $\sum$ 的右下标 ij、ijk 或 $ijkl$ 表示遍历表 2 中的所有取值。后文三子样和四子样算法的误差补偿系数使用方法同式(13)，不再详细给出公式。

2.3 三子样误差补偿系数

三子样算法的误差补偿系数数目较多，参见表 3，其中包含单重叉积系数 3 个、双重叉积系数 8 个、三重叉积系数 18 个。

2.4 四子样误差补偿系数

四子样算法的误差补偿系数如表 4 和表 5 所列，共包含单重叉积系数 6 个、双重叉积系数 20 个、三重叉积系数 60 个。

结果显示，表 3 和表 4 中的单重叉积误差补偿系数 k_{ij} 与文献[9]一致，它们都是在多项式角运动条件下获得的。文献[11]综合考虑了多项式角运动和圆锥运动的影响，推导并给出了所谓的扩展圆锥算法（见表 3 和表 4 第 2 列括号内的数据），使其更加适应于圆锥运动环境。

表 3 三子样算法误差补偿系数

Tab.3 Error compensation coefficients of 3 sub-sample algorithm

ij	k_{ij} (扩展算法)	ijk	k_{iik}	$ijkl$	k_{iikl}	$ijkl$	k_{iikl}
12	57/80 (27/40)	112	261/2240	1112	37/19712	2123	-1084/4493
13	33/80 (9/20)	113	27/448	1113	-124/48691	2212	195/8389
23	57/80 (27/40)	123	603/1120	1123	659/4928	2213	13/704
		212	-207/1120	1212	-671/10151	2223	195/8389
		213	-603/2240	1213	-2539/19647	2313	139/11211
		223	207/1120	1223	1084/4493	2323	-671/10151
		313	-27/448	1313	-635/19712	3123	-247/1787
		323	-261/2240	1323	118/26253	3313	-124/48691
				2113	71/8983	3323	37/19712

表 4 四子样算法误差补偿系数（单重和双重叉积）

Tab.4 Error compensation coefficients of 4 sub-sample algorithm (for single & double cross product)

ij	k_{ij} (扩展算法)	ijk	k_{iik}	ijk	k_{iik}	ijk	k_{iik}
12	736/945 (232/315)	112	591/5179	213	-335/1556	323	-111/823
13	334/945 (46/105)	113	265/3934	214	-769/2433	324	-599/1792
14	526/945 (18/35)	114	156/1571	223	111/823	334	753/3056
23	218/315 (178/315)	123	499/908	224	109/3719	414	-156/1571
24	334/945 (46/105)	124	457/1138	234	499/908	424	-265/3934
34	736/945 (232/315)	134	457/1138	313	-109/3719	434	-591/5179
		212	-753/3056	314	-409/4783		

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

表 5　四子样算法误差补偿系数（三重叉积）

Tab.5　Error compensation coefficients of 4 sub-sample algorithm (for triple cross product)

$ijkl$	k_{ijkl}	$ijkl$	k_{ijkl}	$ijkl$	k_{ijkl}	$ijkl$	k_{ijkl}
1112	-32/40095	1324	-157/673	2234	639/4546	3234	-744/3397
1113	16/61613	1334	199/1539	2313	-77/11328	3313	-155/23166
1114	27/12272	1414	-396/8287	2314	-1639/12120	3314	-86/8795
1123	523/3823	1424	164/6275	2323	-249/4246	3323	154/14933
1124	134/1231	1434	37/26664	2324	-1989/10259	3324	-92/7037
1134	557/6298	2113	-84/7187	2334	485/1916	3334	83/1920
1212	-247/3226	2114	-143/10169	2414	63/2143	3414	-185/14596
1213	-185/1904	2123	-241/839	2424	-74/2747	3424	165/5903
1214	-154/1433	2124	-445/2153	2434	22/555	3434	-247/3226
1223	485/1916	2134	-1401/6233	3114	87/26666	4124	-169/1475
1224	199/1539	2212	83/1920	3123	-990/11347	4134	-437/3964
1234	1001/1929	2213	192/9125	3124	-170/2793	4234	-379/2148
1313	-74/2747	2214	485/7174	3134	-227/4372	4414	27/12272
1314	-20/321	2223	154/14933	3214	547/3442	4424	16/61613
1323	-119/2232	2224	-155/23166	3224	167/3590	4434	-32/40095

表 4 中的双重叉积和表 5 中的三重叉积误差补偿系数与文献[7,10]的结果不完全一致，但系数的数目是对应相等的。究其原因主要在于本文采用 2.1 节步骤（5）的方法消除角增量叉积之间的相关性，两种方法消去的系数不一样。本文方法无需细致的公式推导整理，直接利用计算机从数值上进行化简更加便捷。需要指出的是，在求解双重叉积和三重叉积等高阶误差补偿系数时，所有文献均未考虑圆锥运动的影响，因而，即使采用了单重叉积扩展圆锥算法，高阶误差补偿算法依然不能适应剧烈的高频大锥角圆锥运动环境。当然，要同时考虑多项式角运动和圆锥运动的影响，进一步推导高阶扩展算法是十分困难的。

利用本文方法还可以方便地求解五子样和六子样等更高子样数的算法，但误差补偿系数繁多且实际应用意义也不大，不再详细列出。

3　仿真验证

3.1　圆锥运动仿真

圆锥运动仿真参数设置为：圆锥频率 f =2 Hz，半锥角变化范围 α =0.01 °～90 °，角增量采样间隔 h=10 ms。经过仿真，在圆锥轴上的姿态漂移误差 ε 如图 1 所示，图中实线为四元数迭代算法（Qpicard[2]）的姿态漂移误差，短虚线为扩展算法（Uncompressed[11]）的误差，点划线为“扩展+高阶误差补偿”算法（Uncomp+Highorder[7,10]）的误差，长虚线为本文给出的“非扩展+高阶误差补偿”算法（Comp+Highorder）的误差，四种算法均采用了四子样进行解算。从图 1 中可以看出：（1）当锥角较小时 Uncompressed 算法是比较有效的，在锥角中等大小情况下须与 Highorder 算法结合才具备更高的精度（提高约两个数量级），但当锥角很大时误差较 Qpicard 大；（2）Qpicard 算法在全锥角范围内精度适中，当锥角很大时依然保持较高精度；（3）Comp+Highorder 算法在锥角不大的情况下精度与 Qpicard 算法一致，而当锥角很大时与 Uncomp+Highorder 算法几乎一样，精度均优于 Uncompressed 算法。

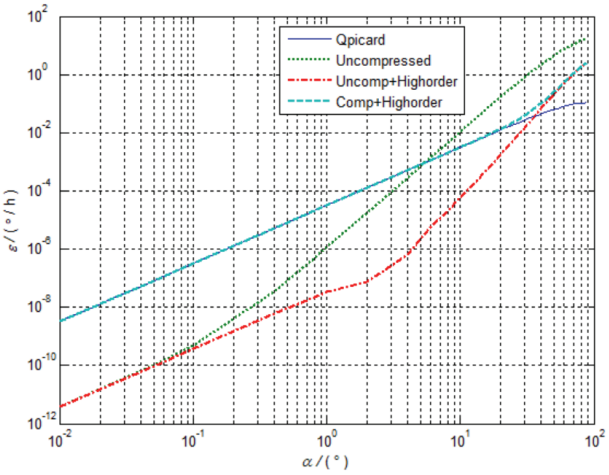


图 1　圆锥漂移误差对比

Fig.1　Comparisons for coning drift errors

3.2　大角度机动仿真

这里选用文献[2,11]中的以多项式表示的 2 s 大角度机动环境，重写多项式系数矩阵如下

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix} -25/2^6 & 10/2^5 & 2.25/2^4 & 10/2^3 & 0 \\ -1/2^6 & -8.8/2^5 & 3.6/2^4 & -2/2^3 & 0 \\ 6/2^6 & -10.8/2^5 & 18/2^4 & -10.2/2^3 & 0 \end{bmatrix} \quad (13) \quad 14$$

对 Qpicard、Uncompressed、Uncomp+Highorder 和 Comp+Highorder 四种算法进行了仿真，采样间隔 10 ms 且均为四子样算法，结果如图 2 所示。从图 2 中可以看出：（1）仅用 Uncompressed 算法精度不高；（2）Qpicard 算法精度最高，说明特别适用于大角度

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

机动情形;(3)Uncomp+Highorder 和 Comp+Highorder 两种算法的精度相当,可见在采用高阶补偿算法之后,与是否再运用扩展算法关系不大;(4)Highorder 算法与传统 Uncompressed 算法相比精度提高了三个数量级。

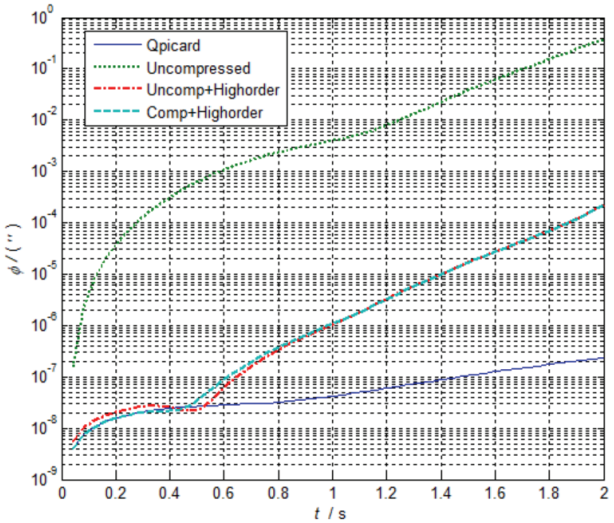


图 2 大机动失准角误差对比

Fig.2 Misalignment angle comparisons under high-maneuvering

3.3 子样数与采样间隔关系仿真

圆锥运动条件同 3.1 节,比较了四子样"扩展+高阶误差补偿"算法(Uncomp+Highorder4)与二子样高阶误差补偿算法(Highorder2)的差别,其中 Uncomp+Highorder4 的采样间隔为 10 ms、Highorder2 的采样间隔为 10 ms 并不断减半直至 0.625 ms,仿真结果见图 3。由图 3 可见,Highorder2 算法随着采样间隔的不断减小精度不断提高,且精度提高程度不受锥角大小的影响,采样间隔减半精度大约能够提高一个数量级,因此,选用高频低子样数的误差补偿算法往往比采用低频高子样数的算法更加有效。

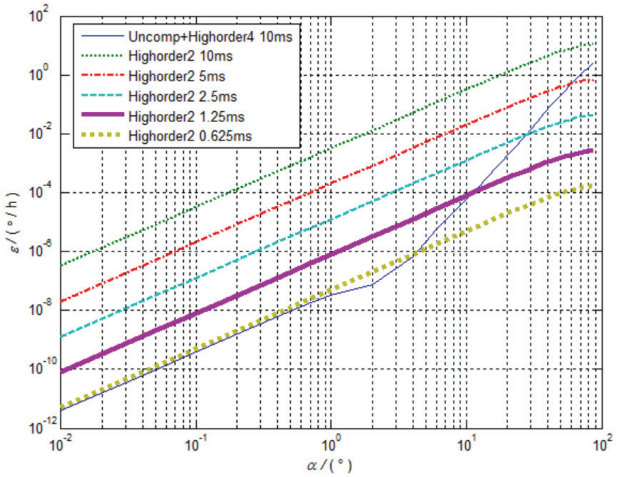


图 3 不同子样数与采用间隔下的算法漂移

Fig.3 Error drifts for different sub-sample number vs sampling interval

4 结 论

在捷联惯导系统姿态更新中,采用高阶误差补偿算法是提高等效旋转矢量解算精度一种措施,但是高阶误差系数的求解比较烦琐,文献[7]依靠解析推导的方法进行求解就出现了一处错误(参见文献[7]的表 1 中的系数 a34-1,其值-238/5885 应为-101/1874),它很难依靠公式推导发现和复核。文献[10]应用更简单的随机仿真方法修正了该处错误,最终获得了全面正确的等效旋转矢量高阶误差补偿算法。本文同样也采用随机仿真的方法求解高阶误差补偿系数,但在消除误差补偿系数间的相关性时使用矩阵秩的数值判断方法,结果更加简洁,从根本上省去了公式推导的麻烦,具有更好的通用性和可推广性。

仿真表明,针对圆锥运动环境,"扩展+高阶误差补偿"算法在锥角不是特别大的情况下精度较高;而针对多项式大角度机动环境,迭代算法的精度更高。其实,不论哪种角运动环境,提高采样频率都可以大幅度地降低姿态更新误差,采用高频低子样数的简单算法远比采用低频高子样数的高阶误差补偿复杂算法更加有效。在实际应用中,由于受陀螺仪噪声误差等因素的制约,物理传感器造成的误差可能远比数学算法引起的误差大得多,因而选用过高精度的姿态更新算法没有太多实际意义,研究高精度迭代算法和高阶误差补偿算法更多的是理论参考价值。

参考文献(References):

[1] Bortz J E. A new mathematical formulation for strapdown inertial navigation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1971, 7(1): 61-66.

[2] 严恭敏, 翁浚, 杨小康, 等. 基于毕卡迭代的捷联姿态更新精确数值解法[J]. 宇航学报, 2017, 38(12): 1307-1313.
Yan G, Weng J, Yang X, et al. An accurate numerical solution for strapdown attitude algorithm based on Picard iteration[J]. Journal of Astronautics, 2017, 38(12): 1307-1313.

[3] Wu Y. RodFIter: attitude reconstruction from inertial measurement by functional iteration[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, 54(5): 2131-2142.

[4] 严恭敏, 李思锦, 秦永元. 基于多项式迭代的等效旋转矢量微分方程精确数值算法[J]. 中国惯性技术学报,2018, 26(6): 708-712.
Yan G, Li S, Qin Y. Accurate numerical solution for differential equation of equivalent rotation vector based on polynomial iteration[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2018, 26(6): 708-712.

(下转第 396 页)

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

功能的场景或其他更复杂场景时需要进行适应性修改。

参考文献（References）：

[1] Glen A. Sanders, Steven J. Sanders, Lee K. Strandjord, et al. Fiber optic gyro development at Honeywell[C]//Proc. of SPIE. Baltimore, Maryland, United States, May 12, 2016.

[2] Y. N. Korkishko, V. A. Fedorov. Interferometric closed loop fiber optical gyroscopes for commercial and space applications[C]// Proc. of SPIE. Beijing, China, Octorber 14-17, 2012.

[3] 宋舒雯,潘雄等. 星载双光源四轴光纤陀螺光源故障诊断与处理[J]. 系统仿真技术，2017，13(3): 252-257.
Song S，Pan X, et, al. Fault diagnosis and treatment of light source in double-source four-axis fiber optic gyroscope for satellite, system simulation technology[J]. 2017, 13(3): 252-257.

[4] 王瑾，李波，等. 利用导通电压降监测 SLD 的输出光功率[J]. 红外与激光工程，2016，45(2): 183-187.
Wang J, Li B, et, al. Monitoring SLD optical output power with conduction voltage drop. Infrared and Laser Engineering[J]. 2016, 45(2): 183-187.

[5] Zhu X, Chen X, Shu X, et al. Eigen frequency measurements of a fiber optic gyroscope based on a staircase waveform with large temperature range[J]. Applied Optics, 2019, 58(6): 1562-1568.

[6] 张桂才，马骏，等. 宽带光源光谱不对称性对光纤陀螺性能的影响[J]. 中国惯性技术学报，2017，25(5): 670-675.
Zhang G, Ma J, et al. Effect of spectral asymmetry of broadband light source on performance of fiber optic gyro[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2017, 25(5): 670-675.

[7] 吴军伟，缪玲娟，等. 基于增益自补偿的光纤陀螺瞬态噪声抑制方法[J]. 中国惯性技术学报，2018，26(3): 370-374.
Wu J, Miao L. et al. Method for restraining transient noise of FOG based on gain self-compensation. Journal of Chinese Inertial Technology, 2018, 26(3): 370-374.

[8] Kyoung-Ho Chong, Woo-Seok Choi, Kil-To Chon, et al. Analysis of dead zone sources in a closed-loop fiber optic gyroscope[J]. Applied Optics, 2016, 55(1): 165-170.

[9] J. Chamoun, M. J. Digonnet. Pseudo-random-bit - sequence phase modulation for reduced errors in a fiber optic gyroscope[J]. Optics Letters, 2016, 41: 5664-5667.

[10] J. Chamoun and M. J. F. Digonnet. Aircraft-navigation-grade laser driven FOG with Gaussian-noise phase modulation[J]. Optics Letters, 2017, 42: 1600-1603.

[11] Li X, Zhang Y, Yu Q. Four-state modulation in fiber optic gyro[C]//Proceedings of 2008 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation, Changchun, China, August 05-08, 2008.

（上接第 352 页）

[5] 严恭敏, 杨小康, 翁浚, 等. 一种无误差的捷联惯导数值更新新算法[J]. 导航定位学报, 2018,6(2): 20-22, 35.
Yan G, Yang X, Weng J, et al. A new error free algorithm for SINS numerical updating[J]. Journal of Navigation and Positioning, 2018, 6(2): 20-22, 35.

[6] Xu Z, Xie J, Zhou Z, et al. Accurate direct strapdown direction cosine algorithm[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2019, 55(4): 2045-2053.

[7] Wang M, Wu W, He X, et al. Higher-order rotation vector attitude updating algorithm[J]. Journal of Navigation, 2019, 72(3): 721-740.

[8] Savage P G. A unified mathematical framework for strapdown algorithm design[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2006, 29(2): 237–249.

[9] 严恭敏, 杨小康, 翁浚, 等. 一种求解姿态不可交换误差补偿系数的通用方法[J]. 宇航学报, 2017, 38(7): 723-727.
Yan G, Yang X, Weng J, et al. General method to obtain noncommutativity error compensation coefficients for strapdown attitude algorithm[J]. Journal of Astronautics, 2017, 38(7): 723-727..

[10] Zhang L, Zhang T, Wang M, et al. A high-order coning error compensation algorithm under high rate maneuvering[J]. IEEE Sensors, 2020, 20(1): 208-218.

[11] 宋敏. 高动态下捷联惯性导航算法误差分析与优化方法研究[D]. 长沙：国防科学技术大学博士论文，2012.
Song M. Research on error analysis and optimization methods for strapdown inertial navigation algorithm under highly dynamic environment[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2012.

(C)1994-2020 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

IOP Publishing Measurement Science and Technology
Meas. Sci. Technol. **32** (2021) 095012 (7pp) https://doi.org/10.1088/1361-6501/ac02f5

A super-fast optimal attitude matrix in attitude determination

Yan Gongmin[1,*], Chen Ruotong[1] and Weng Jun[2]

[1] School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, People's Republic of China
[2] School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an, People's Republic of China

E-mail: yangongmin@nwpu.edu.cn

Received 23 November 2020, revised 8 May 2021
Accepted for publication 19 May 2021
Published 7 June 2021

Abstract

The fast optimal attitude matrix (FOAM) for minimizing Wahba's loss function solves the optimal attitude matrix directly and efficiently. This method is more intuitive compared with the method of calculating attitude quaternion. A method named super-FOAM (SFOAM) is proposed with a more precise initial iteration value and a faster iterative algorithm. A condition number estimation method of third-order matrices is presented for cases without exact singular value. When the matrix condition number is not particularly large, the root-seeking formula for the quartic equation is directly used to obtain the maximum characteristic root. Otherwise, under large condition numbers, a high-accuracy estimation algorithm for the maximum eigenvalue is given to achieve a high-accuracy initial value set, which is beneficial to iteration reduction and convergence speed improvement. Finally, some comparative simulations show that the SFOAM method has the same accuracy as the singular value decomposition (Matlab) method even in the case of a very large matrix condition number, while the SFOAM's computation is only 50%–60% of the traditional FOAM algorithm. This algorithm has good generalization and application values.

Keywords: attitude determination, Wahba's problem, super-FOAM method, singular value decomposition, condition number, Halley iteration

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

1. Introduction

Along with the development of space exploration, requirements for attitude measurement are rapidly increasing. Attitude determination is a crucial part of conventional navigation technologies. Earlier research on attitude determination algorithms mainly originated from solving the problem of spacecraft attitude determination. The algebraic method tRIaxial attitude determination was proposed by Harold Black in 1964 which obtains the attitude matrix with two sets of observation vectors. In 1965, Grace Wahba proposed a least squares estimation problem (The Wahba problem) of attitude determination using vector observations [1]. The first solution was provided by Davenport. Davenport converted the Wahba problem to an eigenvalue problem, which is called q-method [2]. The QUEST method [3] transforms the 3×3 attitude matrix optimization problem into solving the unit eigenvector corresponding to the largest eigenvalue of a 4×4 matrix, which is the required attitude quaternion. As the computers at the early time were not powerful enough, a series of improved fast optimization algorithms were proposed, such as fast optimal attitude matrix (FOAM), EStimator of the Optimal Quaternion (ESOQ), ESOQ2 (second ESOQ), etc, which were primarily used to reduce the computation and improve numerical robustness [4–7]. Researchers generally believe that quaternion optimization has fewer constraints compared with the attitude matrix optimization, so they mainly concentrate on quaternions. Actually, the quaternion optimization of the Wahba problem is completely equivalent to matrix optimization [8]. The maximum eigenvalue of the 4×4 matrix corresponds to the sum of the three

* Author to whom any correspondence should be addressed.

 © 2021 IOP Publishing Ltd Printed in the UK

singular values of the 3 × 3 matrix (denoted as λ). It can be obtained by solving a quartic equation. The only difference is whether λ is utilized to calculate the quaternion or the 3 × 3 attitude matrix. Both have almost the same amount of calculation.

In the initial alignment of strapdown inertial navigation systems, many researchers have transformed the initial alignment problem into the Wahba problem recently [9–12]. It is obvious that the condition number of the optimized attitude matrix is very large, often more than 10^{10}. However, the matrix condition number is generally small in satellite attitude determination problem, which is a significant difference between the two applications' statuses. The FOAM algorithm proposed in [4] was cleverly conceived but slightly cumbersome in the derivation process. This paper deduced the FOAM algorithm with a more concise thought firstly, which can be regarded as verifying proof and easy to understand. Secondly, A new 3 × 3 matrix condition number estimation formula is given in advance. The super-FOAM (SFOAM) is proposed to improve the traditional FOAM by setting a more precise initial iteration value and selecting an iterative algorithm with a faster convergence speed. Finally, comparative simulations demonstrate that the accuracy of the SFOAM algorithm is the same as that of the singular value decomposition (Matlab\SVD) algorithm even in the case of large matrix condition numbers, while the SFOAM's computation burden is only 50%–60% of the traditional FOAM algorithm.

2. The singular value decomposition algorithm for attitude matrix optimization

Assume that there are m ($m \geqslant 2$) noncoplanar vectors $\boldsymbol{v}_i$ ($i = 1,2,\ldots, m$) in the three-dimensional space. These vectors are both measured simultaneously in body frame b and reference frame r, denoted by $\tilde{\mathbf{v}}_i^r$ and $\tilde{\mathbf{v}}_i^b$. The 'attitude profile matrix' $\boldsymbol{B}$ is defined by

$$\boldsymbol{B} = \sum\nolimits_{i=1}^{m} w_i \tilde{\boldsymbol{v}}_i^r (\tilde{\boldsymbol{v}}_i^b)^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

where w_i are non-negative weights. The matrix $\boldsymbol{B}$ always has the SVD decomposition

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U} \cdot \mathrm{diag}\left(s_1, s_2, |s_3|\right) \cdot \boldsymbol{V}^T \tag{2}$$

where, $\boldsymbol{U}$ and $\boldsymbol{V}$ are both 3 × 3 unit orthogonal matrices; diag(•) denotes a matrix with the indicated elements on main diagonal and zeros elsewhere. $s_1 \geqslant s_2 \geqslant |s_3| \geqslant 0$ are the singular values of $\boldsymbol{B}$ and s_3 can be zero or negative. Generally, to get the only optimization result, we assume $s_1 \geqslant s_2 > 0$, and $\boldsymbol{B}$ satisfies rank ($\boldsymbol{B}$) $\geqslant 2$ in the actual attitude determination problem. Rewrite equation (2) as

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{U}_+ \cdot \mathrm{diag}\left(s_1, s_2, s_3\right) \cdot \boldsymbol{V}_+^T \tag{3}$$

where $\boldsymbol{U}_+$ and $\boldsymbol{V}_+$ are both 3 × 3 unit orthogonal matrices with positive determinant.

Define the optimization loss function as

$$J(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\|^2 = \min \tag{4}$$

where $\|\bullet\|$ denotes the Frobenius norm. The optimal attitude matrix that satisfies equation (4) is

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}_+ \boldsymbol{V}_+^T = \boldsymbol{U} \cdot \mathrm{diag}\left(1, 1, \det(\boldsymbol{U}\boldsymbol{V}^T)\right) \cdot \boldsymbol{V}^T \tag{5}$$

where det(•) denotes the determinant of a matrix.

3. Basic principles of traditional FOAM algorithm

To make a brief introduction, the following is about the traditional FOAM algorithm.

Based on the matrix theory, we will have the following equations

$$\det(\mathbf{B}) = s_1 s_2 s_3. \tag{6}$$

$$\|\mathbf{B}\|^2 = \mathrm{tr}(\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}) = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2. \tag{7}$$

$$\left(\mathbf{B}^T\right)^* = \mathbf{B}^{-T} \det(\mathbf{B}) = \mathbf{U}_+ \cdot \mathrm{diag}\left(s_2 s_3, s_3 s_1, s_1 s_2\right) \cdot \mathbf{V}_+{}^T. \tag{8}$$

$$\left\| \left(\boldsymbol{B}^T\right)^* \right\|^2 = (s_1 s_2)^2 + (s_2 s_3)^2 + (s_3 s_1)^2 \tag{9}$$

where tr(•), $(\bullet)^*$ denote the trace of a matrix and adjoint matrix respectively.

For convenience, we set the following parameters

$$\lambda = s_1 + s_2 + s_3 \tag{10}$$

$$\kappa = \left(\lambda^2 - \|\boldsymbol{B}\|^2\right)/2 = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 \tag{11}$$

$$\zeta = \kappa\lambda - \det(\boldsymbol{B}) = (s_1 + s_2)(s_2 + s_3)(s_3 + s_1) \tag{12}$$

Let

$$\boldsymbol{A} = \left[\left(\kappa + \|\boldsymbol{B}\|^2\right)\boldsymbol{B} + \lambda\left(\boldsymbol{B}^T\right)^* - \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{B}\right]/\zeta \tag{13}$$

With the substitution of equations (10)–(12) into equation (13) gives

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\zeta}\Bigg\{ &\begin{bmatrix} (s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) \\ +(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) \end{bmatrix} \boldsymbol{U}_+ \cdot \mathrm{diag}\left(s_1, s_2, s_3\right) \cdot \boldsymbol{V}_+{}^T \\ &+ (s_1 + s_2 + s_3)\boldsymbol{U}_+ \cdot \mathrm{diag}\left(s_2 s_3, s_3 s_1, s_1 s_2\right) \cdot \boldsymbol{V}_+{}^T \\ &- \boldsymbol{U}_+ \cdot \mathrm{diag}\left(s_1^3, s_2^3, s_3^3\right) \cdot \boldsymbol{V}_+{}^T \Bigg\} \\ \triangleq \frac{1}{\zeta}\boldsymbol{U}_+ &\begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \boldsymbol{V}_+{}^T = \frac{1}{\zeta}\boldsymbol{U}_+ \boldsymbol{D} \boldsymbol{V}_+{}^T. \end{aligned} \tag{14}$$

Obviously, matrix $\boldsymbol{D}$ is a diagonal matrix, with D_{11} expanded as

$$\begin{aligned} D_{11} &= \left[(s_1s_2+s_2s_3+s_3s_1)+(s_1^2+s_2^2+s_3^2)\right]s_1 \\ &\quad +(s_1+s_2+s_3)s_2s_3-s_1^3 \\ &= (s_1+s_2)(s_2+s_3)(s_3+s_1)=\zeta. \end{aligned} \tag{15}$$

Likewise, we also have the similar result $D_{22}=D_{33}=\zeta$. Then equation (14) can be simplified to

$$\mathbf{A}=1/\zeta\cdot\mathbf{U}_+\mathrm{diag}\,(D_{11},D_{22},D_{33})\,\mathbf{V}_+{}^T=\mathbf{U}_+\mathbf{V}_+{}^T. \tag{16}$$

It happens that the above equation is the optimal attitude matrix, and equation (13) is the calculation formula to obtain the desired optimal attitude matrix.

The key point in equation (13) is that the parameter λ must be obtained first, for which a quartic polynomial is constructed as follows

$$\psi(x)=\left(x^2-\|\mathbf{B}\|^2\right)^2-8x\det(\mathbf{B})-4\left\|\left(\mathbf{B}^T\right)^*\right\|^2. \tag{17}$$

By substituting the related parameters into equation (17), we will have

$$\begin{aligned} \psi(x) &= (x+s_1+s_2-s_3)(x+s_1-s_2+s_3) \\ &\quad \times(x-s_1+s_2+s_3)(x-s_1-s_2-s_3). \end{aligned} \tag{18}$$

It is easy to prove that λ is the largest positive real root of equation $\psi(\lambda)=0$. Usually, the Newton iteration method is adapted to solve the largest root λ. That is

$$\lambda_{k+1}=\lambda_k-\psi(\lambda_k)/\psi'(\lambda_k)\quad(k=0,1,2,\cdots). \tag{19}$$

The derivation of equation (17) gives

$$\psi'(x)=4\left(x^2-\|\mathbf{B}\|^2\right)x-8\det(\mathbf{B}). \tag{20}$$

It is worth mentioning that, compared with equation (17), the following formula is always used to get a higher accurate numerical solution when calculating $\psi(\lambda_k)$ in the iteration

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \left[x-\sqrt{\|\mathbf{B}\|^2+2\left\|(\mathbf{B}^T)^*\right\|}\right]\left[x+\sqrt{\|\mathbf{B}\|^2+2\left\|(\mathbf{B}^T)^*\right\|}\right] \\ &\quad \left[x^2+2\left\|\left(\mathbf{B}^T\right)^*\right\|-\|\mathbf{B}\|^2\right]-8x\det(\mathbf{B}). \end{aligned} \tag{21}$$

By using equations (19)–(21) iteratively to find the root λ, the amount of calculation is relatively small. The norm and determinant of matrix $\boldsymbol{B}$ can be calculated and stored in advance, and we can directly read these values from the memory in real-time during the iteration process, which will reduce the computation significantly. Each Newton iteration only requires about 10 multiplication operations.

In the traditional FOAM algorithm, the initial iteration value is generally set by the weighting coefficient w_i and the measured value $\tilde{\mathbf{v}}_i^b$ in equation (1), or just selected as $\lambda_0=1$. Whereas these initial values are not very reliable and not advantageous to reducing computation burden.

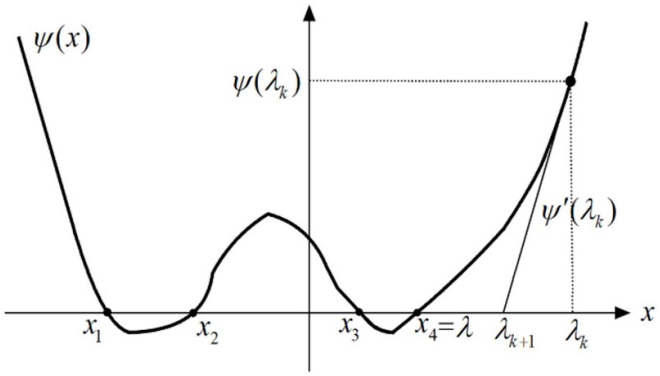


Figure 1. The roots for $\psi(x)=0$ and Newton method.

4. The improved SFOAM algorithm

Two measures are taken in the improved SFOAM algorithm. One is setting a more precise initial iteration value. The other is selecting an iterative algorithm with a faster convergence speed. Both help to reduce the iterations under the same numerical accuracy requirements.

4.1. Initial iteration value setting

4.1.1. Method I. It is obvious that the equation $\psi(\lambda)=0$ has four real roots according to equation (18), denoted by $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3\leqslant x_4$ (see figure 1). There is at least one negative root, $x_1=s_3-s_1-s_2<0$; and at least one positive root, $x_4=s_1+s_2+s_3>0$; while the signs of roots x_2 and x_3 are both indeterminate. The distance between x_3 and x_4 is $x_4-x_3=2(s_2+s_3)$. And the distance between x_2 and x_4 is $x_4-x_2=2(s_1+s_3)$. When $s_2=-s_3$, x_4 is a double root. And when $s_1=s_2=-s_3$, x_4 is a triple root. Regardless of whether x_4 is a double or triple root there is $s_2+s_3=0$, we will get $\zeta=0$ with equation (12). And then equation (13) cannot be used to calculate the optimal attitude matrix. Thus, the traditional FOAM algorithm is only suitable for the case when x_4 is a single root. Considering $s_1\geqslant s_2\geqslant|s_3|\geqslant 0$, it can be concluded that the necessary and sufficient condition for FOAM to obtain the only optimal attitude matrix is $s_2+s_3\neq 0$.

It is easy to know from the quartic curve (see figure 1) that in the case of single real root x_4, when $x\geqslant x_4=\lambda$, $\psi'(x)>0$ always holds. As long as the initial iteration value λ_0 is not less than λ, the iterative result can be guaranteed to converge correctly, as $\lambda_{k\to\infty}\to\lambda=x_4$, but not converging to other real roots.

Considering equations (7)–(11), the following inequality holds

$$\begin{aligned} 3\|\boldsymbol{B}\|^2-\lambda^2 &= 3(s_1^2+s_2^2+s_3^2)-(s_1+s_2+s_3)^2 \\ &= (s_1-s_2)^2+(s_2-s_3)^2+(s_3-s_1)^2\geqslant 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Thus, we can select the initial iteration value λ_0 to satisfy $\lambda_0\geqslant\lambda$, as

$$\lambda_0=\sqrt{3\|\mathbf{B}\|^2}. \tag{23}$$

4.1.2. Method II. According to equation (3), the condition number of matrix **B** is calculated as

$$\mathrm{cond}(\mathbf{B}) = s_1/|s_3|. \tag{24}$$

We give a new condition number defination as

$$\mathrm{cond}'(\mathbf{B}) = \|\mathbf{B}\| \cdot \left\|\left(\mathbf{B}^T\right)^*\right\| / |\det(\mathbf{B})|. \tag{25}$$

Now combining equations (6)–(9) with equation (25), the following inequalities can be easily established

$$\begin{cases} \mathrm{cond}'(\boldsymbol{B}) > \dfrac{\sqrt{s_1^2}\cdot\sqrt{(s_1s_2)^2}}{s_1s_2|s_3|} = \dfrac{s_1}{|s_3|} = \mathrm{cond}(\boldsymbol{B}) \\ \mathrm{cond}'(\boldsymbol{B}) \le \dfrac{\sqrt{3s_1^2}\cdot\sqrt{3(s_1s_2)^2}}{s_1s_2|s_3|} = \dfrac{3s_1}{|s_3|} = 3\mathrm{cond}(\boldsymbol{B}) \end{cases}. \tag{26}$$

Hence, before getting the exact singular value of matrix $\boldsymbol{B}$, $\mathrm{cond}'(\bullet)$ can be used to accurately estimate the level of the condition number, hereinafter we also call $\mathrm{cond}'(\bullet)$ as matrix condition number.

For the case of the large condition number of $\boldsymbol{B}$, there exists $s_1 \gg |s_3|$ and $s_1 \geqslant s_2$, so we have

$$\begin{aligned} \sqrt{\|\mathbf{B}\|^2 + 2\left\|\left(\mathbf{B}^T\right)^*\right\|} &\approx \sqrt{(s_1^2+s_2^2+s_3^2)+2s_1s_2} \\ &\approx s_1+s_2+s_3 = \lambda. \end{aligned} \tag{27}$$

And then we can select the initial value of Newton iteration method as

$$\bar{\lambda}_0 = \sqrt{\|\mathbf{B}\|^2 + 2\left\|\left(\mathbf{B}^T\right)^*\right\|}. \tag{28}$$

Substituting equation (28) into equation (20) and considering equations (6)–(9), we can have

$$\begin{aligned} \psi'(\bar{\lambda}_0) &= 4\left(\left(\bar{\lambda}_0\right)^2 - \|\mathbf{B}\|^2\right)\bar{\lambda}_0 - 8\det(\mathbf{B}) \\ &> 8\sqrt{(s_1s_2)^2}\sqrt{s_1^2} - 8s_1s_2s_3 = 8s_1s_2(s_1-s_3) > 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Obviously, equation (18) leading to $x_3 = s_1 - s_2 - s_3$, we can see that $\lambda_0 > x_3$ always holds. It shows that when $\mathrm{cond}'(\boldsymbol{B})$ is relatively large, the initial value λ_0 can always converge to λ. Compared with λ_0 in equation (23), λ_0 is closer to the true value λ.

4.1.3. Method III. By expanding equation (17), we will get

$$f(x) = x^4 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{30}$$

where

$$\begin{cases} b = -2\|\mathbf{B}\|^2 \\ c = -8\det(\mathbf{B}) \\ d = \|\mathbf{B}\|^4 - 4\left\|\left(\mathbf{B}^T\right)^*\right\|^2 \end{cases}. \tag{31}$$

According to the previous analysis, equation (30) contains four real roots theoretically. The root-seeking formula for the quartic equation [13] can be simplified to obtain the largest root x_4 when $\Delta < 0$, denoted as

$$\bar{\bar{\lambda}}_0 = x_4 = \left(sign(E)\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2} + \sqrt{y_3}\right)/4 \tag{32}$$

where, each intermediate process parameters are as follows

$$\begin{cases} D = -8b = 16\|\boldsymbol{B}\|^2 \\ E = -8c = 64\det(\boldsymbol{B}) \\ F = 16b^2 - 64d = 256\left\|\left(\boldsymbol{B}^T\right)^*\right\|^2 \\ A = D^2 - 3F = 256\left(\|\boldsymbol{B}\|^4 - 3\left\|\left(\boldsymbol{B}^T\right)^*\right\|^2\right) \\ B = DF - 9E^2 \\ C = f^2 - 3DE^2 \end{cases} \tag{33}$$

$$\Delta = B^2 - 4AC \tag{34}$$

$$\begin{cases} y = (3B - 2AD)/\left(2A\sqrt{A}\right) \\ \theta = \arccos(y) \\ y_1 = \left[D - 2\sqrt{A}\cos(\theta/3)\right]/3 \\ y_{2,3} = \left\{D - 2\sqrt{A}\cos\left[(\theta \pm 2\pi)/3\right]\right\}/3 \end{cases}. \tag{35}$$

A little algebra shows that $D > 0$; $F > 0$ and $A \geqslant 0$ under the condition of $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) \geqslant 2$. When programming the square root of the A and y_i, if there exist negative numbers due to numerical calculation errors, we just set them as zero. If $A = 0$, let $y_1 = y_2 = y_3 = D/3$. Theoretically, the range of y in equation (35) is $[-1,1]$. y can be processed as the boundary value while its calculated value exceeds the range, so the subsequent cosine calculation will proceed normally. In fact, the three components $\sqrt{y_2}/4 \geqslant \sqrt{y_3}/4 \geqslant \sqrt{y_1}/4$ in equation (32) are exactly the three singular values of $\boldsymbol{B}$.

4.1.4. The selection criteria for initial iteration value. Generally, if $\mathrm{cond}'(\mathbf{B})$ is small, such as less than 10^2, equation (32) will be accurate enough to meet requirements, which has higher numerical accuracy than equation (23).

If $\mathrm{cond}'(\boldsymbol{B})$ is relatively large, and due to higher-power operations of matrices in equation (31), the numerical calculation error in the root-seeking formula equations (33)–(35) may be relatively large. In this case, by using equation (32) as the initial iteration value, we will get a more accurate solution.

If $\mathrm{cond}'(\boldsymbol{B})$ is particularly large, such as greater than 10^8, the accuracy of equation (28) is higher than equation (32).

According to the above analysis, the selection criteria for the initial iteration value is listed in table 1.

It can be seen from the comparison of accurate performance in table 1 that λ_0 and $\bar{\bar{\lambda}}_0$ are mainly used in most cases. λ_0 is selected when $\mathrm{cond}'(\boldsymbol{B}) > 10^8$, while $\bar{\bar{\lambda}}_0$ is selected when

Table 1. The selection criteria for initial iteration value.

cond′(**B**)	Method	Accurate performance
$<10^2$	λ_0	$\Delta = 0$; The exact solution
	$\bar{\bar{\lambda}}_0$	$\Delta < 0$; High precision
10^2–10^8	$\bar{\bar{\lambda}}_0$	The error gradually increases as the condition number increases
	$\bar{\lambda}_0$	The error gradually decreases as the condition number increases
$>10^8$	$\bar{\lambda}_0$	High precision

$\mathrm{cond}'(\boldsymbol{B}) \leqslant 10^8$. Under the condition of $\Delta = 0$, the three singular values of matrix $\boldsymbol{B}$ are equal, and $\lambda_0 = \sqrt{3\|\boldsymbol{B}\|^2}$ is the exact solution.

4.2. The Halley iteration for faster convergence speed

Since x_4 is the single root of $\psi(\lambda) = 0$, the Newton iteration method is quadratic convergence near the single root. Here we adapt Halley iteration method to improve the convergence rate, which has third-order convergence. That is

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{2\psi(\lambda_k)\psi'(\lambda_k)}{2[\psi'(\lambda_k)]^2 - \psi(\lambda_k)\psi''(\lambda_k)} \tag{36}$$

where $\psi''(\lambda_k)$ denotes the second-order derivative. The derivation of equation (20) leads to

$$\psi''(x) = 4\left(3x^2 - \|\boldsymbol{B}\|^2\right). \tag{37}$$

We can easily see that the Newton iteration equation (19) is a special case of the Halley iteration equation (36) in the condition of $\psi''(\lambda_k) = 0$.

Certainly, an iterative algorithm with higher convergence order can also be used [14]. However, after some simulation verification, high-order iteration method does not significantly improve the actual convergence speed and its stability may deteriorate. So, the Halley iteration is considered in this paper for its high convergence order and good stability. If the initial iteration value is set more accurate, of course, the times of iterations of high-order convergence iterative algorithms will not be much different from the basic Newton iteration.

4.3. The SFOAM calculation procedure

Based on the above analysis, the main calculation procedure of the SFOAM algorithm is given in table 2.

Letting Mul denotes a multiplication operation, Tri denotes a trigonometric operation and Squ denotes a square root operation. The calculation operations required for each step of the SFOAM algorithm are given in table 3.

It is obvious that the Halley iteration calculation in steps 3 and 4 increases five multiplication operations compaired with the Newton iteration's, that is, the number of multiplications in each Halley iteration is 1.5 times more than the Newton iteration's. In addition, step 2 requires about 20 multiplications to calculate the initial iteration value $\bar{\bar{\lambda}}_0$ and also includes three trigonometric operations and four square root operations, while only one multiplication and two square root operations are required if we select the initial value λ_0. Step 6 requires about 45 multiplications operations. Except for iterative steps 3 and 4, the amount of multiplication operations is at most 140.

Table 2. The SFOAM calculation procedure.

1: Pre-calculate $\det(\boldsymbol{B}), \|\boldsymbol{B}\|^2, (\boldsymbol{B}^T)^*, \left\|(\boldsymbol{B}^T)^*\right\|^2$. If $\|\boldsymbol{B}\|^2\left\|(\boldsymbol{B}^T)^*\right\|^2 = 0$, then $\mathrm{rank}(\boldsymbol{B}) < 2$, leading to no FOAM solution and stop calculation, or else go to the next step.
2: If the condition number $\mathrm{cond}'(\boldsymbol{B})$ is large, then use equation (28) to calculate the initial iteration value λ_0. Otherwise, use equation (32) to calculate $\bar{\bar{\lambda}}_0$. Particularly, use equation (23) to calculate λ_0 while $\Delta = 0$.
3: Calculate κ, ζ, $\psi(\lambda_k)$, $\psi'(\lambda_k)$ with equations (11)–(37). Stop calculation if $\zeta = 0$, or else go to the next step.
4: Iteratively calculate λ_{k+1} with equation (36).
5: Repeat steps 3 and 4, and terminate if the relative error meets $|\lambda_k/\lambda_{k+1} - 1| < \varepsilon$, where ε denotes a specified threshold slightly greater than zero.
6: Obtain the optimal attitude matrix $\boldsymbol{A}$ with equation (13).

Table 3. The SFOAM calculation operations.

Step		Mul	Tri	Squ
1		75	0	0
2	λ_0	1	0	1
	$\bar{\lambda}_0$	1	0	2
	$\bar{\bar{\lambda}}_0$	20	3	4
3 and 4	Newton	10	0	0
	Halley	15	0	0
6		45	0	0

5. Simulation results

In this section, the aforementioned theoretical analysis of the optimal attitude matrix is verified by numerical simulation. The simulation scenario is as follows.

(1) Randomly generate a 3×3 square matrix $\boldsymbol{B}_0$ whose rank is no less 2 and each element of $\boldsymbol{B}_0$ obeys a standard normal distribution.
(2) Calculate the SVD of $\boldsymbol{B}_0$, denoted by $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{U}_0\boldsymbol{\Sigma}_0\boldsymbol{V}_0{}^{\mathrm{T}}$, then get the reference attitude matrix $\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{U}_{0+}\boldsymbol{V}_{0+}{}^{\mathrm{T}}$.
(3) Generate a uniformly distributed random number r_i (i = 1,2,3) in the interval $[-8, 8]$, and then calculate $\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{U}_0\,\mathrm{diag}(10^{r1}\ 10^{r2}\ 10^{r3})\,\boldsymbol{V}_0{}^{\mathrm{T}}$.
(4) The SFOAM algorithm, FOAM algorithm (Using Newton iteration with initial iteration value $\lambda_0 = \sqrt{3\|\mathbf{B}\|^2}$) and SVD algorithm (using Matlab/SVD function) are respectively used to solve the optimal attitude matrix. The thresholds for terminating iterations of the two FOAM algorithms are both set as $\varepsilon = 10^{-15}$.

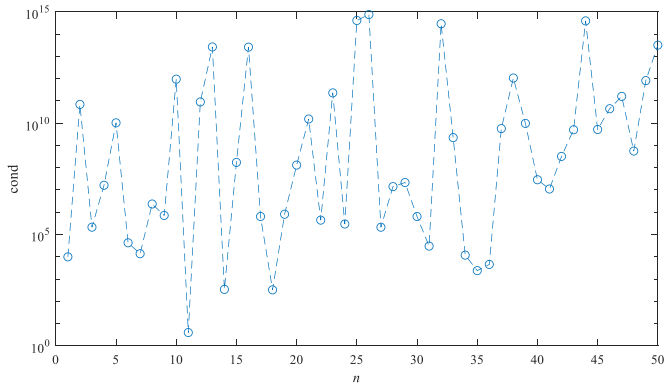


Figure 2. Condition number.

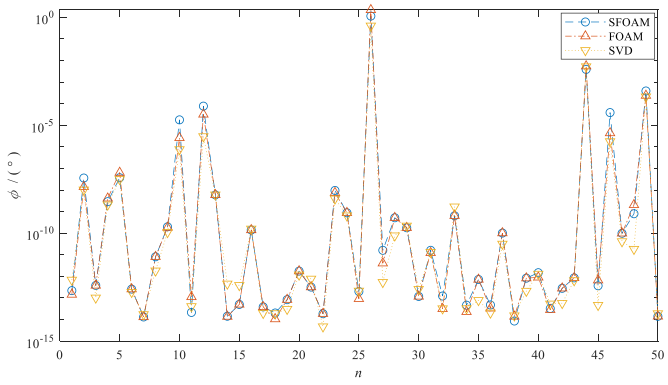


Figure 3. ϕ errors of the three algorithms.

(5) Calculate the modulus ϕ of the misalignment angle error of the three algorithms relative to $\boldsymbol{C}_0$, and record the iterations times k and the condition number cond($\boldsymbol{B}$) of the SFOAM and FOAM algorithms.
(6) Repeat steps (1)–(5) for a total of 50 times. The numerical simulation results are shown in figure 2.

By taking the error of the SVD algorithm in figure 3 as the accuracy reference, figures 2 and 3 demonstrate that there is no obvious difference in the accuracy of the three algorithms of SFOAM, FOAM, and SVD regardless of the condition number of matrix $\boldsymbol{B}$, even as high as nearly 10^{15}.

According to the condition number, we divide it to three interval: the small condition number of 10^0–10^5, the medium condition number of 10^5–10^{10}, and the large condition number of 10^{10}–10^{15} respectively, shown in figure 4.

Figure 4 demonstrates that the iteration times of the SFOAM algorithm are basically not affected by the matrix condition number and are significantly smaller than that of the FOAM algorithm. As matrix $\boldsymbol{B}$ is randomly generated during each simulation, the number of simulated points in small, medium and large analysis interval may not be the same. But this does not prevent us from reaching a consistent conclusion.

In the case of small condition numbers of 10^0–10^5, the iteration times of the SFOAM algorithm are much smaller than that of the FOAM algorithm. The average iteration times of

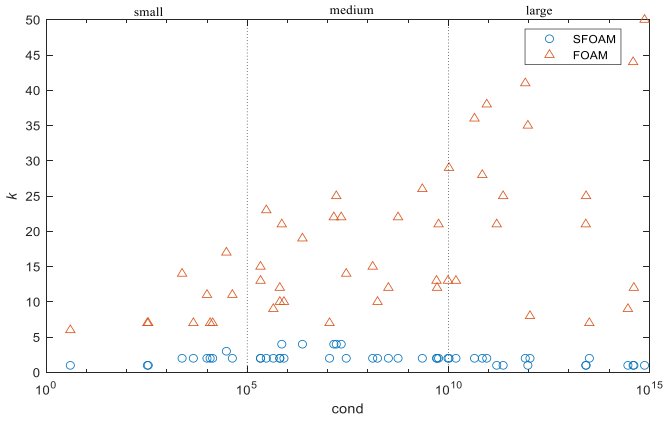


Figure 4. Iteration number.

Table 4. The differences of k and $k_{\max}$ between SFOAM and FOAM.

	Small	Medium	Large
k_{SF}	2.00	2.40	1.25
k_{F}	11.50	19.85	24.83
k_{SFmax}	4	4	2
k_{Fmax}	23	38	50

the SFOAM algorithm is $k_{\mathrm{SF}} = 2.00$, and the maximum iteration times is $k_{\mathrm{SFmax}} = 4$. The average iteration times of the FOAM algorithm is $k_{\mathrm{F}} = 11.50$, and the maximum iterations times is $k_{\mathrm{Fmax}} = 23$.

In the case of medium condition numbers of 10^6–10^{10}, the average iteration times of the SFOAM algorithm is $k_{\mathrm{SF}} = 2.40$, and the maximum iteration times is $k_{\mathrm{SFmax}} = 4$. The average iteration times of the FOAM algorithm is $k_{\mathrm{F}} = 19.85$, and the maximum iteration times is $k_{\mathrm{Fmax}} = 38$.

In the case of large condition numbers of 10^{11}–10^{15}, the average iteration times of the SFOAM algorithm is $k_{\mathrm{SF}} = 1.25$, and the maximum iteration times is $k_{\mathrm{SFmax}} = 2$. The average iteration times of the FOAM algorithm is $k_{\mathrm{F}} = 24.83$, and the maximum iteration times is $k_{\mathrm{Fmax}} = 50$.

By comparing the above data analysis we find that when the condition number increases, both the average iteration times k and the maximum iteration times $k_{\max}$ of the FOAM algorithm are gradually increasing. On the contrary, when using the SFOAM algorithm, it is obvious that it performs better in the case of large condition numbers. These differences are arranged and listed in table 4.

According to statistics in the entire simulation, the average iteration times of the SFOAM algorithm and FOAM algorithm are $k_{\mathrm{SF}} = 1.98$ and $k_{\mathrm{F}} = 18.04$ respectively. The maximum iteration times are $k_{\mathrm{SFmax}} = 4$ and $k_{\mathrm{Fmax}} = 50$ algorithms. The computation of the SFOAM algorithm is only 1.5 $k_{\mathrm{SF}}/k_{\mathrm{F}} \approx 16.3\%$ of the FOAM algorithm's if just compare the computation in the iterative process. When considering the computation of the whole attitude optimization algorithms, the computation of the SFOAM algorithm is only about half of the FOAM algorithm's. That is

$$\frac{\bar{k}_S \times M_S + N_S}{\bar{k}_F \times M_F + N_F} = \frac{169.7}{300.4} \approx 56.5\% \tag{38}$$

where M denotes the amount of multiplication required to complete an iteration, N denotes the amount of multiplication required to complete the remaining steps. The subscript represents SFOAM algorithm or FOAM algorithm.

Actually, the computation of the SFOAM algorithm in the iterative process takes a small proportion, only $k_S \times M_S/N_S \approx 21\%$ and mainly occurred in the early stage of data preparation and the later stage of optimal attitude matrix calculation. If the SFOAM algorithm uses the initial iteration value $\bar{\bar{\lambda}}_0$, it will take three more trigonometric operations and four more square root operations, which depend on the computation of the computer complier library functions during programming. However, the library functions are usually very fast. If the SFOAM algorithm uses the initial iteration value λ_0, the amount of calculation will be relatively small.

In fact, since matrix $\boldsymbol{B}$ is randomly generated during each simulation, the values of each simulation will be slightly different. But the conclusions after multiple simulations are consistent with the above analysis.

6. Conclusions

The advantage of the FOAM algorithm is that the 3×3 matrix optimization problem is transformed into a scalar equation optimization problem, i.e. the solution of the largest root of a quartic equation, which can greatly reduce the amount of calculation. In the case of large matrix condition number, it requires higher accuracy to solve the maximum eigenvalue of the quartic equation, hence the method with high-accuracy initial value and Halley iteration is presented to effectively improve the iterative convergence speed. Numerical simulation demonstrates that the computation burden of the presented SFOAM algorithm is only about half of the traditional ones, and mainly depends on some necessary matrix operations. Meanwhile, the computation of the largest root of the quartic equation has been reduced to a very small level. Compared with other attitude optimization methods [3, 5, 6, 15, 16], the outstanding advantages of the SFOAM algorithm are that it can apply for a wide range of the matrix condition number with high accuracy and fast convergence speed. The SFOAM algorithm has good popularization and application values.

Data availability statement

All data that support the findings of this study are included within the article (and any supplementary files).

ORCID iD

Chen Ruotong https://orcid.org/0000-0002-1410-5271

References

[1] Wahba G 1965 A least squares estimate of satellite attitude *SIAM Rev.* **7** 409
[2] Davenport P B 1968 *A Vector Approach to the Algebra of Rotations with Applications-NASA-TN-D-4696* vol 4696 (Washington, DC: National Aeronautics and Space Administration)
[3] Shuster M D and Oh S D 1981 Three-axis attitude determination from vector observations *J. Guid. Control.* **4** 70–7
[4] Markley F L 1993 Attitude determination using vector observations—a fast optimal matrix algorithm *J. Astron. Sci.* **41** 261–80
[5] Mortari D 1997 ESOQ: a closed-form solution to the Wahba problem *J. Astron. Sci.* **45** 195–204
[6] Mortari D 2000 Second estimator of the optimal quaternion *J. Guid. Control Dyn.* **23** 885–8
[7] Markley F L and Mortari D 2000 New developments in quaternion estimation from vector observations *Adv. Astronaut. Sci.* **106** 373–93
[8] Yan G, Chen R and Guo K 2019 Equivalence analysis between SVD and QUEST for multi-vector attitude determination *J. Chin. Inertial Technol.* **27** 568–72
[9] Wu M, Wu Y, Hu X and Hu D 2011 Optimization-based alignment for inertial navigation systems: theory and algorithm *Aerosp. Sci. Technol.* **15** 1–17
[10] Weng J *et al* 2013 Vehicular moving-base FOAM alignment algorithm *Syst. Eng. Electron.* **35** 1498–501
[11] Guo Y *et al* 2017 Application of quaternion estimator algorithm dedicated on alignment of swaying and moving carrier *J. Chin. Inertial Technol.* **25** 182–5
[12] Zheng Z *et al* 2019 An initial alignment method of SINS without latitude based on calculation of earth axis vector *J. Astron. Sci.* **40** 77–84
[13] Zhihu (available at: https://zhuanlan.zhihu.com/p/104832975)
[14] Wang X, Shi D and Shi D 2015 A modified super-Halley's method free from second derivative *Adv. Math.* **44** 151–9
[15] Wu J, Zhou Z, Gao B, Li R, Cheng Y and Fourati H 2018 Fast linear quaternion attitude estimator using vector observations *IEEE Trans. Autom. Sci. Eng.* **15** 307–19
[16] Wu J 2020 Rigid 3D registration: a simple method free of SVD and eigen-decomposition *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **69** 8288–303

引文格式：严恭敏，李梓阳，朱宏堡. 基于 Allan 方差分析的陀螺仪漂移误差辨识与仿真复现[J]. 导航定位学报, 2022, 10(4): 29-33.（YAN Gongmin, LI Ziyang, ZHU Hongbao.Gyroscope drift error identification and reconstruction based on Allan variance analysis[J]. Journal of Navigation and Positioning, 2022, 10(4): 29-33.）DOI:10.16547/j.cnki.10-1096.20220404.

基于 Allan 方差分析的陀螺仪漂移误差辨识与仿真复现

严恭敏，李梓阳，朱宏堡
（西北工业大学 自动化学院，西安 710072）

摘要：针对传统阿伦（Allan）方差分析法中容易引起误差类型错误识别的问题，提出了一种新的 Allan 方差曲线拟合方法，开发了软件程序辅助人工操作，实现陀螺仪漂移误差类型识别并完成误差参数估计，曲线拟合过程可视化、直观简便。对一组实测的陀螺仪数据进行了 Allan 方差分析，求得它的漂移误差类型和相应的噪声参数，基于噪声参数进行了虚拟陀螺仪漂移的仿真复现，复现数据的误差特征与实测数据吻合，验证了 Allan 方差分析方法的正确性，研究结果可为提高陀螺仪性能提供参考。

关键词：阿伦方差分析；陀螺漂移误差；曲线拟合；信号复现；精度提升
中图分类号：P228 **文献标志码**：A **文章编号**：2095-4999(2022)04-0029-05

Gyroscope drift error identification and reconstruction based on Allan variance analysis

YAN Gongmin, *LI Ziyang*, *ZHU Hongbao*
（School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China）

Abstract: Aiming at the problem of gyroscope drift error identification mistakes in traditional Allan variance analysis method, a new Allan variance curve fitting method is proposed. A software program is developed to assist manual operation to realize gyroscope drift error identification and error parameter estimation. The curve fitting process is visual, intuitive and simple. Taken a gyroscope sampling data as an example, Allan variance analysis is carried out to obtain the drift error type and error parameters. The simulation of virtual gyroscope drift is carried out based on the estimated error parameters and the results show that the error characteristics of the simulated data are consistent with those of the real measured data, which verify the correctness of the proposed Allan variance analysis method. The research results provide a useful reference for the gyroscope accuracy improvement.

Keywords: Allan variance analysis; gyroscope drift error; curve fitting; signal reconstruction; accuracy improvement

0 引言

陀螺仪漂移的随机误差分析一般是指对陀螺仪输出的静态漂移数据进行建模分析，分离出其中包含的误差成分并辨识出各种误差参数。常见的随机误差分析方法有时间序列法、功率谱法和阿伦（Allan）方差法等，相较于其它方法，Allan 方差分析法具有噪声类型识别丰富、参数估计简单且计算量小等突出优点。Allan 方差分析方法由学者戴维·W. 阿伦（David W. Allan）首先提出，最初主要应用于原子钟的频率稳定性分析[1]，由于陀螺仪等惯性传感器本身也具有振荡器的特征，因此该方法随后也被广泛应用于各种惯性传感器的随机误差辨识[2-4]。

收稿日期：2021-12-18
第一作者简介：严恭敏（1977—），男，福建建瓯人，博士，副教授，研究方向为惯性导航与信息融合理论。

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

理论上，Allan 方差分析获得的最长相关时间（簇时间或分组时间，cluster time）为采样序列总时间长度的 1/2，一般认为当相关时间小于 1/10 时，具有较高的方差计算置信度。为了提高 Allan 方差分析的某些性能，比如提高 Allan 方差计算的置信度或增加等效数据长度等，研究者们提出了许多改进措施，比如交叠 Allan 方差、#1（Theo1）方差、总（Total）方差、混合理论（TheoH）方差、哈达玛（Hadamard）方差、带滑动窗的动态 Allan 方差（DAVAR）等方法[5-10]。笔者认为，上述改进方法在高精度原子钟频率分析中作用可能会比较显著，因为原子钟总是在实验室等环境一致性较好的条件下进行测试和使用的，高精度原子钟设备昂贵且数量少，采集获得的测试数据稀缺，值得精益求精地分析。然而，对于低、中等级甚至惯性级陀螺仪漂移分析而言，其相关时间一般从数秒到上千秒，仅需采集 3~5 h 以上的数据作 Allan 方差分析即可，陀螺仪数据容易采集，所以对各种改进方法的需求并不迫切，通过简单地增加测试时间长度即可解决复杂的改进算法中的所谓提高估计置信度问题。此外，用于陀螺仪漂移 Allan 方差分析的数据，往往总是在实验室静态条件下采集测试的，但是在实际导航应用中，特别是面向捷联惯导系统，陀螺仪是跟随运载体运动且环境温度也可能是剧烈变化的，使用场合相对比较恶劣，必然导致静态测试辨识的陀螺仪漂移误差参数与现实使用之间存在差异，前者代表的只是最理想条件下的最高精度的参数。所以，无需过分精确的 Allan 方差测试建模，仅需简单粗略的陀螺仪漂移误差建模即可，不论是简单粗略还是复杂精细建模，对实用的陀螺仪漂移性能评估和导航误差预测准确性的提升区别都不大。许多针对陀螺仪的 Allan 方差分析研究，比如文献[11-14]等，过度研究误导了工程技术的实际应用，让读者误以为所提方法可以解决工程问题，其实并没有太大用处。

除了导航应用外，陀螺仪漂移 Allan 方差分析的另一个主要目的应当是服务于陀螺仪性能的改进，根据 Allan 方差分析给出的主要噪声源及其参数值，结合陀螺仪传感器原理有可能反推挖掘深层次的误差机理，为改进和优化传感器硬件设计或信号调理提供帮助。基于上述目的，本文在简要介绍 Allan 方差分析基本方法的基础上，以一组陀螺仪测试数据为例，设计开发了一种用于 Allan 方差分析曲线拟合的软件程序，使得陀螺仪漂移误差类型识别和参数辨识变得非常直观方便，最后，通过虚拟陀螺仪漂移的仿真复现验证了所提 Allan 方差分析方法的可行性，为实际陀螺仪精度性能提升提供一些有益的参考。

1 Allan 方差分析基本原理

对于静态环境下陀螺仪输出的随时间 t 变化的角速率信号 $\omega(t)$，Allan 方差的定义（也就是其计算方法）为

$$\sigma_{\mathrm{A}}^2(\tau)=\frac{1}{2}\left\langle[\bar{\omega}_{i+1}(\tau)-\bar{\omega}_i(\tau)]^2\right\rangle \tag{1}$$

式中：$\tau=m\tau_0,(m=1,2,3,\cdots)$ 为 Allan 方差计算的取样间隔（cluster time），τ_0 为角速率信号的最小采样间隔；$\bar{\omega}_i(\tau),(i=1,2,3,\cdots)$ 为第 i 个取样间隔 $[(i-1)\tau,i\tau]$ 内的平均角速率，即有

$$\bar{\omega}_i(\tau)=\frac{1}{\tau}\int_{(i-1)\tau}^{i\tau}\omega(t)\mathrm{d}t \tag{2}$$

符号“$\langle x_i\rangle$”表示对含 $2N+1$ 个元素的序列 x_i 作时间平均的运算符，即

$$\langle x_i\rangle=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{i=-N}^{N}x_i \tag{3}$$

显然，在式（2）中求平均具有低通滤波作用，而式（1）中的差分运算 $[\bar{\omega}_{i+1}(\tau)-\bar{\omega}_i(\tau)]$ 具有高通滤波作用，二者综合一起，便发挥着带通滤波的作用，因此，Allan 方差计算可以看作是角速率信号 $\omega(t)$ 通过带通滤波器 $H_\tau(\mathrm{j}f)=-\mathrm{j}\sqrt{2}\dfrac{\sin^2(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$（$f$ 为频率变量）后，再进行二阶原点矩统计，其信号处理过程示意图如图 1 所示[15]。

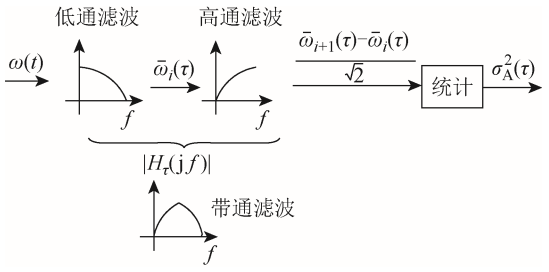


图 1 Allan 方差的信号处理过程

从频域看，Allan 方差的计算过程等价于角速率信号 $\omega(t)$ 的功率谱 $S(f)$ 的滤波器加权积分输出，即

$$\sigma_{\mathrm{A}}^2(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}S(f)\left|H_\tau(\mathrm{j}f)\right|^2\mathrm{d}f=4\int_0^{\infty}S(f)\frac{\sin^4(\pi f\tau)}{(\pi f\tau)^2}\mathrm{d}f \tag{4}$$

由式（4）可见，随着 Allan 方差计算的取样

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

间隔 τ 变化，带通滤波器 $H_\tau(\mathrm{j}f)$ 的通频带也随之变化，可得到一系列的 Allan 方差输出。

陀螺仪漂移误差往往是一系列相互独立的基本随机误差信号之和，常见的基本误差包括角度量化噪声、角度随机游走、零偏不稳定性、角速率随机游走等，它们在频域功率谱上表现的频段一般各不相同，经过 Allan 方差计算后，在相关时间—Allan 标准差（$\tau-\sigma_{\mathrm{A}}(\tau)$）双对数曲线图上表现的相关时间段和曲线斜率也各不相同，因此，根据 $\tau-\sigma_{\mathrm{A}}(\tau)$ 双对数曲线能够辨识出不同的噪声类型及其参数。

由多种误差源成分构成的信号的总 Allan 方差一般可分解和表示为

$$\sigma_{\mathrm{A}}^2(\tau)=\sigma_{\mathrm{QN}}^2(\tau)+\sigma_{\mathrm{ARW}}^2(\tau)+\sigma_{\mathrm{BI}}^2(\tau)+\sigma_{\mathrm{RRW}}^2(\tau)+\sigma_{\mathrm{RR}}^2(\tau)=\frac{3Q^2}{\tau^2}+\frac{N^2}{\tau}+\frac{4B^2}{9}+\frac{K^2\tau}{3}+\frac{R^2\tau^2}{2} \tag{5}$$

式中：Q、N、B、K、R 分别为量化噪声（quantization noise）系数、角度随机游走（angular random walk）系数、零偏不稳定性（bias instability）系数、速率随机游走（rate random walk）系数和速率斜坡（rate ramp）系数；$\sigma_{\mathrm{QN}}^2(\tau)$、$\sigma_{\mathrm{ARW}}^2(\tau)$、$\sigma_{\mathrm{BI}}^2(\tau)$、$\sigma_{\mathrm{RRW}}^2(\tau)$、$\sigma_{\mathrm{RR}}^2(\tau)$ 分别为与前述误差系数对应的相互独立的基本误差的 Allan 方差。

需要说明的是，对于某次试验数据而言，速率斜坡一般为确定性误差，它的 Allan 方差计算结果表现出长时间相关特性，亦认为与前述随机噪声不相关；有些研究者将速率斜坡视作功率谱为 $S(f)=R^2/(2\pi f)^3$ 的随机信号，有些场合更加合理。为了便于仿真处理，本文姑且将速率斜坡当作确定性误差看待。

许多文献采用最小二乘方法求解式（5）中的各项误差系数[7,16]，但笔者认为那是不合适的。由于在陀螺仪漂移中，并不是每种误差都会有显现的，最小二乘法容易造成误差类型的错误识别，反而是采用人为手工辨识的方法更加合理可信[17-18]。

本文下节将基于专门开发的程序辅助手工辨识，使 Allan 方差分析变得直观简单。

2　Allan 方差曲线拟合与参数估计

某型陀螺仪在实验室恒温环境下预热稳定后，以 100 Hz 频率（即 τ_0=0.01 s）采集 10 000 s 静态数据，扣除常值漂移后的输出曲线如图 2 所示。图 2 显示，角速率信号绝大部分在 ±0.2 (°)·s^{-1} 范围内变化，短期内呈现剧烈跳变的高频噪声，较长时段上存在缓慢波动，图像从整体上看似乎还有一点逐渐变小的走势（其斜率小于 0）。

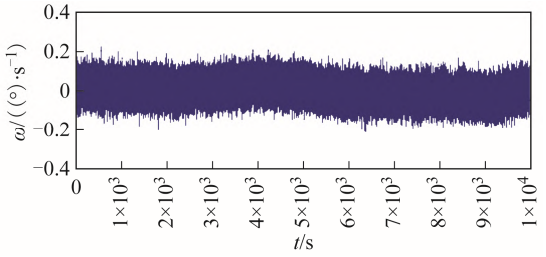


图 2　陀螺仪漂移

计算陀螺仪漂移的 Allan 方差，绘制标准差序列 $\tau-\sigma_{\mathrm{A}}(\tau)$ 的双对数图，如图 3 中粗长虚线“原始 Allan 方差”所示。很明显，该曲线不是典型的两边翘起、中间凹下的 Allan 方差曲线，曲线中间部位有明显的凸起鼓包。

基于矩阵实验室（matrix laboratory, MATLAB）的 m 编程语言，本文中开发了 Allan 方差曲线拟合程序（avarfit.m）[19]，运行程序后，仅需靠鼠标拖动即可完成曲线拟合并输出误差参数结果，操作非常直观方便，图形化界面如图 3 所示。程序中预设了角度量化噪声（斜率-1、图中标注 Q）、角度随机游走（-1/2，N）、零偏不稳定性（0，B）、角速率随机游走（1/2，K）和速率斜坡（1，R）5 种基本误差，它们均为直线；还设置了 2 个马尔可夫过程基本误差，分别标注为 M_1 和 M_2，马尔可夫过程为中间上凸的“^”型线。当然，如果有必要还可通过修改程序增加更多的马尔可夫过程基本误差，以满足更复杂的需求。

在图 3 中，拟合的 Allan 方差为粗实线“拟合 Allan 方差”，它是上述所有 7 个基本误差之和。使用鼠标选中某条基本误差曲线，比如图中粗虚直线 K 正处于被选中的状态，拖动基本曲线可使其上下移动，相应地，拟合的“拟合 Allan 方差”曲线的局部也会跟随之上下移动。经过所有基本曲线必要的手工移动调整后，可使“拟合 Allan 方差”曲线与“原始 Allan 方差”曲线尽量重合，图 3 中所示的“拟合 Allan 方差”曲线已经是处于较好的调整状态下的结果。在拟合曲线的手工调整过程中，如果某条基本误差曲线的影响很小，可将它往下移到较下方位置，比如图 3 中的 Q 和 B 曲线，这表示 Allan 方差分析建模中不需要该误差类型，尽量减小基本误差类型的数目也是 Allan 方差分析的一个最基本原则。

另外，在曲线拟合手工调整过程中，各基本误差的参数值会即时显示在图形界面的标题处，如

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

图 3 最上方所示。图中仅显示了有显著影响的 N、K、R、M_1 和 M_2 等 5 个基本误差的参数值（每个马尔可夫过程包含过程均方差和相关时间 2 个参数，标注为“均方差@相关时间”），而 Q 和 B 两种基本误差的影响很小，无需显示。

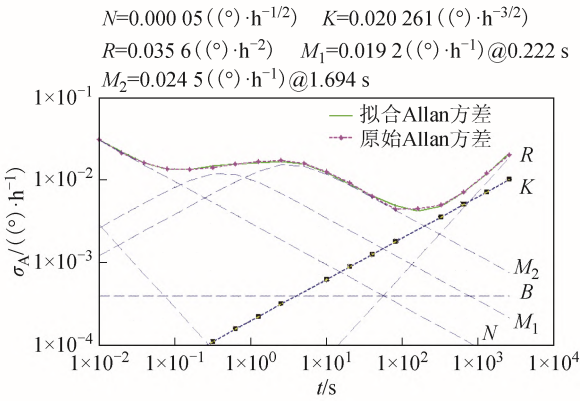
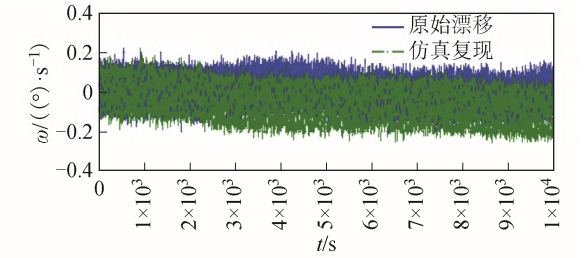


图 3 Allan 方差及其手工调整拟合

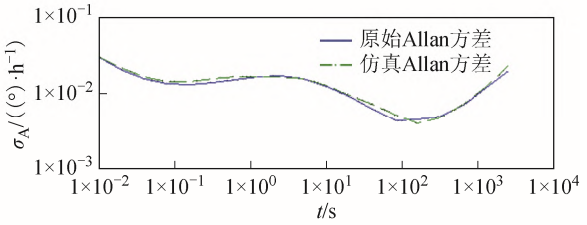
3 漂移误差的仿真复现与精度提升

3.1 漂移仿真复现

按照图 3 辨识出的 N、K、R、M_1 和 M_2 参数仿真生成相互独立的角度随机游走、角速率随机游走、速率斜坡（按时域图 2 其斜率应取$-R$）和 2 个马尔可夫过程，共计 5 个基本误差时间序列，再将它们相加，作为虚拟陀螺仪漂移的仿真复现。仿真复现漂移“仿真复现”虚线与真实陀螺仪漂移“原始漂移”实线，以及它们的 Allan 方差曲线绘制如图 4 所示。从图 4 可以看出，二者的漂移角速率或 Allan 方差曲线之间均有较好的吻合度，验证了前面 Allan 曲线拟合方法和参数估计结果的合理性。



（a）陀螺仪角速率



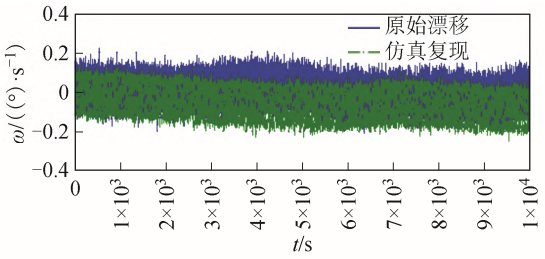
（b）Allan方差

图 4 陀螺仪漂移仿真复现

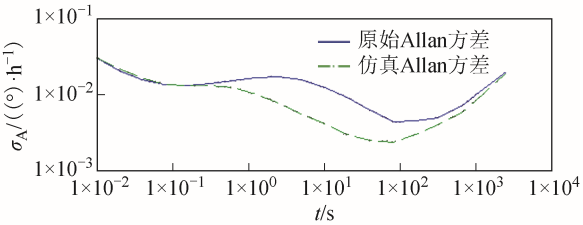
若进行多次虚拟仿真复现，不同次的复现漂移之间会有微小的差异，这也说明了在 Allan 方差分析时没必要苛求太精确的误差参数辨识结果，毕竟实际应用中，Allan 方差分析的往往也只是陀螺仪一个采样样本的结果，不同时间、不同采样条件下取得的试验样本之间必然存在一定的差异，过于精确的模型参数在实际应用中对导航效果的提升作用并不明显。

3.2 精度提升

对于导航应用而言，其主要受陀螺仪中长期相关时间误差的影响[15]。参见图 3，给出的角度随机游走系数 N=0.000 05 (°)·h$^{-1/2}$ 比较小，能达到惯性级陀螺仪的水平，影响该陀螺仪精度的主要因素是中等相关时间误差。若想降低相关时间为 10~100s 时段的陀螺仪漂移误差，影响最大的是马尔可夫过程 M_2，其次是马尔可夫过程 M_1 和角速率随机游走 K。图 5 为去除马尔可夫过程 M_2 后的陀螺仪漂移仿真复现，从漂移时域信号图 5（a）看，与“原始漂移”相比“仿真复现”的陀螺仪信号跳变幅值稍小一点；在图 5（b）中，Allan 方差曲线中“仿真 Allan 方差”的马尔可夫过程 M_2 误差消失了，因此在 10~100s 时段的陀螺仪精度获得了明显的提升。



（a）陀螺仪角速率



（b）Allan方差

图 5 陀螺仪精度的仿真提升

当然，本文只是从漂移仿真复现的角度分析如何提升陀螺仪的精度。在实际陀螺仪中，应当针对物理传感器的误差源进行深入分析，找出其根源再做改进，才能真正地提高陀螺仪的精度。限于作者的研究专业方向（不专门从事陀螺仪开发研究），这里只能基于陀螺仪信号分析为实际陀螺仪的性

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

能改进提供一些指导思路。

4　结束语

随机误差的 Allan 方差分析方法广泛应用于陀螺仪漂移误差的建模辨识、陀螺仪性能改进和导航精度提升，目前国内外的研究主要集中于误差辨识，针对 Allan 方差分析方法的改进也研究较多。其实无论是简单的分析方法还是复杂的改进分析方法，对导航精度的贡献都不会有明显的区别，陀螺仪漂移随机误差的统计特性即使可以精细描述，但是要实时进行精确补偿从而提高导航精度却是非常困难甚至是不可能的。本文给出的软件程序辅助 Allan 方差误差辨识方法，容易获得主要的误差类型和误差参数。陀螺仪传感器研究人员更应该关注 Allan 方差分析与传感器固有特性之间的联系，通过努力改进传感器从而提高其精度性能才是最终提升导航性能的根本所在。

参考文献

[1] ALLAN W D. Statistic of atomic frequency standard[J]. Proceedings of the IEEE, 1966, 54(2): 221-230.

[2] Gyro and Accelerometer Panel of the IEEE Aerospace and Electronic Systems Society. IEEE standard specification format guide and test procedure for single-axis laser gyros: IEEE Std 647-1995[S]. New York: the Institute of Electrical and Electronics Engi-neers, Inc. , 1996.

[3] Gyro and Accelerometer Panel of the IEEE Aerospace and Electronic Systems Society. IEEE standard specification format guide and test procedure for single-axis interferometric fiber optic gyros: IEEE Std 952-1997[S]. New York: the Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc. , 1998.

[4] El-SHEIMY N, HOU H, NIU X. Analysis and modeling of inertial sensors using Allan variance[J]. IEEE Transactions on Instruments and Measurement, 2008, 57(1): 140-149.

[5] 柳絮, 王尔林. 分组并行的交叠式 Allan 方差快速算法[J]. 测绘科学, 2021, 46(8): 14-20.

[6] 张慧君, 李孝辉, 边玉敬. 用总方差进行频率稳定度的估计[J]. 时间频率学报, 2003, 26(1): 48-53.

[7] 程旭维, 汤霞清, 黄湘远. 基于#1 理论方差的光学陀螺长期随机误差分析[J]. 中国激光, 2014, 41(10): 152-159.

[8] 李明, 张黎. TheoH 方差在光学陀螺随机误差分析中的应用[J]. 光电工程, 2016, 43(8): 27-32.

[9] 陈帅, 史震. 激光陀螺误差分析的 Allan 方差法改进研究[J]. 导航定位与授时, 2018, 5(1): 100-105.

[10] 郭海荣. 导航卫星原子钟时频特性分析理论与方法研究[D]. 郑州：信息工程大学, 2006.

[11] 王峥, 李建成. 航空矢量重力测量中光纤陀螺随机漂移误差实时补偿方法[J]. 测绘学报, 2017, 46(2): 144-150.

[12] 张玉莲, 储海荣, 张宏巍, 等. MEMS 陀螺随机误差特性研究及补偿[J]. 中国光学, 2016, 9(4): 501-510.

[13] HAN S, WANG J. Quantization and colored noises error modeling for inertial sensors for GPS/INS integration[J]. IEEE Sensors Journal, 2011, 11(6): 1493-1503.

[14] 孙伟, 宋如意, 王宇航, 等. MEMS 陀螺仪随机误差 KF 补偿方法的普适性验证[J]. 大地测量与地球动力学, 2019, 39(11): 1188-1193.

[15] 严恭敏, 李四海, 秦永元. 惯性仪器测试与数据分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2012.

[16] 陈永冰, 查峰, 刘勇. 光纤陀螺随机误差的重叠分段 Allan 分析方法[J]. 中国惯性技术学报, 2016, 24(2): 235-241.

[17] 严恭敏. Allan 方差分析的使用要点[EB/OL]. (2018-07-06)[2022-1-20]. http: //blog. sina. com. cn/s/blog_40edfdc90102y1ar. html.

[18] 黎奇, 白征东, 赵思浩, 等. Allan 方差方法分析环形激光陀螺仪噪声的性能评估[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2019, 59(11): 887-894.

[19] 严恭敏. 高精度捷联惯性导航系统 Matlab 工具箱[EB/OL]. (2021-11-02)[2022-1-20]. http://www.psins.org.cn/kydm.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

文章编号：1005-6734(2022)01-0089-07 doi.10.13695/j.cnki.12-1222/o3.2022.01.013

惯性/天文组合导航中的时空坐标转换及其误差分析

严恭敏，戴晨杰，陈若彤
（西北工业大学 自动化学院，西安 710072）

摘要：针对惯性/天文组合导航中将天文传感器测量信息从天球坐标系到地球坐标系转换的问题，研究了其转换过程中涉及到的时间系统和坐标转换关系，前者包括世界时、地球时、太阳系质心力学时、原子时和协调世界时等时间概念，后者包括岁差、章动、视恒星时和极移等旋转变换。对坐标转换过程中小于 0.1″的因素进行了忽略和近似简化，误差分析表明，除地球自转角的计算需要比较精确的 UT1 时间外，其他天文参数计算中的时间输入均可直接使用 UTC 时间代替。仿真结果显示，所提简化算法的转换精度达到了 0.2″，满足角秒级的天文传感器测姿精度需求。

关 键 词：惯性/天文组合导航；时空坐标转换；误差分析；基础天文标准库
中图分类号：V249.3 **文献标志码：**A

Space-time coordinate transformation and its error analysis for INS/CNS integrated navigation

YAN Gongmin, DAI Chenjie, CHEN Ruotong
(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: Aiming at converting the astronomical sensor measurement information from the Celestial coordinate system to the Earth coordinate system in inertial/celestial integrated navigation, the time system including UT, TT, TDB and the coordinate system conversion relationship which composed by precession, nutation, apparent sidereal time and polar motion involved in the conversion process are studied. In the process of coordinate conversion, items less than 0.1" are ignored and approximately simplified. The error analysis results show that except for the calculation of the rotation angle of the Earth, which requires a more accurate UT1 time, the time input in the calculation of other astronomical parameters can be replaced by UTC time. The simulation results show that the conversion accuracy of the proposed simplified algorithm can reach about 0.2" accuracy, which meets the arc-second-level astronomical sensor attitude accuracy requirements.

Key words: INS/CNS integrated navigation; space-time coordinate transformation; error analysis; SOFA

惯性/天文组合导航是一种重要的高精度自主导航方法，可应用于舰船、飞机、导弹和卫星等多种运载平台[1-4]。天文导航基于星体的光电信号进行姿态测量，其绝对测量精度高，可达 3~5″。天文导航辅助能有效抑制惯性导航的陀螺漂移，从而减缓惯导姿态、方位和定位误差的积累。比如，应用于美国 B-2“幽灵”隐形轰炸机上的 NAS-26 惯性/天文导航系统，其纯惯性导航定位误差为 0.5 n mile/h，而若采取组合导航方式在 10 小时内的定位误差可小于 0.2 n mile[5,6]。

在惯性/天文组合导航中，惯性导航的姿态、速度和定位参数一般是在地球坐标系（比如 WGS84 和 ITRF2000，简记为 e 系，前者主要应用于导航领域而后者应用于大地测量，在导航中可忽略两者之间的微小差异）上描述和求解的，而天文导航的星体信号观测是在天球坐标系（比如 J2000，简记为 i 系）上表示的，要对这两种分导航系统进行信息比对和融合，就必然涉及到导航信息在两类坐标系之间转换的问题。J2000 协议天球坐标系（协议惯性坐标系）的 X 轴和 Z

收稿日期：2022-01-07；**修回日期：**2022-01-30
基金项目：国家自然科学基金（51879219）
作者简介：严恭敏（1977—），男，博士，副教授，主要从事惯性导航与信息融合理论研究。E-mail：yangongmin@163.com

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

轴分别指向 J2000.0 时刻的平春分点与平天极，Y 轴与 X、Z 构成右手直角坐标系，其中 J2000.0 时刻为地球时（Terrestrial Time, TT）的 2000 年 1 月 1 日 12:00 时[7]。在导航应用中可取 J2000 的原点为地球质心。在导航专业中大家都比较熟悉 WGS84 的定义，这里就不再具体给出。进行组合导航信息转换时，常常是将天文导航的姿态测量值从 i 系转换至 e 系，若借助基础天文标准库（Standards Of Fundamental Astronomy, SOFA）可很容易实现该转换[8]。

SOFA 是国际天文联合会（International Astronomical Union, IAU）赞助的开源项目，旨在为天文计算提供权威的算法程序，避免了许多不必要的重复工作，使科技人员将主要精力集中在解决问题和思路创新上。SOFA 程序集实现了各类时间（世界时、历书时、国际原子时、地球时、太阳系质心力学时、协调世界时和儒略日）转换，以及各类坐标系（岁差、章动、视恒星时、极移）旋转转换，其中很多坐标系转换又有多种版本，比如岁差就有 IAU1976、IAU2000、IAU2006 等不同模型。SOFA 的坐标系转换精度极高，可达到毫角秒（milli-arcsecond, mas）甚至微角秒（μas）级精度。但是，SOFA 主要面向天文学计算和空间大地测量学应用[7-10]，它涉及较多的天文学知识，特别是章动参数计算比较烦琐，对普通导航技术人员而言难以快速理解、掌握和直接借用。本文主要从导航专业的实用角度出发，简要介绍了天文学中常用的时间系统概念和空间参考系转换知识，着重关注它们之间的相互联系，对 IAU 提供的岁差、章动和视恒星时计算模型进行简化，给出了一套简单有效的天文导航信息转换算法，能够满足惯性/天文导航中角秒级的天文测姿精度需求。

1 时间系统

1.1 世界时

自十七世纪以来，天文学家们普遍以地球自转作为时间尺度。以地球自转为基础的时间计量系统称为世界时（Universal Time, UT）。1820 年法国科学院正式提出秒长的定义：全年中所有真太阳日的平均长度的 1/86400 为 1 秒，即后来所谓的平太阳秒或世界时秒。人们曾认为地球自转速率是均匀的，因而 UT 曾被误认为是一种均匀时，1960 年前作为基本时间计量系统被广泛应用。后来，随着科技的发展，人们发现地球自转的速率并不均匀，存在长期减缓和短周期变化（稳定度约为 10^{-8} 量级），且自转轴在地球内部的位置是不断变化的（即极移现象），情况比较复杂。

UT 中又有三种不同的概念：UT0、UT1 和 UT2。其中 UT0 是由全球分布的多个观测站观测恒星的视运动而确定的，UT1 是 UT0 加上极移修正得到的，UT2 是 UT1 加上地球自转的季节性变化改正得到的。文中用于描述地球自转角度的世界时均指 UT1。

1.2 历书时

与地球自转相比，行星绕日公转的周期要稳定得多，1958 年国际天文学联合会（IAU）决议从 1960 年起采用历书时（Ephemeris Time, ET）取代 UT 作为描述天体运动、编制天体历书中所采用的时间系统。ET 的基本时间单位——历书秒等于 1899 年 12 月 31 日 12:00 时起算的回归年长度的 1/31556925.9747，1900 年 1 月 1 日 12:00 时为 ET 的起点。ET 的观测精度随着观测设备和技术的提高而逐渐提高，从早期的 ET0、ET1 发展到后来的 ET2，利用连续几年的天文观测可达到 10^{-10} 量级的时间稳定度，高于以地球自转为基准的时间系统 UT，但由于 ET 的精度依然有限，且不能实时给出精确的 ET 时间，所以它在使用上仍有一定的局限性。

1967 年起用原子时代替历书时作为基本的时间计量系统，但在天文历表上仍用历书时。1984 年起天文计算和历表上所用的时间单位，也都以原子时秒为基础了。

1.3 国际原子时

1967 年，第 13 届国际计量大会（法文 Conference Generale des Poids et Mesures, CGPM）通过国际单位秒（SI 秒）决议[11,12]：位于海平面上的铯原子 133（Cs133）基态的两个超精细能级间在零磁场中跃迁振荡 9192631770 个周期所持续的时间为一个原子时秒。CGPM 在 1971 年正式确定，国际原子时的秒长与 1900.0 历元时刻的 ET 秒长相等，取 1958 年 1 月 1 日 0 时 0 分 0 秒（UT1）的瞬间作为同年同月同日 0 时 0 分 0 秒国际原子时（International Atomic Time, TAI）。但事后发现，在该瞬间两者相差 0.0039 s，这一差值就作为历史事实而保留了下来。ET 的秒长是通过对长周期的天文观测再等分而得到的，为了提高精度需要进行长时间的观测；而 TAI 的秒长是靠原子钟来复现的，原子跃迁频率的周期很短，通过对短周期的观测再倍乘后便可得到高精度的秒长，容易测定和应用。早期原子钟的稳定度为 10^{-10}，而目前原子钟的稳定度已达 10^{-16} 甚至更高。

1.4 地球时与太阳系质心力学时

ET 是太阳质心坐标系中的一种均匀时间尺度，它是牛顿运动方程中的独立变量。在牛顿力学中，时间是与空间的位置及能量无关的一个独立变量，它既

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

可以作为行星绕日运行运动学方程中的自变量，也可以作为卫星绕地球运动的运动学方程中的自变量。随着现代观测技术和计时精度的不断改善，牛顿力学经典理论与观测结果之间的矛盾开始显现。1976 年，IAU 引入相对论时间尺度，给出了地球质心力学时（Terrestrial Dynamic Time, TDT, 1991 年改称地球时 TT)和太阳系质心力学时。TT 主要是用于解算绕地球质心旋转的天体（如人造卫星）的运动方程，并编制其星历时所用的一种时间系统；而太阳系质心力学时（Barycentric Dynamic Time, TDB）是用以解算绕太阳系质心旋转的天体（如行星）的运动方程，并编制其星历时所用的时间系统。TT 是连续且均匀的时间系统，本质上是基于原子物理所定义的原子时系统，可以视为是一种在大地水准面上实现的与 SI 秒相一致的理想化的原子时。TT 的起始历元为 1971 年 1 月 1 日 0 时 0 分 32.184 秒（UT1），其中 32.184 秒为起始历元时刻与 TAI 的差值，这样就可使 TT 与过去使用的 ET 相衔接，只需把过去历表中的 ET 改为 TT 便可继续使用。

TT 和 TDB 之间的差别主要是由地月系绕日运动的引力势变化相对论效应引起的，两者间的关系为：

$$\mathrm{TDB}=\mathrm{TT}+0.001658^{\mathrm{S}}\sin M+0.000014^{\mathrm{S}}\sin 2M+O^2 \tag{1}$$

式中，M 为地月系质心绕日轨道的平近点角，变化周期为一年；O^2 为可忽略的微小量。由式(1)可见，TT 和 TDB 之间不存在长期趋势项，最大差异仅约 1.7 ms。

1.5　协调世界时

在确定国际原子时 TAI 起点之后，由于地球自转速率不均匀，即世界时 UT1 不均匀，其秒长将变得越来越长，导致 UT1 与 TAI 之间的时差逐年累积。协调世界时（Coordinated Universal Time, UTC）兼顾了对 UT1 时刻和 TAI 秒长两者的需要，UTC 秒长与 TAI 秒长一致，在时刻上则要求尽量接近于 UT1，是介于 TAI 和 UT1 之间一种折中的时间系统。UTC 采用闰秒方法来解决 TAI 与 UT1 之间的累积偏差，使得 UTC 和 UT1 之间的差值总是保持在±0.9 s 之内。1972 年 CGPM 决定启用 UTC，从 1958 年到 1971 年末 UT1 已落后于 TAI 将近 10 s，从 1972 年至今（2021 年 12 月）UTC 又进行了 27 次闰秒（最近一次发生在 2017 年 1 月 1 日），因此目前有差值 dTAI = TAI - UTC=37 s 。

1979 年 12 月，UTC 取代 UT1 作为无线电通信中的标准时间，UTC 也是世界上大多数国家的法定时间[11,12]，许多传感器输出的时标信息都是基于 UTC 时间的，标准惯导系统和天文导航系统也输出 UTC 时间。UTC 与 UT1、TT 之间的转换关系为：

$$\mathrm{UT1}=\mathrm{UTC}+\mathrm{dUT1} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{TT}=\mathrm{TAI}+32.184^{\mathrm{S}}=\mathrm{UTC}+\mathrm{dTAI}+32.184^{\mathrm{S}}=\\ \mathrm{UTC}+1^{\mathrm{S}}\times n+32.184^{\mathrm{S}}\end{aligned} \tag{3}$$

其中，dUT1=UT1－UTC 和 dTAI = TAI - UTC 的具体数值可从国际地球自转服务（www.iers.org）网站上查阅[13]，n 即为 UTC 的闰秒数，目前取值为 37。

1.6　儒略日

儒略日（Julian Day, JD）是一种不涉及年、月等概念的长期连续的记日法，在天文学中有着广泛的应用，计算跨越多年的两个时刻之间的间隔时采用这种方法特别方便。由年-月-日-时转换为儒略日的计算式为[10]：

$$\begin{aligned}JD=1721013.5+367\times Y-\\ \mathrm{int}\left\{\left[\frac{7}{4}\left[Y+\mathrm{int}\left(\frac{M+9}{12}\right)\right]\right]\right\}+\\ \mathrm{int}\left(\frac{275\times M}{12}\right)+D+\frac{h}{24}\end{aligned} \tag{4}$$

式中，常数 1721013.5 为公元 1 年 1 月 1 日 0 时的儒略日；Y、M、D 分别为公历中的年、月、日数，h 为小时数（分钟和秒转化为小时的小数部分），可为 UT1、TT 或 TDB 等时间系统之一，需根据实际情况选用，Y 年-M 月-D 日-h 时时刻可简单记为 $t\left(Y,M,D,h\right)$ 时刻；int()为取整符号。特别的，儒略日的起点时间（JD=0 日）为公元前 4713 年 1 月 1 日 12:00 时；J2000.0 起始历元（2000 年 1 月 1 日 12:00 时）对应的儒略日为 JD=2451545.0。

另外，儒略世纪（Julian Century）是天文学中常用的一种长间隔时间单位，两个儒略日 JD_1 和 JD_0 之间的儒略世纪数 T 为：

$$T=\frac{JD_1-JD_0}{36525} \tag{5}$$

2　空间坐标变换矩阵

首先给出基本坐标变换矩阵的定义：如有一个坐标系（记为 a 系）绕其 OX 轴（或 OY 轴、或 OZ 轴）旋转 α 角度得另一坐标系（记为 b 系），则从 a 系到 b 系的坐标变换矩阵可分别表示为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{\mathrm{a},X}^{\mathrm{b}}(\alpha)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\mathrm{c}_\alpha&\mathrm{s}_\alpha\\0&-\mathrm{s}_\alpha&\mathrm{c}_\alpha\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}_{\mathrm{a},Y}^{\mathrm{b}}(\alpha)=\begin{bmatrix}\mathrm{c}_\alpha&0&-\mathrm{s}_\alpha\\0&1&0\\\mathrm{s}_\alpha&0&\mathrm{c}_\alpha\end{bmatrix},\\ \boldsymbol{R}_{\mathrm{a},Z}^{\mathrm{b}}(\alpha)=\begin{bmatrix}\mathrm{c}_\alpha&\mathrm{s}_\alpha&0\\-\mathrm{s}_\alpha&\mathrm{c}_\alpha&0\\0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6}$$

式中，s_α，c_α 分别表示 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$。后面将 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{a},i}^{\mathrm{b}}(\alpha)$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

分别简写为 $\boldsymbol{R}_i(\alpha),(i=X,Y,Z)$。

2.1 岁差变换矩阵

由于太阳、月球及行星对地球上赤道隆起部分的作用力矩而导致赤道平面的进动，称为赤道岁差，其角速率每年约西移 50.39″；行星对地月质心绕日公转黄道面影响，造成春分点移动，称为黄道岁差，其角速率每年约东移 0.1″，而且还会使黄赤交角产生变化。综合赤道岁差和黄道岁差，IAU1976 岁差模型给出黄经岁差 ψ 和黄赤交角 ε 计算公式，分别为：

$$\begin{cases}\psi = 5029.0966''T_{\mathrm{TDB}} - 1.11161''T_{\mathrm{TDB}}^2 + 0.000113''T_{\mathrm{TDB}}^3 \\ \varepsilon = 23.439291^\circ - 46.8150''T_{\mathrm{TDB}} - \\ \quad 0.00059''T_{\mathrm{TDB}}^2 + 0.001813''T_{\mathrm{TDB}}^3\end{cases} \tag{7}$$

其中，$T_{\mathrm{TDB}}=\dfrac{JD_{\mathrm{TDB}}-JD_{00}}{36525}$ 为 J2000.0 参考历元（$JD_{00}=2451545.0$）至 $t(Y,M,D,h)$ 时刻历元 JD_{TDB} 之间的儒略世纪数，理论上计算 T_{TDB} 的时间应该使用 TDB 时间，实际上总可使用 TT，根据式(1)两者最大的差异仅为 1.7 ms，其影响一般可忽略不计。

若取 T_{TDB}=0.5 世纪数(即从 2000 年到 2050 年)，式(7)右端的 T_{TDB}^2 项最大取值仅为 $1.11161''T_{\mathrm{TDB}}^2\approx 0.27''$，忽略式(7)右端 0.1″量级及更微小的项，近似有：

$$\begin{cases}\psi = 5029.0966''T_{\mathrm{TDB}} \\ \varepsilon = 23.439291^\circ - 46.8150''T_{\mathrm{TDB}}\end{cases} \tag{8}$$

后文将遵循同样的规则：如果 t 时刻历元直到 2050 年某项误差的影响为 0.1″量级或更小，则直接对其进行忽略，以简化计算。

根据式(7)中的两个参数推导，IAU1976 岁差模型采用三次旋转的方式，计算从 J2000 协议天球坐标系（i 系）至 t 时刻的平天球坐标系（记为 P 系）的坐标变换矩阵（即岁差矩阵），为：

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{P}} = \boldsymbol{R}_Z(-z)\boldsymbol{R}_Y(\theta)\boldsymbol{R}_Z(-\zeta) \tag{9}$$

其中，三个岁差角分别为：

$$\begin{cases}\zeta = 2306.2181''T_{\mathrm{TDB}} + 0.301880''T_{\mathrm{TDB}}^2 + 0.017998''T_{\mathrm{TDB}}^3 \approx \\ \quad 2306.2181''T_{\mathrm{TDB}} \\ \theta = 2004.3109''T_{\mathrm{TDB}} - 0.426650''T_{\mathrm{TDB}}^2 - 0.041833''T_{\mathrm{TDB}}^3 \approx \\ \quad 2004.3109''T_{\mathrm{TDB}} \\ z = 2306.2181''T_{\mathrm{TDB}} + 1.094687''T_{\mathrm{TDB}}^2 + 0.018203''T_{\mathrm{TDB}}^3 \approx \\ \quad 2306.2181''T_{\mathrm{TDB}}\end{cases} \tag{10}$$

IAU1976 岁差模型在 2003 年之前曾被广泛使用，后来 IAU2000 岁差模型在 IAU1976 的基础上简单地对黄经岁差的速率和交角岁差的速率进行了修正，2006 年后又启用了最新的 IAU2006 岁差模型，其精度可达 1 μas 量级[10]。针对本文研究的角秒级的惯性/天文导航应用，IAU1976 模型的精度就足够了。

2.2 章动变换矩阵

IAU2000A 章动序列模型包含 678 个日月章动项和 687 个行星章动项，其计算精度优于 0.2 mas，计算比较复杂，而 IAU2000B 章动序列只包含 77 个日月章动项和一些行星章动偏差项，它与 IAU2000A 之差不超过 1 mas[7]。IAU1980 章动模型更为简单，下面以它为例作介绍。

IAU1980 章动模型亦采用三次旋转的方式，计算从 t 时刻的平天球坐标系（P 系）至 t 时刻的瞬时天球坐标系（记为 N 系）的坐标变换矩阵（即章动矩阵），为：

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{N}} = \boldsymbol{R}_X(-\varepsilon-\Delta\varepsilon)\boldsymbol{R}_Z(-\Delta\psi)\boldsymbol{R}_X(\varepsilon) \tag{11}$$

其中，$\Delta\psi$、$\Delta\varepsilon$ 分别为黄经章动和黄赤交角章动，计算公式为：

$$\begin{cases}\Delta\psi = \sum_{i=1}^{106}\left(A_i + A_i'T_{\mathrm{TDB}}\right)\sin\beta_i \\ \Delta\varepsilon = \sum_{i=1}^{106}\left(B_i + B_i'T_{\mathrm{TDB}}\right)\sin\beta_i \\ \beta_i = N_{1i}l + N_{2i}l' + N_{3i}F + N_{4i}D + N_{5i}\Omega\end{cases} \tag{12}$$

式中，l 是月球的平近点角，l' 是太阳的平近点角，D 是太阳到月球的平角距，Ω 是月球升交点的平黄经，L 是月球的平黄经，$F=L-\Omega$，以上各参数的具体表达式如式(13)所示。

$$\begin{cases}l = 134.96340251^\circ + 1717915923.2178''T_{\mathrm{TDB}} + 31.8792''T_{\mathrm{TDB}}^2 + 0.051635''T_{\mathrm{TDB}}^3 - 0.00024470''T_{\mathrm{TDB}}^4 \approx \\ \quad 134.96340251^\circ + 1717915923.2178''T_{\mathrm{TDB}} + 31.8792''T_{\mathrm{TDB}}^2 \\ l' = 357.5291091^\circ + 129596581.0481''T_{\mathrm{TDB}} - 0.5532T_{\mathrm{TDB}}^2 + 0.000136T_{\mathrm{TDB}}^3 - 0.00001149T_{\mathrm{TDB}}^4 \approx \\ \quad 357.5291091^\circ + 129596581.0481''T_{\mathrm{TDB}} - 0.5532T_{\mathrm{TDB}}^2 \\ D = 297.85019547^\circ + 1602961601.2090''T_{\mathrm{TDB}} - 6.3706T_{\mathrm{TDB}}^2 + 0.006593''T_{\mathrm{TDB}}^3 - 0.00003169''T_{\mathrm{TDB}}^4 \approx \\ \quad 297.85019547^\circ + 1602961601.2090''T_{\mathrm{TDB}} - 6.3706T_{\mathrm{TDB}}^2 \\ \Omega = 125.04455501^\circ - 6962890.2665''T_{\mathrm{TDB}} + 7.4722''T_{\mathrm{TDB}}^2 + 0.007702''T_{\mathrm{TDB}}^3 - 0.00005939''T_{\mathrm{TDB}}^4 \approx \\ \quad 125.04455501^\circ - 6962890.2665''T_{\mathrm{TDB}} + 7.4722''T_{\mathrm{TDB}}^2\end{cases} \tag{13}$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

式(12)中，A_i、A_i'为黄经章动振幅及其变化率，B_i、B_i'为交角章动振幅及其变化率；N_{1i}、N_{2i}、...，N_{5i}为计算幅角β_i时用到的一些系数，其取值为 0、±1、±2、±4。前 6 项振幅较大的系数摘录如表 1。

当$T_{\mathrm{TDB}}<0.5$世纪数时，表 1 中所有变化率系数A_i'、B_i'的影响均很小，且A_i、B_i中绝对值小于 0.1 者的影响也很小，因此仅保留绝对值大于 0.1 者（表 1 中粗斜体数据），这时式(12)可以直接展开，近似为式(14)所示的少数几项之和，极大降低了计算量。

表 1　IAU1980 章动序列系数表（按 A_i 绝对值由大至小排列）[10]

Tab.1　IAU1980 nutation series listed according to abs(A_i)

参数	幅角系数					黄经章动幅值系数/(″)		交角章动幅值系数/(″)	
i	N_{1i}	N_{2i}	N_{3i}	N_{4i}	N_{5i}	A_i	A_i'	B_i	B_i'
1	0	0	0	0	1	***-17.1996***	-0.001742	***9.2052***	0.00089
2	0	0	2	-2	2	***-1.3187***	-0.00016	***0.5736***	-0.00031
3	0	0	2	0	2	***-0.2774***	-0.00002	0.0977	-0.00005
4	0	0	0	0	2	***0.2062***	0.00002	-0.0895	0.00005
5	0	1	0	0	0	***0.1426***	-0.00034	0.0054	-0.00001
6	1	0	0	0	0	0.0712	0.00001	-0.0007	0.0

$$\begin{cases}\Delta\psi \approx A_1\sin\left(N_{51}\Omega\right)+A_2\sin\left(2\left(N_{23}F-N_{24}D+N_{25}\Omega\right)\right)+\\ \qquad A_3\sin\left(2\left(N_{33}F+N_{35}\Omega\right)\right)+A_4\sin\left(2N_{45}\Omega\right)+A_5\sin\left(N_{52}l'\right)\\ \Delta\varepsilon \approx B_1\cos\left(N_{51}\Omega\right)+B_2\sin\left(2\left(N_{23}F-N_{24}D+N_{25}\Omega\right)\right)\end{cases} \tag{14}$$

2.3　视恒星时变换矩阵

相对于惯性空间的地球自转角度（Earth Rotation Angle, ERA），可用当地子午线相对于天球上的非旋转原点（Non-Rotational Origin, NRO）的角运动来度量。格林尼治恒星时（Greenwich Sidereal Time, GST）以春分点通过格林尼治子午圈为参考起点，在数值上等于春分点相对于格林尼治子午圈的时角，格林尼治恒星时字面上虽带“时”字，其实给出的是 0~2π之间的角度值。由于章动的影响，春分点有平春分点和真春分点之分，GST 也有格林尼治平恒星时角（Greenwich Mean Sidereal Time, GMST）和格林尼治视恒星时角（Greenwich Apparent Sidereal Time, GAST）之分。

在 IAU2000 模型中，ERA θ_{E}为

$$\theta_{\mathrm{E}}=2\pi\times(0.7790572732640+1.00273781191135448dJD_{\mathrm{UT1}})\ \ (\mathrm{rad}) \tag{15}$$

其中，$dJD_{\mathrm{UT1}}=JD_{\mathrm{UT1}}-JD_{00}$，为 J2000.0 参考历元($JD_{00}$=2451545.0)至$t$时刻历元$JD_{\mathrm{UT1}}$的儒略日间隔，注意计算$JD_{\mathrm{UT1}}$的时间应该使用 UT1 时间。式(15)的计算与岁差及章动无关。由式(15)还可知，地球转速的不均匀即意味着世界时 UT1 的不均匀。

在地球自转角度的基础上考虑岁差的影响，GMST θ_{M}的计算公式为：

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{M}}&=\theta_{\mathrm{E}}+\theta_{\psi\varepsilon}=\\ &\theta_{\mathrm{E}}+(0.014506''+4612.15739966''T_{\mathrm{TT}}+\\ &1.39667721''T_{\mathrm{TT}}^2-0.00009344''T_{\mathrm{TT}}^3+0.00001882''T_{\mathrm{TT}}^4)\approx\\ &\theta_{\mathrm{E}}+4612.15739966''T_{\mathrm{TT}}\end{aligned} \tag{16}$$

注意到，式(16)右端的多项式$\theta_{\psi\varepsilon}$近似表示黄经总岁差在天赤道上的投影，即近似有$\theta_{\psi\varepsilon}=\psi\cdot\cos\varepsilon$。

进一步考虑章动的影响，得 GAST θ_{A}的计算公式为：

$$\theta_{\mathrm{A}}=\theta_{\mathrm{M}}+\Delta\psi\cdot\cos\varepsilon \tag{17}$$

其中，$\Delta\psi\cdot\cos\varepsilon$为黄经章动在天赤道上的投影，即赤经章动。这表明，GAST 是瞬时春分点与格林尼治零度经线间的夹角，其变化主要取决于地球自转角，同时与岁差和章动导致瞬时春分点的移动有关。

最后，将瞬时地球坐标系（记为 E 系）绕其 Z 轴旋转$-\theta_{\mathrm{A}}$角度后便得瞬时天球坐标系（N 系），该变换矩阵即为视恒星时变换矩阵

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{E}}=\boldsymbol{R}_Z\left(-\theta_{\mathrm{A}}\right) \tag{18}$$

2.4　极移变换矩阵

由于地球表面上的物质运动（如洋流等）以及地球内部的物质运动（如地幔对流等），地球自转轴在其内部会缓慢变化，从而引起地球瞬时极点在地面上位置的不断移动，导致瞬时地球坐标系与协议地球坐标系之间的差异。极移变换矩阵为：

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{R}_Y\left(-x_p\right)\boldsymbol{R}_X\left(-y_p\right) \tag{19}$$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中，e 为协议地球坐标系（比如 WGS84 坐标系），x_p 和 y_p 是瞬时极相对于国际协议原点（Conventional International Origin, CIO）的角度值，其方向分别是从 CIO 指向 0 °经线和 270 °经线方向，两者大小一般小于 0.5″，即时数值变化可在 www.iers.org 网站查得[13]。

3 简化计算与误差分析

前面已对 IAU 模型各计算公式进行了近似和简化，忽略了 0.1″及更小量级的项。下面将对时间系统类型（UTC、UT1、TDB 和 TT）的选用问题做进一步的分析和简化。

如果时间输入参数 UT1 相差 1 s，根据 ERA 计算式(15)求误差，可得：

$$\delta\theta_{\mathrm{E}} = 2\pi \times 1.00273781191135448 \times \frac{1}{24\times 3600} = 15'' \quad (20)$$

该值近似是地球在 1 s 内转过的角度（15.04″）。因此，为了使 ERA 的计算误差达到 0.1″量级，需要 UT1 的输入精度达到 0.01 s；若要 ERA 的计算误差为 1″量级，则 UT1 的精度只需达到 0.1 s 即可。

在 GMST 的计算式(16)中，若以 UTC 代替 TT（目前 $\mathrm{TT}-\mathrm{UTC}=37+32.184=69.184\,\mathrm{s}$），则由 $\theta_{\psi\varepsilon}$ 引起的误差仅为：

$$\delta\theta_{\psi\varepsilon} = 4612.1573966'' \times \frac{69.184}{24\times 3600\times 36525} \approx 0.0001'' \approx 0 \quad (21)$$

由此可见，以 UTC 代替 TT 引起的 GMST 计算误差极小，完全可忽略不计。

同理，在岁差参数式(10)中，以 UTC 代替 TT，其对岁差矩阵的影响也可忽略，即有：

$$\begin{cases} \delta\zeta = \delta z = 2306.2181'' \times \dfrac{69.184}{24\times 3600\times 36525} \approx 0.00005'' \approx 0 \\ \delta\theta = 2004.3109'' \times \dfrac{69.184}{24\times 3600\times 36525} \approx 0.00005'' \approx 0 \end{cases} \quad (22)$$

最后，在章动计算式(14)中，若仅对 $\Delta\psi \approx A_1 \sin(N_{51}\Omega)$ 作误差估计，以 UTC 代替 TT，可得其引起的误差为：

$$\delta(\Delta\psi) = A_1 N_{51}\cos(N_{51}\Omega)\cdot\delta\Omega < |A_1 N_{51}\delta\Omega| = 17.1996'' \times 6962890.2665'' \times \frac{69.184}{24\times 3600\times 36525} \approx 0.00001'' \approx 0 \quad (23)$$

类似的，可计算得式(14)中其它项的误差，也都非常小。

上述分析表明，最主要的时间误差来源于 ERA 的计算，其 UT1 输入精度至少应该达到 0.1 s，而其他天文参数计算中的时间 TT 或 TDB 均可以直接使用 UTC 时间代替，对导航应用而言没有任何区别。

更进一步，在式(21)中，若将 69.184 s 扩大为 1 天（24×3600 s）跨度，则有：

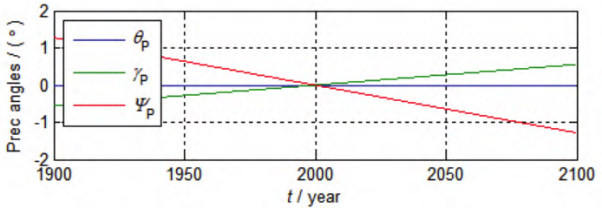
$$\delta\theta_{\psi\varepsilon} = 4612.15739966'' \times \frac{24\times 3600}{24\times 3600\times 36525} \approx 0.13'' \quad (24)$$

同理，在 1 天跨度下，式(22)(23)的误差也都不会大于 0.1″量级。因此，除 ERA 须实时计算外，其他天文参数的计算可以每天仅更新计算一次，便可满足角秒级天文导航的精度需求。

4 仿真验证

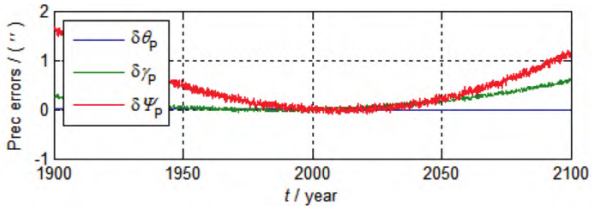
以 J2000.0 历元为时间中点，给出公元 1900 年~2100 年两百年间的岁差（Precession）、章动（Nutation）及格林尼治视恒星时（GAST）计算结果，采样间隔为 36.525 天，并在固定间隔中加入均值为 0、均方差为 12 天的正态分布随机抖动。

对比仿真结果如图 1 所示。图 1(a)(c)(e)为 SOFA 算法程序（调用函数 iauPn06a 和 iauGst06a）给出的结果，将作为参考真值使用。其中图 1(a)为矩阵 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{i}}$ 按“3-1-2”方式给出的俯仰、横滚和方位三个岁差欧拉角，分别记为 θ_{P}，γ_{P}，ψ_{P}，图 1(c)为矩阵 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{P}}$ 按“3-1-2”方式给出的俯仰、横滚和方位三个章动欧拉角，分别记为 θ_{N}，γ_{N}，ψ_{N}，图 1(e)为 GAST 角度 θ_{A}。图 1(b)(d)(f)为本文简化算法（除计算 ERA 外，其他公式中的时间输入参数均加入均值为 0、均方差为 0.33 天的正态分布随机抖动）与 SOFA 算法参考基准之间的岁差欧拉角误差、章动欧拉角误差和 GAST 误差。由误差图 1(b)(d)(f)可见，三个章动欧拉角误差基本上小于 2″；岁差俯仰误差角 $\delta\theta_{\mathrm{P}}$ 很小、岁差横滚误差角 $\delta\gamma_{\mathrm{P}}$ 基本小于 0.5″；只有岁差方位误差角 $\delta\psi_{\mathrm{P}}$ 和 GAST 角度误差 $\delta\psi_{\mathrm{A}}$ 在两端稍大些但两者取值大致互为相反数。



(a) 岁差欧拉角

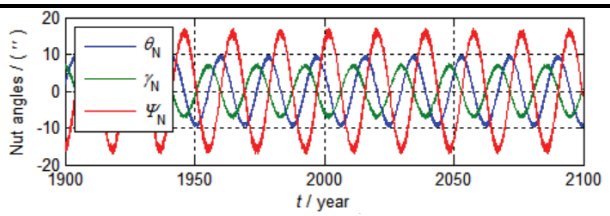
(a) Precession Euler angles



(b) 岁差欧拉角误差

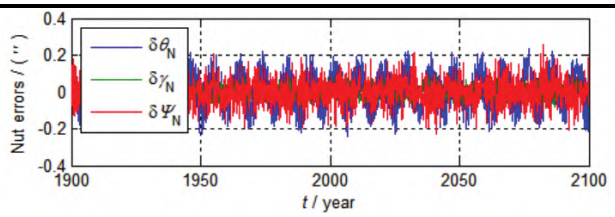
(b) Errors of precession Euler angle

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net



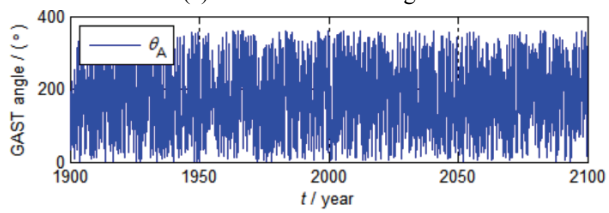
(c)　章动欧拉角

(c)　Nutation Euler angles



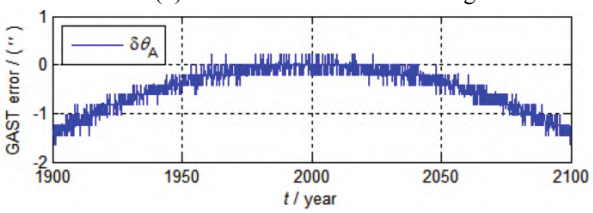
(d)　章动欧拉角误差

(d)　Errors of nutation Euler angle



(e)　GAST 角

(e)　GAST angle



(f)　GAST 角误差

(f)　Error of GAST angle

图 1　岁差、章动、GAST 欧拉角及其误差曲线

Fig.1　Precession, nutation, GAST Euler angles and the corresponding errors

根据 2 节的各项坐标系变换，综合可得从协议天球坐标系（J2000, i 系）到协议地球坐标系（WGS84, e 系）的坐标系转换矩阵[14,15]，为：

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}}=\left(\boldsymbol{R}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{P}}\right)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{R}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{i}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{P}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{E}} \tag{25}$$

式(25)转换过程示意图参见图 2。

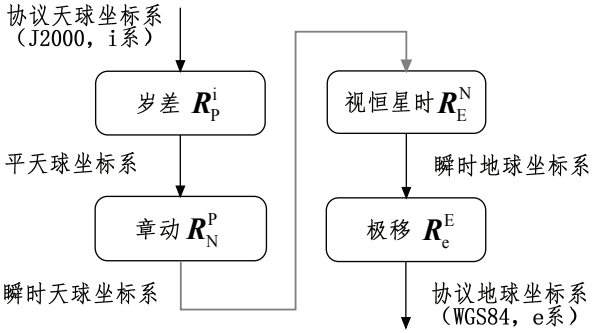


图 2　从 i 系到 e 系的坐标系转换过程

Fig.2　Flowchart of coordinate system transformation from i-frame to e-frame

若不考虑极移，即令 $x_p=y_p=0$（$\boldsymbol{R}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}}=\mathbf{I}_{3\times3}$），使用图 1 中的仿真数据并按式(25)计算从 i 系到 e 系转换矩阵 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}}$，同样按“3-1-2”方式给出 i 系至 e 系的欧拉角，图 3 是本文算法与 SOFA 算法参考基准之间的欧拉角误差。

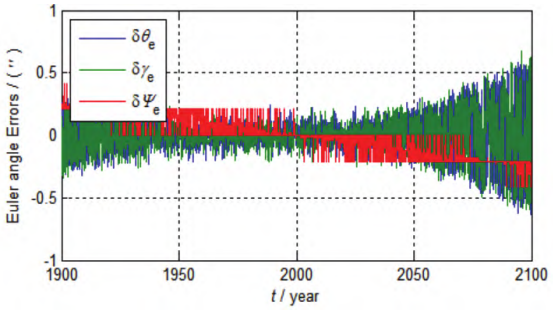


图 3　从 J2000 到 WGS84 转换（$\boldsymbol{R}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}}$）的欧拉角误差

Fig.3　Euler angle errors of coordinate system transformation from J2000 to WGS84 ($\boldsymbol{R}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}}$)

由图 3 可见，前述图 1 中误差 $\delta\psi_{\mathrm{P}}$ 和 $\delta\psi_{\mathrm{A}}$ 之间大部分相互抵消了，从而使得这里 $\boldsymbol{R}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}}$ 的三个欧拉角误差基本都小于 0.5″。这说明，对于实际导航应用，本文所提简化算法的误差在 2050 年之前基本可小于 0.2″。

5　结 论

在惯性/天文组合导航中，需要将在 J2000 天球坐标系（i 系）中测量的天文传感器信息转换到 WGS84 地球坐标系（e 系），在专业的天文学中其精确的转换过程比较烦琐，特别是章动矩阵的计算量较大。本文研究表明，除地球自转角的计算需要比较精确的 UT1 时间（0.01 s 量级）外，其他天文参数计算中的时间输入均可直接使用 UTC 时间代替，甚至在一天之内仅需更新计算一次从 i 系到 e 系的坐标转换，都不会引起明显的坐标转换误差，能够满足角秒级的天文传感器测姿精度需求。仿真结果显示，与 SOFA 参考基准相比，所提简化算法的转换精度达到了 0.2″。

参考文献（References）：

[1] Gou B, Cheng Y. INS/CNS integrated navigation based on corrected infrared earth measurement[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2019, 68(9): 3358-3366.

[2] 韩健. 基于捷联惯性/星敏感器的全自主导航方法[D]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学，2017.
Han J. Autonomous navigation method based on strapdown inertial navigation system/star-sensor[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2017.

[3] Zhou L, Dong Y, Zhao W, et al. Novel SCNS/RSINS tight-integrated alignment based on adaptive interacting multiple model filters on shipboard[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2016, 24(4): 464-472.

（下转第 103 页）

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

Journal of Chinese Inertial Technology, 2018, 23(1): 45-50.

[8] Wang H, Fu G, Li J, et al. An adaptive UKF based SLAM for unmanned underwater vehicle[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2013, (12): 1-12.

[9] Li Y, Wang C, Gong J. A multi-model probability SOC fusion estimation approach using an improved adaptive unscented Kalman filter technique[J]. ENEGRY-OXFORD, 2017, 141(1): 1402-1415.

[10] Shen K, Jing Z, Dong P. A consensus nonlinear filter with measurement uncertainty in distributed sensor networks[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2017, 24(11): 1631-1635.

[11] 徐巍军. 基于贝叶斯滤波器的移动机器人同时定位与地图创建算法研究[D]. 杭州：浙江大学，2016.
Xu W. Research on Bayesian filters based simultaneous localization and mapping algorithms for mobile robots[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2016.

[12] 张抒扬，董鹏，敬忠良. 变分贝叶斯自适应容积卡尔曼的 SLAM 算法[J]. 哈尔滨工业大学学报，2019, 51(04): 12-18.
Zhang S, Dong P, Jing Z. Variational Bayesian adaptive volume Kalman SLAM algorithm[J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2019, 51(04): 12-18.

[13] 陈刚，王丽娟. 基于高斯混合模型的非平衡数据对称翻转算法[J]. 信息与控制，2020, 49(02): 203-209+218.
Wang G, Wang L. Symmetric inverting algorithm for imbalanced datasets based on Gaussian mixture Model[J]. Journal of Information and Control, 2020, 49(02): 203-209+218.

[14] 于兴凯. 基于变分贝叶斯推理的非线性滤波算法研究[D]. 上海：上海交通大学，2019.
Yu X. Research on nonlinear filtering algorithm based on variational Bayesian inference[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2019.

[15] Zhang Y, Yang K, Yang Q. Probability density function of ocean noise based on a variational Bayesian Gaussian mixture model[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 2020, 147(4): 2087.

（上接第 95 页）

[4] 杨淑洁，杨功流，尹洪亮，等. 一种航天飞行器的 INS/CNS 自主导航方案[J]. 中国惯性技术学报，2014, 22(6): 728-733.
Yang S, Yang G, Yin H, et al. Scheme design of autonomous integrated INS/CNS navigation systems for spacecraft[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2014, 22(6): 728-733.

[5] Hagstrom T, Atkinson D, Miller M. The B-2 stealth bomber integrated navigation system[J]. 23rd Joint Service Data Exchange for Guidance, Navigation and Control, 1996, 11: 1-10.

[6] 徐卿，赵春晖，白山，等. 面向天文/惯性组合导航的全天时星敏感器研究现状及关键技术[C]//中国惯性技术学会 2019 科技工作者研讨会. 中国，昆明，10 月 23-25 日，2019.
Xu Q, Zhao C, Bai S, et al. Research status and key technology of all-sky star sensor for astronomical/inertial integrated navigation[C]//2019 Symposium for Chinese Inertial Technology. Kunming, China, October 23-25, 2019.

[7] 刘佳成. 新天文参考系若干问题研究[D]. 南京：南京大学，2012.
Liu J. The establishment, realization, and transformation of new astronomical reference systems[D]. Nanjing: Nanjing University, 2012.

[8] Iausofa[EB/OL]. (2021-5-21)[2022]. http://www.iausofa.org/current_C. html#Downloads.

[9] 刘新江. 基于自动观测的天文大地测量新方法研究[D]. 河南：战略支援部队信息工程大学，2020.
Liu X. New astrogeodetic methods based on automatic observation[D]. Henan: Information Engineering University, 2020.

[10] 李征航，魏二虎，王正涛，等. 空间大地测量学[M]. 武汉大学出版社，2010.
Li Z, Wei E, Wang Z, et al. Space geodesy[M]. Wuhan University Press, 2010.

[11] 冯俊杰，苏红，高洁，等. 历届国际计量大会梗概[J]. 中国计量，2007, 1: 46-48.
Feng J, Su H, Gao J, et al. Summary of previous international metrology conferences[J]. China Metrology, 2007, 1: 46-48.

[12] 冯俊杰，苏红，高洁，等. 历届国际计量大会梗概（续）[J]. 中国计量，2007, 2: 45-48.
Feng J, Su H, Gao J, et al. Summary of previous international metrology conferences (Continued)[J]. China Metrology, 2007, 2: 45-48.

[13] Iers[EB/OL]. (2021-6-29)[2022]. https://www.iers.org/IERS/EN/Publications/Bulletins/bulletins.html.

[14] 张方照，许国昌，Barriot J. 岁差章动极移对轨道根数的影响[J]. 地球物理学进展，2019, 34(6): 2205-2211.
Zhang F, Xu G, Barriot J. Keplerian orbit elements induced by precession, nutation and polar motion[J]. Progress in Geophysics, 2019, 34(6): 2205-2211.

[15] 张彦芬，张永战，周星宇. 基于 SOFA 的时间和坐标系统转换实现[J]. 经纬天地，2019, (1): 80-83.
Zhang Y, Zhang Y, Zhou X. Realization of time and coordinate system conversion based on SOFA[J]. Survey World, 2019, (1): 80-83.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

文章编号：1005-6734(2022)02-0154-05 doi.10.13695/j.cnki.12-1222/o3.2022.02.003

地球自转模型误差对高精度惯导系统定位精度的影响分析

严恭敏，戴晨杰，陈若彤
（西北工业大学 自动化学院，西安 710072）

摘要：针对 1 n mile/100 d 甚至更高精度的长航时惯性导航定位需求，分析并指出了传统地球自转角速度模型参数的不足之处。根据天文学中的岁差、章动和日长变化等相关模型，推导了求解精确的地球自转角速度的方法，给出了传统地球自转角速度模型误差的表达式，对惯导系统误差传播方程进行了修正。开展了长航时高精度惯性导航误差仿真验证，结果显示，传统的地球自转角速度模型误差会引起 0.1 n mile/100 d 的纯惯性定位误差，但经过修正后误差可降低 60%以上，仿真结果验证了所描述的误差传播方程的正确性。

关 键 词：惯导系统；长航时高精度；地球自转模型误差；误差传播方程；数值仿真
中图分类号：V249.3 **文献标志码：**A

The influence of earth's rotation model error on positioning accuracy of high-performance INS

YAN Gongmin, DAI Chenjie, CHEN Ruotong
(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: The shortcomings of the conventional earth rotation angular velocity parameters are analyzed and pointed out for the long-endurance inertial navigation positioning requirements with 1 n mile/100 d or even higher accuracy. Based on the models related to the precession, nutation and day length variation in astronomy, the method for solving the accurate earth rotation angular velocity is derived, the expression of the traditional earth rotation angular velocity error is given and the error propagation equation of the inertial navigation system is modified. The results of simulation of long-endurance high-precision inertial navigation errors show that the traditional angular velocity model error of the Earth's rotation may cause a pure inertial positioning error of 0.1 n mile/100 d, but after a simple correction the error can be reduced by more than 60%, the results also verify the correctness of the proposed error propagation equation.

Key words: inertial navigation system; long endurance and high accuracy; the Earth's rotation model error; error propagation equations; numerical simulation

惯性导航的主要误差源有惯性传感器误差、初始条件误差和导航解算误差。毋庸置疑，惯性传感器及其硬件系统集成的性能在导航精度中发挥着决定性作用。初始条件误差主要是指姿态和方位的初始化误差，尤其是方位对准精度对自主高精度惯性导航会产生重要的影响[1,2]。导航解算误差的影响相对较小，采用多子样、高阶和迭代等不可交换误差补偿算法后[3-6]，即使是在高动态恶劣环境下由算法引起的导航误差也可忽略不计。

除上述传统观点中的三种导航误差源外，实际上还有一类误差源经常被忽略了，即导航环境因素误差。惯性导航一般是在地球表面上进行并以地球作为参照物的，惯导系统的外部环境——地球的几何形状、重力场分布以及自转角速度等因素都会影响导航解算精度。近年来，地球的几何形状参数建模已经非常精确，其厘米级误差对长航时惯性定位的百米级以上精度需求的影响可以不予考虑。重力场垂线偏差对惯性导航精度的影响较大，已有不少文献进行了深入的研究[7]，

收稿日期：2021-12-20；**修回日期：**2022-03-31
基金项目：国家自然科学基金（51879219）
作者简介：严恭敏（1977—），男，博士，副教授，主要从事惯性导航与信息融合理论研究。E-mail：yangongmin@163.com

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

重力补偿技术已在航空惯导和测地车惯导零速修正等场合获得了实际应用。目前，在惯性导航领域中尚未发现有文献针对地球自转角速度的影响进行专门研究。

在惯性导航专业中，通常认为地球自转角速度仅在其自转轴方向存在分量，大小为 $\omega_{\mathrm{ie}}=15.041067178670319^\circ/\mathrm{h}$，而在垂直自转轴方向上的角速率均为零。然而，天文学研究显示[8]：由于太阳、月球及行星对地球上赤道隆起部分的作用力矩而导致赤道平面的进动（赤道岁差），其角速率每年约西移 50.39″，旋转一周约 2.6 万年；行星对地月质心绕日公转黄道面影响，造成春分点移动（黄道岁差），其角速率每年约东移 0.1″，而且还会使黄赤交角在 21 °55 ″~24 °18 ″范围内变化。这些运动信息表明，地球自转轴在惯性空间中的指向并不是恒定不变的，或者说地球在垂直于其自转轴的方向上存在微小的转动角速率分量，该现象势必对长航时高精度的惯导系统产生不利影响。

在天文大地测量学中，地球定向参数（Earth Orientation Parameters, EOP）是描述地球自转运动规律的一组参数，包含极移、地球自转变化和日长变化（Length Of Day, LOD）。本文根据国际天文联合会（International Astronomical Union, IAU）的岁差章动模型和大地测量学 EOP 的 LOD 数据，推导出地球旋转变换矩阵，并获得了求解精确的地球旋转角速度的方法，给出了传统地球自转角速度模型误差的表达式，修正了传统惯导系统误差传播方程，最后进行了长航时高精度惯性导航误差的仿真验证。

1　地球自转角速度模型误差

根据天文学理论，从协议天球坐标系（比如 J2000 坐标系，简记 i 系）到协议地球坐标系（比如 WGS84 坐标系，简记 e 系）的坐标系转换矩阵为[9]：

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}}=\left(\boldsymbol{C}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{N}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{P}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{P}}$、$\boldsymbol{C}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{N}}$、$\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{E}}$、$\boldsymbol{C}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}}$ 分别为从 i 系到平天球坐标系（简记 P 系）、从 P 系到瞬时天球坐标系（简记 N 系）、从 N 系到瞬时地球坐标系（简记 E 系）、从 E 系到 e 系的坐标转换矩阵，这四个转换矩阵分别为：

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{P}}=\boldsymbol{R}_Z\left(-z\right)\boldsymbol{R}_Y\left(\theta\right)\boldsymbol{R}_Z\left(-\zeta\right) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{P}}^{\mathrm{N}}=\boldsymbol{R}_X\left(-\varepsilon-\Delta\varepsilon\right)\boldsymbol{R}_Z\left(-\Delta\psi\right)\boldsymbol{R}_X\left(\varepsilon\right) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{E}}=\boldsymbol{R}_Z\left(-\theta_A\right) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{R}_Y\left(-x_p\right)\boldsymbol{R}_X\left(-y_p\right) \tag{5}$$

其中，ζ、θ、z 为三个岁差角参数，ε、$\Delta\psi$、$\Delta\varepsilon$ 分别称为黄赤交角、黄经章动和黄赤交角章动，θ_A 为格林尼治视恒星时（Greenwich Apparent Sidereal Time，GAST），x_p 和 y_p 是瞬时极相对于国际协议原点（Conventional International Origin, CIO）的角度值，$\boldsymbol{R}_s\left(\cdot\right)\left(s=X,Y,Z\right)$ 表示绕坐标轴旋转的坐标变换矩阵。上述各参数的详细计算或获取方法可参见文献[8,9]。特别地，下面仅对参数 θ_A 作详细分析。

格林尼治视恒星时 θ_A 是瞬时春分点与格里尼治零度经线之间的夹角，其变化主要取决于地球自转，同时与岁差章动导致瞬时春分点的移动有关。θ_A 的计算公式为：

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{A}}=\theta_{\mathrm{E}}+(&0.014506''+4612.15739966''T_{\mathrm{TT}}+\\&1.39667721''T_{\mathrm{TT}}^2)+\Delta\psi\cdot\cos\varepsilon\end{aligned} \tag{6}$$

其中，$T_{\mathrm{TT}}=\dfrac{JD_{\mathrm{TT}}-JD_{00}}{36525}$ 为 J2000.0 参考历元（$JD_{00}=2451545.0$）至儒略日 JD_{TT} 历元时刻之间的儒略世纪数，θ_{E} 是地球自转角，其计算公式为：

$$\begin{aligned}\theta_{\mathrm{E}}=2\pi\times(&0.7790572732640+\\&1.00273781191135448\mathrm{d}JD_{\mathrm{UT1}})\end{aligned}\ (\mathrm{rad}) \tag{7}$$

其中，$dJD_{\mathrm{UT1}}=JD_{\mathrm{UT1}}-JD_{00}$ 为 J2000.0 参考历元至儒略日 JD_{UT1} 历元时刻的儒略日间隔。

将式(7)对时间求导，可得瞬时地球自转角速率，如下：

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_{\mathrm{E}}=2\pi\times\ 1.00273781191135448&\frac{\mathrm{d}(dJD_{\mathrm{UT1}})}{\mathrm{d}t}(\mathrm{rad/d})=\\15.041067178670319&\frac{\mathrm{d}(UT1)}{\mathrm{d}t}\quad(^\circ/\mathrm{h})\end{aligned} \tag{8}$$

式(8)表示的是瞬时地球坐标系（E 系）的 Z 轴相对于惯性坐标系（i 系）的瞬时角速率，由于几乎不受极移的影响，也可以认为 $\dot{\theta}_{\mathrm{E}}$ 是协议地球坐标系（e 系）的 Z 轴相对于（i 系）的瞬时角速率。

式(8)中的系数便是传统惯导文献给出的地球自转角速率 ω_{ie}，即有 $\omega_{\mathrm{ie}}=15.041067178670319^\circ/\mathrm{h}$，其含义是 e 系的 Z 轴相对于 i 系的“平均”角速率。实际上，由于地球自转变化（日长变化），即世界时 UT1 不均匀，使得 $\mathrm{d}(UT1)/\mathrm{d}t$ 并不严格等于 1，地球自转角速率真值 $\dot{\theta}_{\mathrm{E}}$ 将在常值 ω_{ie} 附近波动。由此可见，传统惯导中的地球自转角速度矢量模型是有误差的，将传统地球自转角速度记为：

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \omega_{\mathrm{ie}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{9}$$

为了更精确地求解地球自转角速度矢量，利用如

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

下方向余弦阵微分方程：

$$\dot{\boldsymbol{C}}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}}\left(\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}\times\right) \tag{10}$$

再结合式(1)，理论上已知矩阵 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}}$ 便可求得地球自转角速度的精确值 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}$。由于 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}$ 是缓变量，且式(1)中只能利用天文学参数计算求得 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{i}}$ 的数值解，因而可求得 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}$ 在一段时间内（比如一分钟）的平均值，将平均值视为地球自转角速度的精确值。显然，$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}$ 的 Z 轴分量计算结果应当与式(8)一致，即有 $\omega_{\mathrm{ie},Z}=\dot{\theta}_{\mathrm{E}}$，但由于岁差、章动和极移的影响，$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}$ 的 X 轴和 Z 轴分量不会恰好为 0。

定义地球自转角速度模型误差，记为：

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}=\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}-\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}&=\left[-\omega_{\mathrm{ie},X}^{\mathrm{e}}\quad-\omega_{\mathrm{ie},Y}^{\mathrm{e}}\quad\omega_{\mathrm{ie}}-\dot{\theta}_{\mathrm{E}}\right]^{\mathrm{T}}=\\&\left[-\omega_{\mathrm{ie},X}^{\mathrm{e}}\quad-\omega_{\mathrm{ie},Y}^{\mathrm{e}}\quad\omega_{\mathrm{ie}}\left(1-\frac{\mathrm{d}(UT1)}{\mathrm{d}t}\right)\right]^{\mathrm{T}}=\\&\left[-\omega_{\mathrm{ie},X}^{\mathrm{e}}\quad-\omega_{\mathrm{ie},Y}^{\mathrm{e}}\quad\omega_{\mathrm{ie}}\eta_{\mathrm{LOD}}\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{11}$$

其中，η_{LOD} 为 LOD 一天之中的相对变化量，可由 EOP 中的 LOD 数据（以秒为单位）计算，即有 $\eta_{\mathrm{LOD}}=\mathrm{LOD}/\left(24\times3600\right)$。

2 惯导误差传播方程修正与误差特性分析

2.1 误差方程推导

选“东-北-天”地理坐标系为导航参考系（简记 n 系），由惯导系统在地球表面所处的经度 λ 和纬度 L，可得惯导位置矩阵：

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}}=\begin{bmatrix}-\mathrm{s}_{\lambda}&-\mathrm{s}_{L}\mathrm{c}_{\lambda}&\mathrm{c}_{L}\mathrm{c}_{\lambda}\\\mathrm{c}_{\lambda}&-\mathrm{s}_{L}\mathrm{s}_{\lambda}&\mathrm{c}_{L}\mathrm{s}_{\lambda}\\0&\mathrm{c}_{L}&\mathrm{s}_{L}\end{bmatrix} \tag{12}$$

式中，s_{α}、c_{α} 分别表示 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$。

对如下角速度坐标转换公式：

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{N}} \tag{13}$$

两边同时求误差，考虑到 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{E}}$ 是无误差的，可得：

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{n}}=&\delta\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\cdot\boldsymbol{C}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{N}}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\cdot\delta\boldsymbol{C}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}}\cdot\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{N}}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{E}}\cdot\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{N}}\approx\\&\delta\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\cdot\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\cdot\left(\mathbf{I}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}}\right)\cdot\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{C}_{\mathrm{N}}^{\mathrm{E}}\cdot\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{N}}=\\&\boldsymbol{M}_{1}\delta\boldsymbol{p}+\delta\boldsymbol{W}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{R}_{Z}\left(-\theta_{E}\right)\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{N}}\end{aligned} \tag{14}$$

式中，

$$\delta\boldsymbol{W}=\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}(\mathbf{I}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{E}}^{\mathrm{e}})\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}\approx\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\begin{bmatrix}0&0&-x_{p}\\0&0&y_{p}\\x_{p}&-y_{p}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\\omega_{\mathrm{ie}}\end{bmatrix}=\omega_{\mathrm{ie}}\begin{bmatrix}\mathrm{s}_{\lambda}x_{p}+\mathrm{c}_{\lambda}y_{p}\\\mathrm{s}_{L}(\mathrm{c}_{\lambda}x_{p}-\mathrm{s}_{\lambda}y_{p})\\-\mathrm{c}_{L}(\mathrm{c}_{\lambda}x_{p}-\mathrm{s}_{\lambda}y_{p})\end{bmatrix},$$

$$\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{N}}=\begin{bmatrix}\delta\omega_{\mathrm{ie},X}^{\mathrm{N}}\\\delta\omega_{\mathrm{ie},Y}^{\mathrm{N}}\\\omega_{\mathrm{ie}}\eta_{\mathrm{LOD}}\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{M}_{1}$ 的具体定义详见文献[10]；$\delta\boldsymbol{W}$ 为因极移引起的在 n 系上投影的地球自转误差，注意到，有 $\delta W_{Y}c_{L}+\delta W_{Z}s_{L}=0$ 成立，也就是极轴方向的极移误差为零；$\delta\omega_{\mathrm{ie},X}^{\mathrm{N}}$、$\delta\omega_{\mathrm{ie},Y}^{\mathrm{N}}$ 为因岁差章动而引起的地球自转轴的摆动角速率误差（垂直于地球自转轴），它们均是在瞬时天球坐标系（N 系）上投影的，不受地球自转的影响。将 $\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{N}}$ 转换到导航系（n 系）过程中，将受到地球自转角矩阵 $\boldsymbol{R}_{Z}\left(-\theta_{E}\right)$ 的调制作用。x_{p}、y_{p} 是瞬时极相对于 CIO 的角度值，其方向分别是从 CIO 指向 0 °经线和 270 °经线方向，两者大小一般小于 0.5 ″。

将式(14)代入捷联惯导误差传播方程[10]，可求得失准角误差 $\boldsymbol{\phi}$、速度误差 $\delta\boldsymbol{v}^{n}$ 和位置误差 $\delta\boldsymbol{p}$ 方程，分别为：

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\phi}}=&\boldsymbol{M}_{aa}\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{M}_{av}\delta\boldsymbol{v}^{n}+\boldsymbol{M}_{av}\delta\boldsymbol{p}-\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\varepsilon}^{b}+\\&\left[\delta\boldsymbol{W}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{R}_{Z}(-\theta_{\mathrm{E}})\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{N}}\right]\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}\delta\dot{\boldsymbol{v}}^{n}=&\boldsymbol{M}_{va}\boldsymbol{\phi}+\boldsymbol{M}_{vv}\delta\boldsymbol{v}^{n}+\boldsymbol{M}_{vp}\delta\boldsymbol{p}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{\nabla}^{b}+\\&(2\boldsymbol{v}^{n}\times)\left[\delta\boldsymbol{W}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{R}_{Z}(-\theta_{\mathrm{E}})\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{N}}\right]\end{aligned} \tag{16}$$

$$\delta\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{M}_{pv}\delta\boldsymbol{v}^{n}+\boldsymbol{M}_{pp}\delta\boldsymbol{p} \tag{17}$$

式中，$\boldsymbol{C}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{n}}$ 为捷联惯导的姿态矩阵；$\boldsymbol{\varepsilon}^{b}$、$\boldsymbol{\nabla}^{b}$ 分别为陀螺仪漂移和加速度计零偏。$\boldsymbol{M}_{*}$ 的具体定义详见文献[10]。

2.2 误差特性分析

首先，在式(15)中，假设极移为 0.5 ″，则极移误差 $\delta\boldsymbol{W}$ 的幅值约为 $\omega_{\mathrm{ie}}\times0.5''=3.6\times10^{-5}$ °/h；而 $\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{N}}$ 的幅值仅约为 1×10^{-6} °/h 量级，可见短时间内（比如 1 d 内）$\delta\boldsymbol{W}$ 比 $\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{N}}$ 的影响大得多。$\delta\boldsymbol{W}$ 在 1/4 个修拉周期内引起的失准角波动幅值约为 3.6×10^{-5} °/h × 84.4 min/4= 0.05 ″。在式(16)中，假设惯导速度 $\boldsymbol{v}^{n}$ 大小幅值为 10 m/s，则由 $\delta\boldsymbol{W}$ 引起的加速度误差等效为水平失准角仅约为 $(2\times10\ \mathrm{m/s}\times3.6\times10^{-6}\ °/\mathrm{h})/g=7.2\times10^{-5}$ ″。因此，速度误差式(16)的最后一项可以忽略不计，本文所提出的捷联惯导误差传播方程仅需在姿态误差式(15)的最后增加 $[\delta\boldsymbol{W}+\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}\boldsymbol{R}_{Z}(-\theta_{\mathrm{E}})\delta\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{N}}]$ 即可。

其次，如果惯导系统移动速度缓慢，将位置矩阵 $\boldsymbol{C}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{n}}$ 近似为常值，则一段时间内（比如 10 d 内）极移

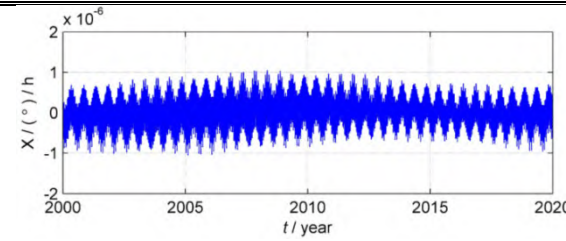
(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

误差 $\delta\boldsymbol{W}$ 也可近似为常值。根据惯导误差传播规律，等效东向常值陀螺漂移会引起纬度误差 δL 的等幅振荡（地球自转周期 1 d）；由于等效北向漂移和天向漂移之间存在关系 $\delta W_Y c_L + \delta W_Z s_L = 0$，使得经度误差 $\delta\lambda$ 并不会产生随时间增长的趋势，北向和天向漂移也仅会引起纬度误差振荡。总之，极移误差 $\delta\boldsymbol{W}$ 不会引起明显的经度误差，而引起的纬度误差 δL 振荡幅值恰好等于极移的幅值 $\sqrt{x_p^2 + y_p^2}$。在姿态误差方程式(15)中，当导航时间较短时（约 5 d 以下），$\delta\boldsymbol{W}$ 起主导作用；时间比较长时（约 10 d 以上），$\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{N}$ 起主导作用。

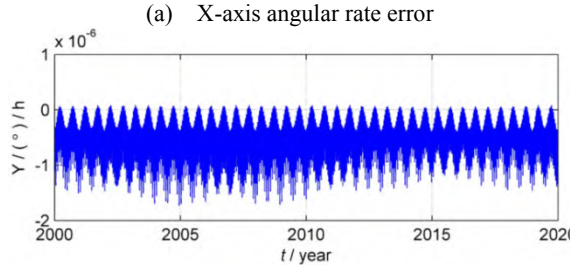
3　数值仿真验证

3.1　地球自转角速度误差仿真

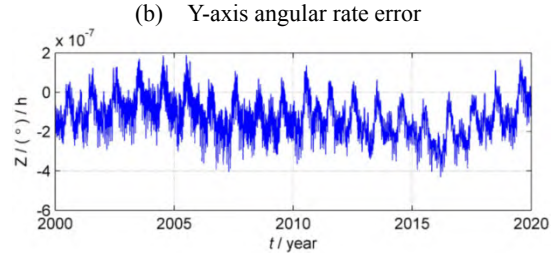
不考虑极移的影响，调用天文标准库（Standards Of Fundamental Astronomy, SOFA）提供的开源程序（iauPn06a 和 iauGst06a 函数）[11]，并从地球自转服务网站（www.iers.org）下载 LOD 数据[12]，计算 2000 年~2020 年间的地球自转角速度误差 $\delta\boldsymbol{\omega}_{ie}^{N}$，其三轴分量如图 1 所示，它们的均值为 $[-0.008\ -0.633\ -0.131]^{\mathrm{T}} \times 10^{-6}$ °/h。图 1(a)(b)显示，X 轴和 Y 轴的波动峰峰值约为 1×10^{-6} °/h，该波动主要由章动引起；岁差在 N 系的 Y 轴投影形成了 Y 轴曲线的常值误差；图 1(c)中的 Z 轴均值为负，显示了地球自转角速率的减速现象，Z 轴波动反映了地球自转的不均匀，相对不均匀性（稳定度）约为：$\dfrac{5\times10^{-7}\,°/\mathrm{h}}{15°/\mathrm{h}} \approx 3\times10^{-8}$。



(a)　X 轴角速率误差
(a)　X-axis angular rate error



(b)　Y 轴角速率误差
(b)　Y-axis angular rate error

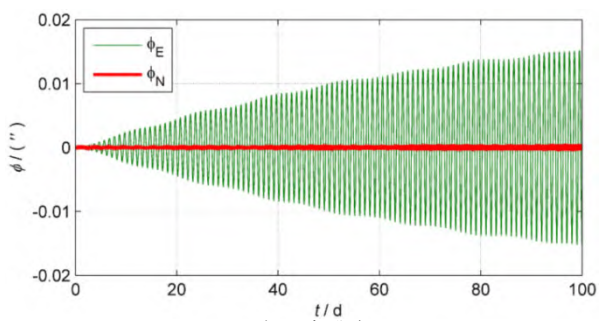


(c)　Z 轴角速率误差
(c)　Z-axis angular rate error

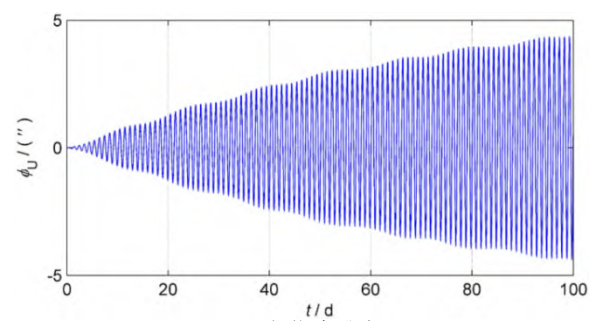
图 1　地球自转角速度误差
Fig.1　The Earth's angular velocity errors

3.2　长航时纯惯导误差仿真

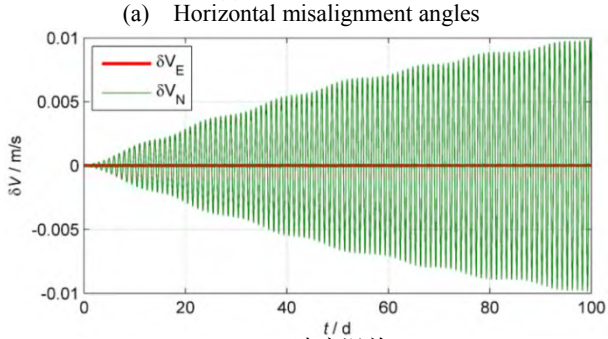
这里在惯性器件仿真中考虑了地球自转角速率模型误差的影响，但在惯性导航更新算法中仍然采用传统的地球自转参数式(9)。



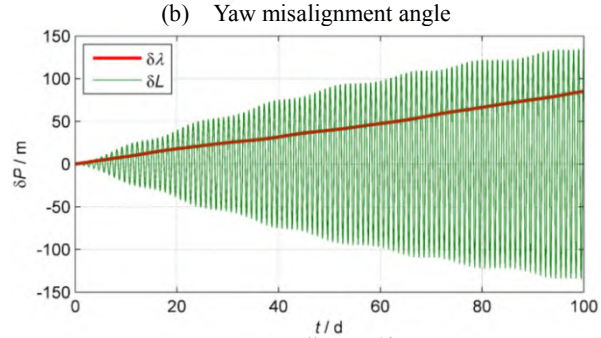
(a)　水平失准角
(a)　Horizontal misalignment angles



(b)　方位失准角
(b)　Yaw misalignment angle



(c)　速度误差
(c)　Velocity errors



(d)　位置误差
(d)　Position errors

图 2　100 天纯惯导误差
Fig.2　Inertial navigation errors within 100 days

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

于地理位置 L=0，λ=0 处进行静基座纯惯导仿真（高度通道固定不更新），仿真中假设惯性器件是理想无误差的，且假设惯导的初始导航参数（姿态、方位角、速度和位置）准确已知。从 2016 年 1 月 1 日开始，共进行了 100 d 的纯惯导仿真，导航误差如图 2 所示。采用捷联惯导误差传播模型式(15)-(17)递推获得的误差曲线与图 2 重合，验证了误差传播模型的正确性，不再重复展示。

根据图 2 分析，可得到以下结论：

（1）东向通道中的北向失准角 ϕ_{N} 和东向速度 δV_{E} 都比较小，但会随时间不断累积导致经度误差 $\delta\lambda$ 缓慢增加。经度误差 $\delta\lambda$ 主要是由地球自转误差中的 Z 轴分量 $\delta\omega_{\mathrm{ie,Z}}^{\mathrm{N}}$ 引起的。不难理解，日长变化 LOD 乘以地球自转角速率所得角度值，即为惯导系统在该时间段内的经度解算误差。

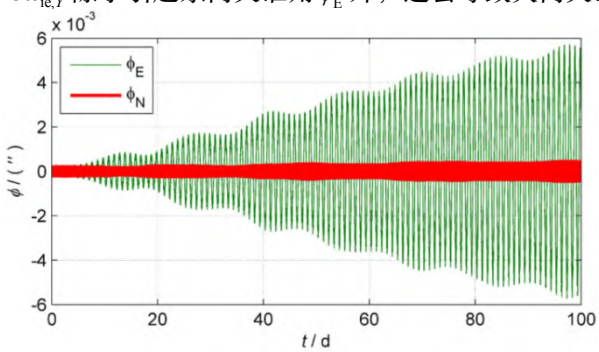
（2）北向通道中的东向失准角 ϕ_{E}、北向速度 δV_{N} 和纬度误差 δL 都以地球自转为周期（1d）振荡发散，它们主要由地球自转误差中的 Y 轴分量 $\delta\omega_{\mathrm{ie},Y}^{\mathrm{N}}$ 造成。$\delta\omega_{\mathrm{ie},Y}^{\mathrm{N}}$ 除了引起东向失准角 ϕ_{E} 外，还会导致天向失准角 ϕ_{U}，两者都受到地球旋转周期 $\boldsymbol{R}_Z\left(-\theta_{\mathrm{E}}\right)$ 的调制作用。

（3）在纯惯导 100 d 时刻，经度误差 $\delta\lambda$ =85 m、纬度误差 δL =140 m，综合计算水平径向误差为 $\sqrt{\delta\lambda^2+\delta L^2}\approx 164\,\mathrm{m}$，按此粗略估计：由地球自转误差引起的纯惯导误差最大为 0.1 n mile/100 d。

在惯性导航算法中若将地球自转角速度修正为：

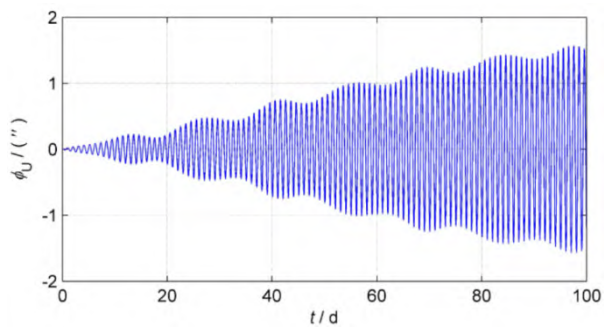
$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathrm{ie}}^{\mathrm{e}}=\boldsymbol{R}_Z\left(-\theta_{\mathrm{E}}\right)\begin{bmatrix}0\\-0.633\times10^{-6}\\15.041067178670319\end{bmatrix}{}^{\circ}/\mathrm{h}\qquad(18)$$

式(18)表示对地球自转角速度的 X 轴和 Y 轴补偿岁差的影响，重做纯惯导解算仿真，结果如图 3 所示。与图 2 相比，图 3 在 100 d 时的纬度误差 δL 从 140 m 降低到了 50 m（降低了 60%以上），基本消除了岁差的影响，剩余的纬度误差 δL 主要是由章动导致的。除北向通道外，天向失准角 ϕ_{U} 误差也减小了不少，从 4.4″下降到了 1.5″。这说明，进行地球自转角速度的岁差修正对长航时导航精度的提升效果还是比较明显的。



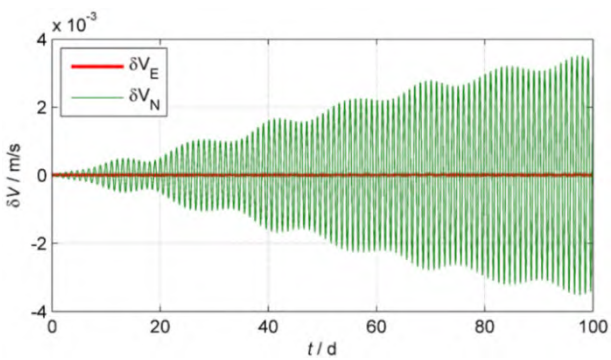
(a) 水平失准角

(a) Horizontal misalignment angles



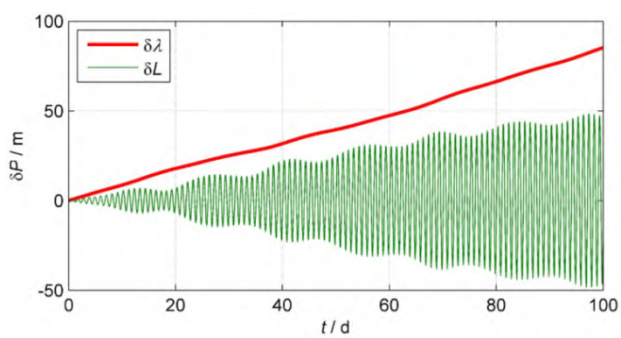
(b) 方位失准角

(b) Yaw misalignment angle



(c) 速度误差

(c) Velocity errors



(d) 位置误差

(d) Position errors

图 3 100 天纯惯导误差（岁差修正后）

Fig.3 Inertial navigation errors within 100 days (after precession correction)

显然，在实时惯导应用过程中，如果能够预测 dUT1（或 LOD）的变化趋势[13]，对该趋势进行建模和补偿，将有助于减小纯惯导解算的经度误差，针对该问题就不再仿真赘述了。由于极移的周期较长（约为一年），根据当前极移值或仅需进行简单预测，容易补偿大部分极移误差的影响。

（下转第 167 页）

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

71(6): 1460-1476.
[8] Qin F, Chang L, Tong L, et al. Transverse polar navigation method based on virtual sphere model[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2018, 26(5): 571-578.
[9] Sun J, Ma S, Wang J, et al. Reconciliation problem in polar integrated navigation considering coordinate frame transformation[J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2020, 69(9): 10375-10379.
[10] 张福斌，马朋，王智辉. 基于横坐标系的捷联惯性导航系统/多普勒速度仪极区组合导航算法[J]. 兵工学报，2016, 37(7): 1229-1235.
Zhang F, Ma P, Wang Z. SINS/DVL Integrated navigation algorithm based on transversal coordinate frame in polar region[J]. Acta Armamentarii, 2016, 37(7): 1229-1235.
[11] Fu Q, Zhou Q, Yan G, et al. Unified all-earth navigation mechanization and virtual polar region technology[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2021, 70(1): 1-11.
[12] 李倩，孙枫，奔粤阳，等. 基于横坐标系的捷联惯导系统极区导航方法[J]. 中国惯性技术学报，2014, 22(3): 288-295.
Li Q, Sun F, Ben Y, et al. Polar navigation of strapdown inertial navigation system based on transversal frame in polar region[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2014, 22(3): 288-295.
[13] 王林，吴文启，魏国，等. 基于格网系的双航海惯导定位信息融合[J]. 中国惯性技术学报，2018, 26(2): 141-148.
Wang L, Wu W, Wei G, et al. Positioning information fusion for dual marine INSs based on grid frame[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2018, 26(2): 141-148.
[14] Wang D, Xu X, Yao Y, et al. A novel SINS/DVL tightly integrated navigation method for complex environment[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2020, 69(7): 5183-5196.

（上接第 158 页）

4　结 论

根据 IAU 岁差章动模型和 EOP 日长变化数据，本文求解获得了精确的地球自转角速度数值，它在垂直于地球自转轴的方向上存在 1×10^{-6} °/h 量级的角速率波动。长航时纯惯性导航仿真结果显示，使用传统的地球自转角速度模型，会引起 0.1 n mile/100 d 的导航定位误差。因此，在高精度惯导系统中，比如当陀螺漂移误差小于 1×10^{-5} °/h 时,有必要考虑采用本文提出的地球自转角速度建模方法，以减小导航环境因素误差的影响。

致谢：感谢西安理工大学的翁浚提供的帮助。

参考文献（References）：

[1] 王东升，刘康，张海峰，等. 基于方位旋转调制的平台式惯导系统“一点校”[J]. 中国惯性技术学报，2017, 25(1): 43-46.
Wang D, Liu K, Zhang H, et al. One-point comprehensive calibration in gimbaled inertial navigation system based on azimuth rotating modulation technique[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2017, 25(1): 43-46.
[2] Yan G, Chen R, Weng J. A super-fast optimal attitude matrix in attitude determination[J]. Measurement Science & Technology, 2021, 32: 095012.
[3] 严恭敏，杨小康，翁浚，等. 一种求解姿态不可交换误差补偿系数的通用方法[J]. 宇航学报，2017, 38(7): 723-727.
Yan G, Yang X, Weng J, et al. A general method to obtain noncommutativity error compensation coefficients for strapdown attitude algorithm[J]. Journal of Astronautics, 2017, 38(7): 723-727.
[4] 严恭敏，李思锦，郭正东. 一种求解等效旋转矢量高阶误差补偿系数的新方法[J]. 中国惯性技术学报，2020, 28(3): 347-352,396.
Yan G, Li S, Guo Z. A new method to obtain high-order error compensation coefficients for equivalent rotation vector[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2020, 28(3): 347-352,396.
[5] 严恭敏，李思锦，秦永元. 基于多项式迭代的等效旋转矢量微分方程精确数值算法[J]. 中国惯性技术学报，2018, 26(6): 708-712.
Yan G, Li S, Qin Y. Accurate numerical solution for differential equation of equivalent rotation vector based on polynomial iteration[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2018, 26(6): 708-712.
[6] Wu Y, Cai Q, Truong T. Fast RodFIter for attitude reconstruction from inertial measurements[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2019, 55(1): 419-428.
[7] Weng J, Liu J, Jiao M, et al. Analysis and on-line compensation of gravity disturbance in a high-precision inertial navigation system[J]. GPS Solutions., 2020, 24: 83.
[8] 李广宇. 天球参考系变换及其应用[M]. 北京：科学出版社，2010.
Li G. Celestial reference system transformations and applications[M]. Beijing: Science Press, 2010.
[9] 严恭敏，戴晨杰，陈若彤. 惯性/天文组合导航中的时空坐标转换及其误差分析[J]. 中国惯性技术学报，2022, 30(1): 89-95,103.
Yan G, Dai C, Chen R. A new method to obtain high-order error compensation coefficients for equivalent rotation vector[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2022, 30(1): 89-95,103.
[10] 严恭敏，翁浚. 捷联惯导算法与组合导航原理[M]. 西安：西北工业大学出版社，2019.
Yan G, Weng J. Strapdown inertial navigation algorithm and principle for integrated navigation[M]. Xi’an: Northwestern Polytechnical University Press, 2019.
[11] iausofa. http://www.iausofa.org/current_C.html#Downloads. [EB/OL].
[12] iers. https: //datacenter.iers.org//version Metadata. php?filename=latestVersionMeta/ 224_EOP_C04_14.62-NOW.IAU2000A224.txt[EB/OL].
[13] Niedzielski T, Kosek W. Prediction of UT1–UTC, LOD and AAM χ3 by combination of least-squares and multivariate stochastic methods[J]. Journal of Geodesy, 2008, 82: 83-92.

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2022.04.001

再论联邦滤波在组合导航中的应用可行性

严恭敏,戴晨杰,刘 璠

(西北工业大学自动化学院,西安 710072)

摘 要:在联邦滤波算法中,针对子滤波器存在私有状态从而导致全局状态信息融合估计为次优估计的问题,通过一个简单的 3 维状态、2 维量测系统的数值仿真以及速度+姿态传递对准组合导航仿真,验证了联邦滤波的次优估计结果误差太大,难以满足实际系统的高精度滤波需求。联邦滤波估计的次优程度没有经过严格证明,且难以证明,因而存在应用风险。对于以精度为主要性能指标的组合导航系统,不建议采用联邦滤波算法,否则其精度损失不足以弥补其带来的计算量降低和容错性提高的优势。

关键词:联邦滤波;集中滤波;组合导航;传递对准

中图分类号:V249.3 **文献标志码**:A **文章编号**:2095-8110(2022)04-0001-06

Further Discussion on the Application Feasibility of Federated Kalman Filter in Integrated Navigation

YAN Gong-min, DAI Chen-jie, LIU Fan

(School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

Abstract: In the federated Kalman filter algorithm, aiming at the problem that the unique bias states of sub-system will lead to suboptimal estimation of common system states, a simple numerical simulation example consisting of 3 states and 2 measurements and the classical velocity+attitude transfer alignment integrated navigation simulation are carried, which verify that the suboptimal estimation errors of federated Kalman filter are too big, it is difficult to meet the high-precision requirements in practical systems. The suboptimal degree of federated Kalman filter estimation is not strictly proved and hardly to be proved, so there are application risks in real systems. For the integrated navigation system whose main performance index is accuracy, federated Kalman filter algorithm is not recommended, otherwise its accuracy loss is not enough to compensate for its advantages of calculation reduction and fault tolerance improvement.

Key words: Federated Kalman filter; Centralized Kalman filter; Integrated navigation; Transfer alignment

0 引言

标准 Kalman 滤波的计算量与状态维数的 3 次方成正比,计算量因状态维数的增加而急剧变大。一个复杂的大系统往往包含众多的状态变量,但大系统通常可以分解成若干子系统,并且在子系统中可能还存在一个关键的公共参考系统。针对这类大系统,可以设计一个高维的综合滤波器,包含所有状态变量,再进行 Kalman 滤波,这一处理方式通常称为集中式滤波(Centralized Kalman Filter,

收稿日期:2022-03-02;修订日期:2022-04-05

作者简介:严恭敏(1977-),男,博士,副教授,主要从事惯性导航与信息融合理论方面的研究。

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

CKF)；也可以采取所谓的联邦滤波(Federated Kalman Filter，FKF)方法进行分散降阶处理，有利于降低各子系统的计算量，还便于各子系统的故障诊断和隔离，避免有故障的子系统影响整个滤波器，从而提高总体性能。在联邦滤波中，如果所有子滤波器的状态均为公共状态，则全局状态融合精度与集中滤波器精度相同，结果均是最优的[1]；但是当某些滤波器存在私有状态时，联邦滤波的精度一般低于集中滤波，这时联邦滤波是一种次优滤波算法[2]。联邦滤波最早由 N. A. Carlson 提出[3]，他在提出联邦滤波时曾声称联邦滤波器已被美国空军的容错导航系统“公共卡尔曼滤波器”计划选为基本算法[4]，但从目前组合导航系统的发展情况看，历经 30 余年实践该算法并没有明显的优势，未获得广泛的实际应用[5]。

对于所有子滤波器的状态均为公共状态的联邦滤波，不具备减小计算量的优势，分散为几个滤波器后反而增加了计算量，这种联邦滤波完全可以被序贯滤波所取代，序贯滤波同样易于量测故障诊断和隔离。提出联邦滤波的初衷和优势应当在于存在大量私有状态的系统。论文在分析传统联邦滤波基本原理的基础上，首先通过一个简单随机系统仿真例子，验证了联邦滤波估计结果的不合理性。显然，若对简单系统不可行，面对更加复杂的系统将更难获得好的估计效果。接着，以典型的速度+姿态传递对准为例，通过仿真实验验证了联邦滤波的状态估计效果不好，与集中滤波相比联邦次优滤波的误差太大，不能满足应用需求。最后，给出研究总结：已有文献普遍认为联邦滤波是一种有效的状态估计方法，但本文通过举反例得到了不同的结论，对其可用性和实用性给出了负面的评价。

1 联邦滤波基本原理

1.1 集中 Kalman 滤波

随机线性系统的状态空间模型记为

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{X}_{k-1}+\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{W}_{k-1}\\ \boldsymbol{Z}_k=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{V}_k\end{cases}\tag{1}$$

式(1)中，$\boldsymbol{X}_k$ 是 $n\times1$ 维的状态向量；$\boldsymbol{Z}_k$ 是 $m\times1$ 维的量测向量；$\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}$、$\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}$、$\boldsymbol{H}_k$ 是已知的系统结构参数，分别为 $n\times n$ 维的一步状态转移矩阵、$n\times l$ 维的系统噪声分配矩阵及 $m\times n$ 维的量测矩阵；$\boldsymbol{W}_{k-1}$ 是 $l\times1$ 维的系统噪声向量，$\boldsymbol{V}_k$ 是 $m\times1$ 维的量测噪声向量，两者都是零均值的高斯白噪声向量序列，且它们之间互不相关，即满足

$$\begin{cases}\mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k]=\boldsymbol{0}, & \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{W}_j^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{Q}_k\delta_{kj}\\ \mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k]=\boldsymbol{0}, & \mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{V}_j^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{R}_k\delta_{kj}\\ \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{V}_j^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{Q}_k$ 是半正定的，$\boldsymbol{R}_k$ 是正定的，δ_{kj} 为克罗内克函数。

针对系统式(1)的 Kalman 滤波公式为

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}\\ \boldsymbol{P}_{k/k-1}=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_k)^{-1}\\ \hat{\boldsymbol{X}}_k=\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}+\boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1})\\ \boldsymbol{P}_k=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{P}_{k/k-1}\end{cases}\tag{3}$$

式(3)中，$\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}$ 和 $\boldsymbol{P}_{k/k-1}$ 分别表示状态一步预测及其均方误差阵；$\boldsymbol{K}_k$ 为 Kalman 滤波增益；$\hat{\boldsymbol{X}}_k$ 和 $\boldsymbol{P}_k$ 分别表示状态估计及其均方误差阵。

1.2 传统联邦滤波算法

假设式(1)可拆分成 $N+1$ 个子滤波器状态空间，分别记为

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_k^{(i)}=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{(i)}\boldsymbol{X}_{k-1}^{(i)}+\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{(i)}\boldsymbol{W}_{k-1}^{(i)}\\ \boldsymbol{Z}_k^{(i)}=\boldsymbol{H}_k^{(i)}\boldsymbol{X}_k^{(i)}+\boldsymbol{V}_k^{(i)}\end{cases}\tag{4}$$

其中

$$\begin{cases}\mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k^{(i)}]=\boldsymbol{0}, & \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k^{(i)}\ (\boldsymbol{W}_j^{(i)})^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{Q}_k^{(i)}\delta_{kj}\\ \mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k^{(i)}]=\boldsymbol{0}, & \mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k^{(i)}\ (\boldsymbol{V}_j^{(i)})^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{R}_k^{(i)}\delta_{kj}\\ \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k^{(i)}\ (\boldsymbol{V}_j^{(i)})^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{5}$$

$$\boldsymbol{X}_k^{(i)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_k^{(ci)}\\ \boldsymbol{X}_k^{(bi)}\end{bmatrix}\tag{6}$$

$\boldsymbol{X}_k^{(ci)}$ 是所有子滤波器共有的公共状态；$\boldsymbol{X}_k^{(bi)}$ 是第 $i(i=1,2,\cdots,N,M)$ 个子滤波器的专有状态，且有状态均方差阵的分块表示为

$$\boldsymbol{P}_{k-1}^{(i)}=\mathrm{E}\left[\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_k^{(ci)}\\ \boldsymbol{X}_k^{(bi)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_k^{(ci)}\\ \boldsymbol{X}_k^{(bi)}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{k-1}^{(ci)} & \boldsymbol{P}_{k-1}^{(cibi)}\\ \boldsymbol{P}_{k-1}^{(bici)} & \boldsymbol{P}_{k-1}^{(bi)}\end{bmatrix}\tag{7}$$

特别地，当 $i=M$ 时不存在量测，即 $\boldsymbol{X}_k^{(bM)}$、$\boldsymbol{Z}_k^{(M)}$、$\boldsymbol{H}_k^{(M)}$、$\boldsymbol{V}_k^{(M)}$ 均为空，通常称 $\boldsymbol{X}_{k-1}^{(cM)}$(或简记为 $\boldsymbol{X}_{k-1}^{(M)}$)为主滤波器状态，因而在联邦主滤波器中只有时间更新过程。

传统的联邦滤波算法步骤如下。

1)初始化。设置主滤波器的状态及其均方差阵的初值分别为 $\hat{\boldsymbol{X}}_0^{(M)}$ 和 $\boldsymbol{P}_0^{(M)}$；设置各子滤波器的状态及其均方差阵的初值分别为 $\hat{\boldsymbol{X}}_0^{(i)}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_0^{(M)}\\ \hat{\boldsymbol{X}}_0^{(bi)}\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{P}_0^{(i)}$

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_0^{(M)} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_0^{(bi)}\end{bmatrix}$；记联邦滤波的全局估计 $\hat{\boldsymbol{X}}_0^{(g)}=\hat{\boldsymbol{X}}_0^{(M)}$ 及其均方差阵 $\boldsymbol{P}_0^{(g)}=\boldsymbol{P}_0^{(M)}$。

2)子滤波器重置。根据全局估计 $\boldsymbol{X}_{k-1}^{(g)}$ 和 $\boldsymbol{P}_{k-1}^{(g)}$，各子滤波器的状态及其均方差阵重置为

$$\hat{\boldsymbol{X}}'^{(i)}_{k-1}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}^{(g)}\\ \hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}^{(bi)}\end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{P}'^{(i)}_{k-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{k-1}^{(g)} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{k-1}^{(cibi)}\\ \boldsymbol{P}_{k-1}^{(bici)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_{k-1}^{(bi)}\end{bmatrix} \tag{9}$$

其中，待定方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{k-1}^{(ci)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{P}_{k-1}^{(g)}$，可采用正定对称阵的平方根分解方法（Choleskey 分解方法）进行求解，即由 $\boldsymbol{A}\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}^{(ci)}}\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}^{(ci)}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}^{(g)}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}^{(g)}}^{\mathrm{T}}$，可求得 $\boldsymbol{A}=\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}^{(g)}}\sqrt{\boldsymbol{P}_{k-1}^{(ci)}}^{-1}$。

3)Kalman 滤波。各子滤波器（含主滤波器）进行 Kalman 滤波更新，如下

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}^{(i)}=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{(i)}\hat{\boldsymbol{X}}'^{(i)}_{k-1}\\ \boldsymbol{P}_{k/k-1}^{(i)}=\beta_i^{-1}\left[\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{(i)}\boldsymbol{P}'^{(i)}_{k-1}(\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{(i)})^{\mathrm{T}}+\right.\\ \qquad\left.\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{(i)}\boldsymbol{Q}_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{(i)})^{\mathrm{T}}\right]\\ \boldsymbol{K}_k^{(i)}=\boldsymbol{P}_{k/k-1}^{(i)}(\boldsymbol{H}_k^{(i)})^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{H}_k^{(i)}\boldsymbol{P}_{k/k-1}^{(i)}(\boldsymbol{H}_k^{(i)})^{\mathrm{T}}+\right.\\ \qquad\left.\boldsymbol{R}_k^{(i)}\right]^{-1}\\ \hat{\boldsymbol{X}}_k^{(i)}=\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}^{(i)}+\boldsymbol{K}_k^{(i)}(\boldsymbol{Z}_k^{(i)}-\boldsymbol{H}_k^{(i)}\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}^{(i)})\\ \boldsymbol{P}_k^{(i)}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k^{(i)}\boldsymbol{H}_k^{(i)})\boldsymbol{P}_{k/k-1}^{(i)}\end{cases} \tag{10}$$

其中，β_i 为非负的信息分配因子，满足 $\sum_{i=1}^{N,M}\beta_i=1$，$\beta_i$ 越小意味着第 i 个子滤波器的相对作用越小，若 $\beta_i=0$ 则表示无需对第 i 个子滤波器进行滤波处理。显然，对于主滤波器 $i=M$，只有时间更新过程而没有量测更新，一步预测即为估计值，有 $\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(M)}=\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}^{(M)}$，$\boldsymbol{P}_k^{(M)}=\boldsymbol{P}_{k/k-1}^{(M)}$。

4)信息融合。综合所有子滤波器（含主滤波器）的结果，进行信息融合，如下

$$\boldsymbol{P}_k^{(g)}=\left[\sum\nolimits_{i=1}^{N,M}(\boldsymbol{P}_k^{(ci)})^{-1}\right]^{-1} \tag{11}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(g)}=\boldsymbol{P}_k^{(g)}\sum\nolimits_{i=1}^{N,M}(\boldsymbol{P}_k^{(ci)})^{-1}\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(ci)} \tag{12}$$

对于 $k=1,2,3,\cdots$，重复执行上述步骤 2）～4），$\hat{\boldsymbol{X}}_k^{(g)}$ 和 $\boldsymbol{P}_k^{(g)}$ 即为联邦滤波器的全局状态估计及其均方差阵输出。

1.3　联邦滤波公式改进

在传统联邦滤波式(10)的第二式中，对所有状态及系统噪声的均方误差阵都放大 β_i^{-1} 倍，既包含公共状态也包含私有状态；而信息融合式(11)却未对私有状态的均方误差阵做任何缩放处理，特别在进行多次 Kalman 滤波时间更新而没有量测更新的情况下，将会使私有状态的均方误差阵迅速增大，从而不符合私有状态的方差特性描述。为了避免以上缺陷，对式(10)的第二式稍作改进，修改为

$$\boldsymbol{P}_{k/k-1}^{(i)}=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{(i)}\begin{bmatrix}\beta_i^{-1}\boldsymbol{P}_{k-1}^{(g)} & \beta_i^{-1/2}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{k-1}^{(cibi)}\\ \beta_i^{-1/2}\boldsymbol{P}_{k-1}^{(bici)}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_{k-1}^{(bi)}\end{bmatrix}\cdot(\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{(i)})^{\mathrm{T}}+\begin{bmatrix}\beta_i^{-1}\boldsymbol{Q}'^{(i)}_{k-1} & \beta_i^{-1/2}\boldsymbol{Q}'^{(cibi)}_{k-1}\\ \beta_i^{-1/2}\boldsymbol{Q}'^{(bici)}_{k-1} & \boldsymbol{Q}'^{(bi)}_{k-1}\end{bmatrix} \tag{13}$$

其中，记 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}'^{(i)}_{k-1} & \boldsymbol{Q}'^{(cibi)}_{k-1}\\ \boldsymbol{Q}'^{(bici)}_{k-1} & \boldsymbol{Q}'^{(bi)}_{k-1}\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{(i)}\boldsymbol{Q}_{k-1}^{(i)}(\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{(i)})^{\mathrm{T}}$。

不难看出，式(13)仅对公共状态的均方误差阵、公共状态与私有状态之间互相关以及相应的系统噪声进行了放大，而私有状态的均方误差阵及其相应系统噪声均保持不变，直观上应当更加合理。

2　一个简单系统举例

假设有一个含 3 个状态分量和 2 个量测分量的线性随机系统，记作 CS，具体为

$$\mathrm{CS}:\begin{cases}\begin{bmatrix}X_{1,k}\\ X_{2,k}\\ X_{3,k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{1,k-1}\\ X_{2,k-1}\\ X_{3,k-1}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}Z_{1,k}\\ Z_{2,k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & h_{23}\end{bmatrix}\boldsymbol{X}_k+\begin{bmatrix}V_{1,k}\\ V_{2,k}\end{bmatrix}\end{cases}\qquad h_{23}=\begin{cases}1 & 1\leqslant k<100\\ 2 & 100\leqslant k\end{cases} \tag{14}$$

其中，$V_{1,k}$、$V_{2,k}$ 均为零均值的单位白噪声，且两者之间不相关；h_{23} 为时变元素。容易看出，系统式(14)不含系统噪声，3 个状态分量为相互独立的随机常值，第一量测分量 $Z_{1,k}$ 是状态 $X_{1,k}$、$X_{2,k}$ 与噪声 $V_{1,k}$ 之和；而第二量测 $Z_{2,k}$ 是状态 $X_{1,k}$、$X_{3,k}$ 与噪声 $V_{2,k}$ 之和，$X_{1,k}$ 为两量测共有的公共状态。因而，可将式(14)拆分成 3 个子系统，分别记为子系统 S1、S2 和主系统 SM，具体如下

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\mathrm{S1}:\begin{cases}\begin{bmatrix}X_{1,k}\\X_{2,k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{1,k-1}\\X_{2,k-1}\end{bmatrix}\\Z_{1,k}=[1\quad 1]\boldsymbol{X}_k^{(1)}+V_{1,k}\end{cases},\quad \mathrm{S2}:\begin{cases}\begin{bmatrix}X_{1,k}\\X_{3,k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{1,k-1}\\X_{3,k-1}\end{bmatrix}\\Z_{2,k}=[1\quad h_{23}]\boldsymbol{X}_k^{(2)}+V_{2,k}\end{cases},\quad \mathrm{SM}:\{X_{1,k}=X_{1,k-1}\tag{15}$$

显然，如果 h_{23} 为固定常值，系统 S1 和 S2 都是不完全可观的，即状态 $X_{1,k}$ 和 $X_{2,k}$ 之间、状态 $X_{1,k}$ 和 $X_{3,k}$ 之间相互耦合，无法单独分离；而若 h_{23} 设置为时变的，则状态 $X_{1,k}$ 和 $X_{3,k}$ 之间可分离，从而也导致状态 $X_{1,k}$ 和 $X_{2,k}$ 之间可分离，最终使得 3 个状态分量都变为完全可观的。

假设系统式(14)的状态真值 $\boldsymbol{X}_0=[5\quad 10\quad 15]^{\mathrm{T}}$，仿真生成量测序列 $\boldsymbol{Z}_k$，再分别使用集中滤波和联邦滤波进行状态估计，理论上集中滤波的结果是最优估计，可将其作为评价联邦滤波效果的参考。集中滤波的初值选为 $\hat{\boldsymbol{X}}_0=[0\quad 0\quad 0]^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{P}_0=\mathrm{diag}^2([10\quad 10\quad 10]^{\mathrm{T}})$，联邦滤波的初值与集中滤波一致，联邦滤波的信息分配因子选为 $\beta_1=\beta_2=1/2$，$\beta_M=0$。两种滤波结果的对比如图 1 所示。

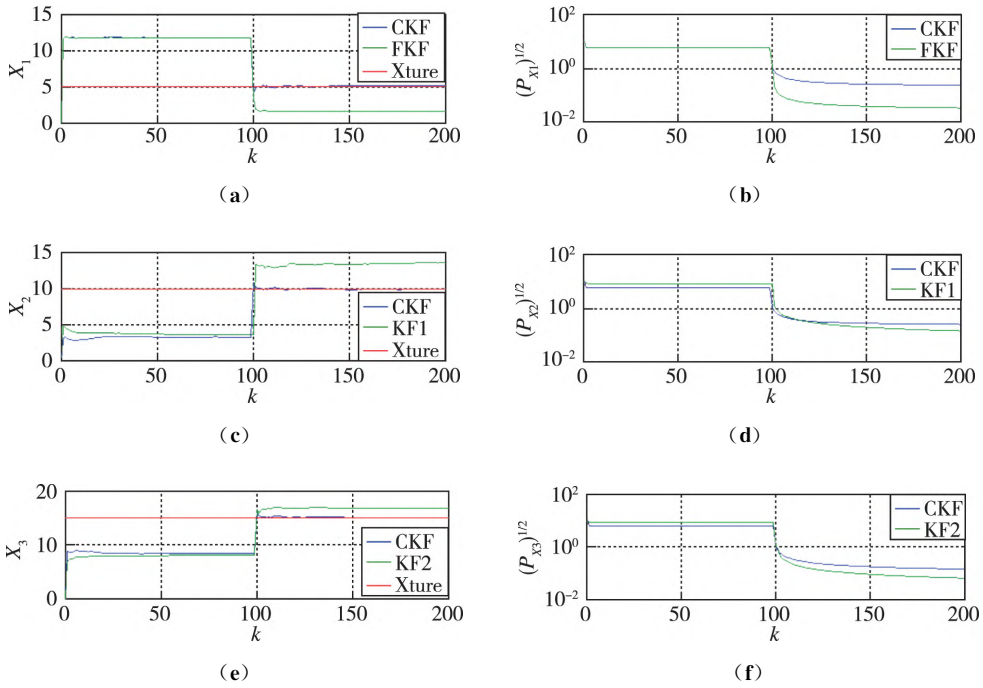


图 1 两种滤波的结果对比

Fig. 1 Filtering result comparison of CKF & FKF

从图 1(a)、(c)、(e)可以看出，当 $k<100$ 时，由于系统不完全可观，两种滤波算法的 3 个状态分量均不能被正确估计；当 $k>100$ 时，因元素 h_{23} 发生变化使系统变得完全可观测，集中滤波中的 3 个状态立即获得了正确估计，接近于真值曲线 Xtrue。图 1(a)联邦滤波的公共状态 $X_{1,k}$ 的估计结果虽然也有调整变化，但其估计值并不准确，结果明显是有偏估计；图 1(c)子滤波器 1(或图 1(e)子滤波器 2)的私有状态 $X_{2,k}$(或 $X_{3,k}$)的估计也都是有偏的。观察图 1(b)，在 $k=100$ 后状态 $X_{1,k}$ 的均方差迅速减小，联邦滤波比集中滤波下降得更多，说明前者的估计精度虚高，致使在状态 $X_{1,k}$ 的估计出现偏差后就难以再往正确方向进行调整了。

3 传递对准举例

在组合导航的联邦滤波算法应用研究文献中，比较典型的例子是惯性/卫星/天文组合导航和速度+姿态匹配传递对准[6-11]，两者都存在角运动和线运动两类量测量，可以拆分出两个子滤波器。这里以传递对准为例，验证联邦滤波的估计效果。

不考虑主子惯导之间动态挠曲变形的影响，选择子惯导失准角 $\boldsymbol{\phi}$、陀螺漂移 $\boldsymbol{\varepsilon}^b$、速度误差 $\delta\boldsymbol{v}^n$、加速度计零偏 ∇^b 以及主子惯导间常值安装误差角 $\boldsymbol{\mu}^b$ 为状态量，如下

$$\boldsymbol{X}(t)=[\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\quad(\boldsymbol{\varepsilon}^b)^{\mathrm{T}}\quad(\delta\boldsymbol{v}^n)^{\mathrm{T}}\quad(\nabla^b)^{\mathrm{T}}\quad(\boldsymbol{\mu}^b)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\tag{16}$$

传递对准集中滤波器的状态空间模型为

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{W}(t)\\ \boldsymbol{Z}_k=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{V}_k\end{cases}\tag{17}$$

其中

$$\boldsymbol{F}(t)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\times & -\boldsymbol{C}_b^n & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{f}^n\times & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_b^n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}(t)=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{C}_b^n & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_b^n\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\boldsymbol{W}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_\nabla\\ \boldsymbol{W}_\varepsilon\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{C}_b^n\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\boldsymbol{V}_k=\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_\phi\\ \boldsymbol{V}_v\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}$ 为导航系旋转角速度；$\boldsymbol{C}_b^n$ 为子惯导姿态阵；$\boldsymbol{f}^n$ 为比力；$\boldsymbol{W}_\nabla$、$\boldsymbol{W}_\varepsilon$ 分别为陀螺角速度噪声和加速度计比力噪声；$\boldsymbol{V}_\phi$、$\boldsymbol{V}_v$ 分别为主子惯导间的失准角测量噪声和速度测量噪声。

飞机以 180m/s 的速度沿正北方向匀速直飞，传递对准时间总时长 30s，期间在 10～13s 实施幅值为 20°的一个周期横滚摇翼机动。仿真设置陀螺随机常值漂移为 10(°)/h、角度随机游走为 0.1(°)/$\sqrt{\text{h}}$，加速度计随机常值零偏为 1mg、速度随机游走为 100$\mu g/\sqrt{\text{Hz}}$，主子惯导之间的安装误差为[10,20,30]($'$)。同时采用集中滤波和联邦滤波进行仿真数据处理，其中联邦滤波的两个子系统状态分别选为 $\boldsymbol{X}_1(t)=[\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\ (\boldsymbol{\varepsilon}^b)^{\mathrm{T}}\ (\boldsymbol{\mu}^b)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{X}_2(t)=[\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\ (\boldsymbol{\varepsilon}^b)^{\mathrm{T}}\ (\delta\boldsymbol{v}^n)^{\mathrm{T}}\ (\boldsymbol{\nabla}^b)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$，分别对应为姿态误差量测和速度误差量测，信息分配因子选取为 $\beta_1=\beta_2=1/2,\beta_M=0$。

两种滤波算法的传递对准仿真结果曲线较多，这里仅展示子惯导失准角估计结果，如图 2 所示。由图 2 可见，集中滤波算法的 3 个失准角估计效果均较好，水平失准角一开始就很快收敛，在 10s 开始摇翼机动后，方位失准角也快速收敛；然而，联邦滤波算法的 3 个失准角始终都存在较大偏差，不能正确收敛。对于其他状态的估计，联邦滤波算法的效果也不好，这里就不再一一展示了。

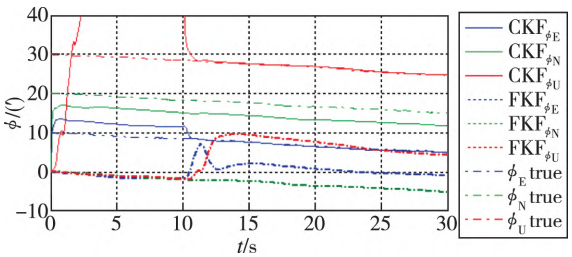


图 2　失准角估计效果对比

Fig. 2　Misalignment angle comparison

就前面所举的两个联邦滤波仿真例子式(14)和式(17)，读者可试着选择其他信息分配因子或除式(13)外的其他 Kalman 滤波均方差阵放大方式，只要进行了反馈重置，联邦滤波往往都很难取得理想的估计效果。从理论上不容易证明联邦滤波的不合理性，众多文献介绍联邦滤波是一种次优滤波方法，但并没有指出次优滤波会有多“次”；而文献[2]中“精度下降十分微小”的说法并不合适，本论文仅以举例仿真的方式验证了联邦滤波估计结果的不正确，相较于集中滤波，联邦滤波的次优估计精度往往是不可接受的。

4　结论

许多文献对联邦滤波及其应用进行了研究，甚至提出了信息分配因子优化、自适应联邦滤波、联邦滤波结构与容错性分析等一系列更复杂的改进措施[12-15]，都声称获得了较好的应用效果，然而其程序代码实现不公开，他人无法复现效果，目前尚未见联邦滤波在实际组合导航产品中应用的实例报道。

本文通过两个例子：一个简单的 3 维系统和一个速度＋姿态传递对准组合导航(详细程序代码可参见 PSINS\demo\test_federated_KF_simple_example3.m 和 test_align_transfer_fkf.m[16])，验证了联邦滤波是不可行的，难以获得正确的滤波估计结果。想要从理论上证明联邦滤波的不合理性，还是比较困难的。传统联邦滤波不是普遍成立的，在特定系统中或许可以使用，但是应当证明联邦次优滤波不至于太次，与集中滤波相比次优估计结果是可接受的，当然这种可用性条件的给出或证明也是比较困难的。因此，对于以精度为主要性能指标的组合导航系统，联邦滤波的实用性值得商榷。

参考文献

[1] 彭霞，张彦军，崔平远．联邦卡尔曼滤波与集中式卡尔曼滤波的等价性[J]．青岛科技大学学报(自然科学版)，2005(2)：169-172.
Peng Xia, Zhang Yanjun, Cui Pingyuan. The equivalence between the centralized and federated Kalman

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

filter[J]. Journal of Qingdao University of Science and Technology, 2005(2): 169-172(in Chinese).

[2] **秦永元，牛惠芳．联邦滤波理论在组合导航系统设计中的应用[J]．中国惯性技术学报**，1997，5(3)：1-5.
Qin Yongyuan, Niu Huifang. Application of federated filtering theory to designing integrated navigation systems [J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 1997, 5 (3): 1-5(in Chinese).

[3] Carlson N A. Federated filter for fault-tolerant integrated navigation systems[C]// Proceedings of IEEE Position Location and Navigation Symposium, 1988: 110-119.

[4] Loomis P, Carlson N, Berarducci M. Common Kalman filter: fault-tolerant navigation for next generation aircraft[C]// Proceedings of 1988 National Technical Meeting of the Institute of Navigation. Santa Barbara, CA, 1988: 38-45.

[5] **严恭敏，邓瑀．传统组合导航中的实用 Kalman 滤波技术评述[J]．导航定位与授时**，2020，7(2)：50-64.
Yan Gongmin, Deng Yu. Review on practical Kalman filtering techniques in traditional integrated navigation system [J]. Navigation Positioning and Timing, 2020, 7(2): 50-64(in Chinese).

[6] Xu S, Zhou H, Wang J, et al. SINS/CNS/GNSS integrated navigation based on an improved federated Sage-Husa adaptive filter[J]. Sensors (Basel), 2019, 19(17): 3812.

[7] Li R, Chen X, Wang L, et al. SINS/GPS/CNS integrated navigation method study based on federated filter[C]// Proceedings of 2008 2nd International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics, 2008: 1-5.

[8] **崔平远，黄晓瑞．基于联合卡尔曼滤波的多传感器信息融合算法及其应用[J]．电机与控制学报**，2001(3)：204-207.
Cui Pingyuan, Huang Xiaorui. Multi-sensor information fusion algorithm based on federal Kalman filter and its application[J]. Electric Machines and Control, 2001(3): 204-207(in Chinese).

[9] **何小飞，王巍，黄继勋．联邦滤波在光纤陀螺捷联惯导系统传递对准中的应用[J]．红外与激光工程**，2013，42(4)：993-997.
He Xiaofei, Wang Wei, Huang Jixun. Application for transfer alignment of FOG SINS based on federated filter [J]. Infrared and Laser Engineering, 2013, 42(4): 993-997(in Chinese).

[10] **王勇军，徐景硕，高扬．舰载机惯导快速传递对准的联邦滤波器设计[J]．压电与声光**，2014，36(1)：42-46.
Wang Yongjun, Xu Jingshuo, Gao Yang. Design of federated filter of rapid transfer alignment for SINS of the carrier plane[J]. Piezoelectrics & Acoustooptics, 2014, 36(1): 42-46(in Chinese).

[11] Gong X, Zhang J. An innovative transfer alignment method based on federated filter for airborne distributed POS[J]. Measurement, 2016, 86: 165-181.

[12] **张涛，徐晓苏．基于自适应联邦滤波的传递对准算法[J]．中国惯性技术学报**，2007(5)：512-516.
Zhang Tao, Xu Xiaosu. Transfer alignment algorithm based on adaptive federated filter[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2007(5): 512-516(in Chinese).

[13] **张闯，赵修斌，庞春雷，等**．SINS/GNSS/CNS **组合导航自适应容错联邦滤波方法[J]．控制理论与应用**，2019，36(9)：1469-1476.
Zhang Chuang, Zhao Xiubin, Pang Chunlei, et al. Adaptive fault tolerance federated filter method for SINS/GNSS/CNS integrated navigation[J]. Control Theory & Applications, 2019, 36(9): 1469-1476(in Chinese).

[14] Muhammad U, Fang J. A fault tolerant integrated navigation scheme realized through online tuning of weighting factors for federated Kalman filter [J]. Applied Mechanics and Materials, 2013, 446-447: 1078-1085.

[15] **何广军，康旭超．基于矢量分配的组合导航容错联邦滤波算法[J]．国防科技大学学报**，2020，42(5)：98-106.
He Guangjun, Kang Xuchao. Fault-tolerant federated filtering algorithm based on vector assignment in integrated navigation system[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2020, 42(5): 98-106(in Chinese).

[16] **严恭敏．高精度捷联惯性导航系统 Matlab 工具箱**[EB/OL]．[2021-11-02]．[2022-02-10]．http://www.psins.org.cn/kydm.
Yan Gongmin. Precise strapdown inertial navigation system toolbox for Matlab[EB/OL]. [2021-11-02]. [2022-02-10]. http://www.psins.org.cn/kydm(in Chinese).

（编辑：孟彬）

(C)1994-2022 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

“再论联邦滤波在组合导航中的应用可行性”后记

论文原稿的结论部分如下：

4 结论

论文通过两个例子，一个简单的3维系统和一个“速度+姿态”传递对准组合导航（详细程序代码可参见PSINS\demo\test_federated_KF_simple_example3.m和test_align_transfer_fkf.m[12]），验证了联邦滤波是不可行的，难以获得正确的滤波估计结果。想要从理论上证明联邦滤波的不合理性，还是比较困难的。传统联邦滤波不会是普遍成立的，在特定系统中或许可以使用，但是应当证明联邦次优滤波不至于太“次”，与集中滤波相比次优估计结果是可接受的，当然这种可用性条件的给出或证明也是比较困难的。

庞氏骗局是对金融领域投资诈骗的称呼[13,14]，虽然联邦滤波的研究不具备庞氏骗局中敛财的根本属性，但是庞氏骗局的某些典型特征，比如其技术手段晦涩难懂具有一定神秘性，看上去似是而非，又仿佛确实可行，具体实现方式秘而不宣等，在联邦滤波的提出和发展过程中也有类似的体现。许多文献对联邦滤波及其应用进行了研究，甚至提出了信息分配因子优化、自适应联邦滤波、联邦滤波结构与容错性分析等一系列更复杂的改进措施[15-18]，都声称获得了好的应用效果，然而其程序代码实现不公开，他人没法复现效果，目前尚未见联邦滤波在实际组合导航产品中应用的实例报道。具备以上特征的学术研究可谓之“学术庞氏骗局”。这类学术庞氏骗局不一定是新方法的发明者有意而为之的，更多的是后来者追随其思路，不断扩充发展，从而形成一套看似完美的却没有太多实用价值的“高大上”理论。

审稿专家1给出如下意见：

- *联邦滤波器在部分系统具有可用性和较好性能，只不过对于其适用性以及如何合理的进行子滤波器的拆分都是值得继续探讨的问题，建议基于学术讨论的目的对结论中部分较尖锐的言辞进行润色。*

审稿专家2给出如下意见：

- *联邦滤波性能与具体的参数选择及更新方案密切相关，目前限于理论研究深度不够，在没有完整理论证明其最优性能情况下，说明其最优特性不严谨；同样在没有严格理论证明其无法达到最优估计情况下，仅利用指定参数的算例说明，得出其精度不够的结论也有草率之嫌；*
- *目前存在较多为发表论文而夸大其词的现象，但在未能理论证明其不合理性情况下，建议不使用庞氏骗局之类的描述，以体现出本文的客观、严谨性；*
- *联邦滤波算法在故障隔离、提高系统可靠性方面是有确实作用的，但实际使用方法会因人而异，不一定与教科书的中的内容完全一致，不宜彻底否定。*

最后论文按专家的意见修改成目前终版的结论形式。但作者仍然坚信子滤波器包含独有状态的联邦滤波是不可用的，征得西安中科华航光电科技有限公司同意，提出悬赏（见后），望有志者作更多的验证。

西安中科华航光电科技有限公司与 PSINS 网站

悬赏公告

一、针对联邦滤波算法，要求：

（1）针对惯导/卫导/天文组合导航、或者主子惯导速度+姿态匹配传递对准，仿真模型二选一即可（见后建模建议），更多建模细节还可参阅相关文献或在“PSINS 导航算法”技术群交流；

（2）提供 Matlab 完整的示例源代码；

（3）提供仿真数据用于测试，运行给出测试结果，联邦滤波与集中滤波算法比较，两者的误差应差别不大；

（4）代码和结果的正确性，须通过“PSINS 导航算法”群友测试和讨论认可；

（5）允许示例性代码汇编入 PSINS 工具箱（注明来源于应赏者），供推广学习；

（6）有效期：2022 年 7 月 1 日 ~ 2027 年 6 月 31 日。

二、奖励：

西安中科华航光电科技有限公司提供奖金共计为人民币壹拾万元（税前），并颁发获奖证书。（备注：仅首次通过确认者获奖，按作品提交时间先后确定，详情可查阅 www.psins.org.cn）

建模建议：（1）惯导/卫导/天文组合导航（a 惯导/卫导状态：失准角、速度误差、位置误差、陀螺漂移、加计零偏、惯导/卫导杆臂，量测量：位置误差；b 惯导/天文状态：失准角、速度误差、位置误差、陀螺漂移、加计零偏、惯导/天文安装误差，量测量：姿态误差；c 主滤波器状态：失准角、速度误差、位置误差、陀螺漂移、加计零偏）；（2）主子惯导速度+姿态匹配传递对准（a 速度匹配状态：失准角、陀螺漂移、速度误差、加计零偏，量测量：子主惯导速度误差；b 姿态匹配状态：失准角、陀螺漂移、安装误差角，量测量：子主惯导姿态误差；c 主滤波器状态：失准角、陀螺漂移）。或者其它更有说服力的建模。

西安中科华航光电科技有限公司（章）

日期：2022.7.1

PSINS 导航算法技术群主
www.psins.org 网站 CEO

日期：2022.7.1

文章编号：1005-6734(2023)05-0425-06 doi.10.13695/j.cnki.12-1222/o3.2023.05.001

抗线晃动干扰惯性系初始对准改进参数辨识方法

严恭敏[1]，蔺裕源[1]，刘瑞鑫[2,3]，李 强[3]，卢彤春[3]
（1. 西北工业大学 自动化学院，西安 710072；2. 哈尔滨工业大学 航天学院，哈尔滨 150001；
3. 上海航天控制技术研究所，上海 201109）

摘要：针对捷联惯导系统晃动基座惯性系初始对准中的参数辨识问题，提出了基于比力视位置拟合的抗线晃动干扰惯性系初始对准改进参数辨识方法。通过对惯导比力方程变换建立了比力双重积分视位置观测矢量模型，对惯导初始速度和位置变化两项参数进行参数辨识。在完成参数辨识之后，进行视位置观测矢量重构，重构算法从原理上消除了惯导初始速度和位置变化的影响，从而具备晃动基座初始对准收敛速度快和收敛后波动小的优势。进行了六自由度海浪晃动模拟验证，在 1 m/s 的初始线晃动情况下，采用所提方法 1200 s 初始对准方位精度约 2.2 '，较传统方法对准精度提高一个数量级。

关 键 词：捷联惯导系统；惯性系初始对准；参数辨识；矢量重构；抗线晃动干扰
中图分类号：V249.3 **文献标志码：**A

Improvement for the parameter identification method of inertial frame based initial alignment under linear swaying disturbance

YAN Gongmin[1], LIN Yuyuan[1], LIU Ruixin[2,3], LI Qiang[3], LU Tongchun[3]
(1. School of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;
3. Shanghai Aerospace Control Technology Institute, Shanghai 201109, China)

Abstract: Aiming at the problem of parameter identification in inertial frame based initial alignment for strapdown inertial navigation system (SINS), an improvement for the parameter identification method of inertial frame based initial alignment under linear swaying disturbance is proposed based on specific force apparent position fitting. The double integral apparent position observation vector model of specific force is established through the transformation of the SINS specific force equation, and the parameters of inertial system initial velocity and position change are identified. After parameter identification, the observation vector of the apparent position is reconstructed. The reconstruction algorithm eliminates the influence of the SINS initial speed and position variation in principle, so it has the advantages of fast convergence speed and small fluctuation after convergence for the initial alignment of the swaying base. The six-degree-of-freedom swaying-wave simulation is carried out. Under the condition of initial linear swaying at 1 m/s, the initial azimuth alignment accuracy of the proposed method for 1200 s is about 2.2 ', which is an order of magnitude higher than that of the traditional method.

Key words: strapdown inertial navigation system; inertial frame based initial alignment; parameter identification; vector reconstruction; anti-linear swaying disturbance

捷联惯导系统（Strapdown Inertial Navigation System, SINS）在执行导航任务之前必须进行初始对准[1,2]。初始对准方法有传统的静基座解析、动基座组合对准[3-5]、数据存储与数据复用对准[6,7]以及新近提出的不变 Kalman 滤波对准[8]和基于李群的对准[9]等方法。惯性系对准方法因其抗干扰性能强，获得了广泛

收稿日期：2023-02-13；**修回日期：**2023-03-24
基金项目：国家自然科学基金（52271332）；科技部国家重点研发计划项目（2019YFB1312705）
作者简介：严恭敏（1977—），男，博士，副教授，主要从事惯性导航与信息融合理论研究。E-mail：yangongmin@163.com

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

的研究和应用，它利用重力加速度矢量在惯性空间的变化规律确定地理北向，算法能有效隔离角晃动干扰的影响，甚至进行纬度估计[10]，并使用积分运算降低线晃动干扰加速度误差。仿真和舰船系泊试验均表明该算法非常适合晃动干扰基座的粗对准。与积分方法不同，文献[11]利用低通数字滤波器滤除高频扰动加速度，为了精确计算时延和降低计算量，选择线性相位有限冲击响应（Finite Impulse Response, FIR）滤波器并且采取了滤波器组多级抽取的级联解决方案抑制干扰；文献[12]引入频域分离算子的概念，采用无限冲击响应（Infinite Impulse Response, IIR）抑制线晃动干扰的影响。

上述方法主要是通过设计滤波器抑制晃动扰动，实际在晃动基座初始对准中，除了被动地采取干扰抑制措施外，更好的方法应当是主动地对干扰进行建模和估计，如果能够估计出干扰因素和具体数值，再对其作适当补偿，这比单纯的干扰抑制方法更有优势。文献[10][13]采用速度或位置观测矢量的多项式建模、参数估计和矢量重构等措施进行惯性系初始对准，也具有抑制线晃动干扰的能力，但并未建立或指出其中的常值参数（惯导初始速度）的影响，仍然属于被动的干扰抑制方法。在此基础上，本文采用比力双重积分形成位置观测矢量，具有比速度观测矢量更强的干扰抑制性能，在位置观测矢量的多项式建模中分离出惯导初始速度和位置变化参数，使得位置观测矢量重构时，从原理上消除了这两项参数的影响，因此，本文方法属于主动的误差抑制方法。仿真结果表明，本文方法可以有效辨识出惯导初始速度和位置变化，在线晃动情况下具有良好的对准精度和收敛速度。

1 改进参数辨识方法

1.1 坐标系定义

文中涉及到的常用坐标系有地心惯性坐标系（i 系）、地球坐标系（e 系）、“东-北-天”导航坐标系（n 系）和“右-前-上”载体坐标系（b 系，即捷联惯导坐标系）。此外，为了推导惯性系初始对准算法，还需引入如下两个右手直角惯性坐标系的定义。

（1）初始时刻惯性坐标系（i_0 系）：在初始对准起始时刻（$t=0$），原点同 b 系原点，oz_{i0} 轴平行于地球自转轴且指向北极方向，ox_{i0} 轴平行于赤道平面且由地球内部指向外部空间。

（2）初始时刻载体惯性坐标系（i_{b0} 系）：在 $t=0$ 时刻，i_{b0} 系重合于 b 系。

初始对准开始后，i_0 系和 i_{b0} 系均相对惯性空间保持不动，因而它们之间的变换矩阵 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 为常值矩阵。

1.2 参数辨识建模

捷联惯导系统的比力方程为：

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{en}^{n}=\boldsymbol{C}_{b}^{n}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{b}+\boldsymbol{g}^{n}-\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\right)\times\boldsymbol{v}_{en}^{n} \tag{1}$$

其中，各符号及含义参见文献[14]。考虑如下微分关系：

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{en}^{n}=\frac{\mathrm{d}\left(\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n}\boldsymbol{v}_{en}^{i_{b0}}\right)}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{n}\left(\dot{\boldsymbol{v}}_{en}^{i_{b0}}+\boldsymbol{\omega}_{ni_{b0}}^{i_{b0}}\times\boldsymbol{v}_{en}^{i_{b0}}\right) \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，并在两边同时左乘变换矩阵 $\boldsymbol{C}_{n}^{i_{b0}}$，可得：

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{en}^{i_{b0}}+\boldsymbol{\omega}_{ni_{b0}}^{i_{b0}}\times\boldsymbol{v}_{en}^{i_{b0}}=\boldsymbol{C}_{n}^{i_{b0}}\left[\boldsymbol{C}_{b}^{n}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{b}+\boldsymbol{g}^{n}-\left(\boldsymbol{\omega}_{ie}^{n}+\boldsymbol{\omega}_{in}^{n}\right)\times\boldsymbol{v}_{en}^{n}\right] \tag{3}$$

注意到角速度关系 $\boldsymbol{\omega}_{ni_{b0}}^{i_{b0}}=-\boldsymbol{\omega}_{in}^{i_{b0}}$，对式(3)进行移项整理，有：

$$\boldsymbol{C}_{b}^{i_{b0}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{b}=-\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{C}_{n}^{i_0}\boldsymbol{g}^{n}+\dot{\boldsymbol{v}}_{en}^{i_{b0}}+\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_{b0}}\times\boldsymbol{v}_{en}^{i_{b0}} \tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{C}_{b}^{i_{b0}}$ 满足 $\dot{\boldsymbol{C}}_{b}^{i_{b0}}=\boldsymbol{C}_{b}^{i_{b0}}\left(\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}\times\right)$，可由陀螺角速度 $\boldsymbol{\omega}_{ib}^{b}$ 求解；变换矩阵 $\boldsymbol{C}_{n}^{i_0}$ 的计算方法为：

$$\boldsymbol{C}_{n}^{i_0}=\begin{bmatrix}-\sin\omega_t & -\sin L\cos\omega_t & \cos L\cos\omega_t\\ \cos\omega_t & -\sin L\sin\omega_t & \cos L\sin\omega_t\\ 0 & \cos L & \sin L\end{bmatrix} \tag{5}$$

其中，简记 $\omega_t\triangleq\omega_{ie}t$，$\omega_{ie}$ 为地球自转角速率大小，t 表示对准时间；L 为当地地理纬度。

根据姿态阵的链乘分解规则，初始对准姿态阵 $\boldsymbol{C}_{b}^{n}$ 可分解为：

$$\boldsymbol{C}_{b}^{n}=\left(\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{b}\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{C}_{n}^{i_0}\right)^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

式中，$\boldsymbol{C}_{b}^{i_{b0}}$ 和 $\boldsymbol{C}_{n}^{i_0}$ 均容易求得，因此，惯性系初始对准的主要任务为求解两个惯性系之间的变换矩阵 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$。下面重点介绍通过式(4)求解 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 的方法。

对式(4)两边同时在区间 $[0,t]$ 上积分，考虑到 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_{b0}}$ 为常值，可得：

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{sf}}^{i_{b0}}=\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{v}_{g}^{i_0}+\left(\boldsymbol{v}_{en}^{i_{b0}}-\boldsymbol{v}_{en,0}^{i_{b0}}\right)+\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_{b0}}\times\boldsymbol{p}_{en}^{i_{b0}} \tag{7}$$

其中，记

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{sf}}^{i_{b0}}=\int_0^t\boldsymbol{C}_{b}^{i_{b0}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{b}\mathrm{d}\tau \tag{8}$$

$$\boldsymbol{v}_{g}^{i_0}=-\int_0^t\boldsymbol{C}_{n}^{i_0}\boldsymbol{g}^{n}\mathrm{d}\tau=g\cos L\int_0^t\begin{bmatrix}\cos\omega_t\\ \sin\omega_t\\ \tan L\end{bmatrix}\mathrm{d}\tau=\frac{g\cos L}{\omega_{ie}}\begin{bmatrix}\sin\omega_t\\ 1-\cos\omega_t\\ \omega_t\tan L\end{bmatrix} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{p}_{en}^{i_{b0}}=\int_0^t\boldsymbol{v}_{en}^{i_{b0}}\mathrm{d}\tau \tag{10}$$

式中，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{sf}}^{i_{b0}}$ 直接由比力 $\boldsymbol{f}_{\mathrm{sf}}^{b}$ 投影至 i_{b0} 惯性系再积分得到，称为比力视速度；$\boldsymbol{v}_{g}^{i_0}$ 称为重力视速度；$\boldsymbol{v}_{en,0}^{i_{b0}}$ 为导航系速度 $\boldsymbol{v}_{en}^{i_{b0}}$ 的初值；由于假设对准过程中载体位置近似不动，因晃动干扰影响 $\boldsymbol{v}_{en}^{i_{b0}}$ 仅会在零附近波动，其积分位置变化 $\boldsymbol{p}_{en}^{i_{b0}}$ 近似为零，况且 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_{b0}}$ 也是一个小量，则必有外积 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^{i_{b0}}\times\boldsymbol{p}_{en}^{i_{b0}}\approx\boldsymbol{0}$，或可视为干扰噪声；$g$ 为当地重力加速度大小。

对式(7)再次积分，可得：

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{sf}}^{i_{b0}}=\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{p}_{g}^{i_0}-\boldsymbol{v}_{en,0}^{i_{b0}}t+\boldsymbol{p}_{en}^{i_{b0}}+\boldsymbol{V} \tag{11}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

其中，记

$$\boldsymbol{p}_{\mathrm{sf}}^{i_{b0}}=\int_0^t \boldsymbol{v}_{\mathrm{sf}}^{i_{b0}}\mathrm{d}\tau \tag{12}$$

$$\boldsymbol{p}_g^{i_0}=\int_0^t \boldsymbol{v}_g^{i_0}\mathrm{d}\tau=\frac{g\cos L}{\omega_{ie}^2}\begin{bmatrix}1-\cos\omega_t\\ \omega_t-\sin\omega_t\\ \omega_t^2(\tan L)/2\end{bmatrix}\triangleq G\begin{bmatrix}1-\cos\omega_t\\ \omega_t-\sin\omega_t\\ \omega_t^2/2\cdot\tan L\end{bmatrix} \tag{13}$$

式中，$\boldsymbol{p}_{\mathrm{sf}}^{i_{b0}}$、$\boldsymbol{p}_g^{i_0}$ 分别称为比力视位置和重力视位置；$\boldsymbol{V}$ 为干扰；$G=g\cos L/\omega_{ie}^2$。

将式(13)代入式(11)，展开 x、y、z 三轴分量，显然，三个分量在形式上是完全一样的，第 j 轴（$j=x,y,z$）分量可写成如下标量量测方程形式：

$$\begin{aligned}p_{\mathrm{sf},j}^{i_{b0}}&=c_{jx}G(1-\cos\omega_t)+c_{jy}G(\omega_t-\sin\omega_t)+\\&\quad c_{jz}G\omega_t^2/2\cdot\tan L-v_{en,j0}^{i_{b0}}t+p_{en,j}^{i_{b0}}+V_j=\\&\quad c_{jx}G\left(1-\cos\omega_t-\frac{\omega_t^2}{2}\right)+c_{jy}G(\omega_t-\sin\omega_t)+\\&\quad \left(c_{jx}+c_{jz}\tan L\right)G\cdot\frac{\omega_t^2}{2}-\frac{v_{en,j0}^{i_{b0}}}{\omega_{ie}}\cdot\omega_t+p_{en,j}^{i_{b0}}+V_j\triangleq\\&\quad \boldsymbol{H}\boldsymbol{\beta}_j+V_j\end{aligned} \tag{14}$$

其中，记常值阵 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 的各元素表示为 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}=(c)_{jk}$（$j,k=x,y,z$）；并记向量：

$$\boldsymbol{H}=\left[1-\cos\omega_t-\frac{\omega_t^2}{2}\quad \omega_t-\sin\omega_t\quad \frac{\omega_t^2}{2}\quad \omega_t\quad 1\right]\triangleq \left[h_4\quad h_3\quad h_2\quad h_1\quad h_0\right] \tag{15}$$

$$\boldsymbol{\beta}_j=\left[c_{jx}G\quad c_{jy}G\quad (c_{jx}+c_{jz}\tan L)G\quad -\frac{v_{en,j0}^{i_{b0}}}{\omega_{ie}}\quad p_{en,j}^{i_{b0}}\right]^{\mathrm{T}}\triangleq \left[\beta_{j4}\quad \beta_{j3}\quad \beta_{j2}\quad \beta_{j1}\quad \beta_{j0}\right]^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

至此，初始对准常值矩阵 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 的求解问题又转换为曲线 $t-p_{\mathrm{sf},j}^{i_{b0}}$ 的拟合和参数 $\boldsymbol{\beta}_j$ 的辨识问题了，待辨识参数 $\boldsymbol{\beta}_j$ 对于量测矩阵 $\boldsymbol{H}$ 和量测 $p_{\mathrm{sf},j}^{i_{b0}}$ 而言是线性的。

若将量测矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中的三角函数作泰勒级数展开，忽略高次项，可近似为：

$$\boldsymbol{H}=\left[-\frac{\omega_t^4}{4!}+\frac{\omega_t^6}{6!}\cdots\quad \frac{\omega_t^3}{3!}-\frac{\omega_t^5}{5!}\cdots\quad \frac{\omega_t^2}{2!}\quad \omega_t\quad 1\right]\approx \left[-\frac{\omega_t^4}{4!}\quad \frac{\omega_t^3}{3!}\quad \frac{\omega_t^2}{2!}\quad \omega_t\quad 1\right] \tag{17}$$

根据式(16)(17)容易看出，如果建立最高次幂为 ω_t^4 的四次多项式，经过一段初始对准时间，从比力视位置分量序列 $p_{\mathrm{sf},j}^{i_{b0}}$ 的量测中就能够辨识出 $\boldsymbol{\beta}_j$ 中的 5 个系数分量，进而求得常值矩阵 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 中的第 j 行的三个元素 c_{jx}、c_{jy}、c_{jz}，但考虑到 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 是单位正交阵，存在模值 $c_{jx}^2+c_{jy}^2+c_{jz}^2=1$ 约束关系，因此，若最低选用如下三次多项式进行曲线拟合也是可行的：

$$\boldsymbol{H}^{(3)}=\left[\frac{\omega_t^3}{3!}\quad \frac{\omega_t^2}{2!}\quad \omega_t\quad 1\right] \tag{18}$$

$$\boldsymbol{\beta}_j^{(3)}=\left[\beta_{j3}\quad \beta_{j2}\quad \beta_{j1}\quad \beta_{j0}\right]^{\mathrm{T}} \tag{19}$$

若选用三次多项式，要使三角函数泰勒级数展开的被忽略的四次幂小于 1 m，即令：

$$\left|c_{jx}G\frac{(\omega_{ie}t)^4}{4!}\right|<1 \tag{20}$$

其中，c_{jx} 的绝对值不超过 1，以 1 计。前述选择数值1 m 的原因在于，纯惯导在对准时间 5~10 min 内的误差通常为 10 m 量级，相对而言 1 m 误差可视为小量。由式(20)可求得三次多项式适用于对准时间 t <146 s。类似的，可评估四次多项式（忽略五次幂影响）对应的对准时间为 t <501 s。若直接使用式(15)(16)进行曲线拟合则不受对准时间长度的限制，理论上任意时长均可适用。

1.3　观测矢量重构与常值矩阵 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$ 求解

基于量测方程(14)和比力视位置量测序列 $p_{\mathrm{sf},j}^{i_{b0}}$，采用递推最小二乘法可获得参数 $\boldsymbol{\beta}_j$ 的估计值，记为 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_j$。从而在初始对准的任意时刻 t，可计算视位置向量 $\boldsymbol{p}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}$ 的曲线拟合值 $\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}$（为明确时刻，右下标加入时间符号 t，其它符号类似），为：

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_t\boldsymbol{H}_t^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

其中，将三轴参数估计值 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{jt}$ 合并，写为：

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_t=\left[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{xt}\quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{yt}\quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{zt}\right]^{\mathrm{T}}\triangleq \left[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{4t}\quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{3t}\quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{2t}\quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{1t}\quad \hat{\boldsymbol{\beta}}_{0t}\right] \tag{22}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{lt}=[\hat{\beta}_{xlt}\quad \hat{\beta}_{ylt}\quad \hat{\beta}_{zlt}]^{\mathrm{T}}$（$l=0,1,2,3,4$）。

将相应估计值代入式(11)，略去噪声 $\boldsymbol{V}$，可得回归模型：

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}=\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{p}_{g,t}^{i_0}-\hat{\boldsymbol{v}}_{en,0}^{i_{b0}}t+\hat{\boldsymbol{p}}_{en,t}^{i_{b0}} \tag{23}$$

注意到 $\hat{\boldsymbol{v}}_{en,0}^{i_{b0}}=-\hat{\boldsymbol{\beta}}_1\omega_{ie}$，$\hat{\boldsymbol{p}}_{en,t}^{i_{b0}}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$，将其及式(21)(22)一同代入式(23)，可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}\boldsymbol{p}_{g,t}^{i_0}&=\hat{\boldsymbol{\beta}}_t\boldsymbol{H}_t^{\mathrm{T}}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1t}\omega_{ie}t-\hat{\boldsymbol{\beta}}_{0t}=\\&\quad h_{4t}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{4t}+h_{3t}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{3t}+h_{2t}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2t}\triangleq\Delta\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}\end{aligned} \tag{24}$$

其中，$\Delta\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}$ 定义为比力视位置增量回归估计值或位置观测矢量重构值，它不受初始速度 $\hat{\boldsymbol{v}}_{en,0}^{i_{b0}}$ 和即时位置 $\hat{\boldsymbol{p}}_{en,t}^{i_{b0}}$ 估值的影响。这是本文有别于传统观测矢量重构方法的最大改进之处。

在初始对准过程中，选取时间中点 $t/2$ 和当前 t 两个不同时刻，通过式(24)计算比力视位置增量估计值 $\Delta\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t/2}^{i_{b0}}$ 和 $\Delta\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}$，同时通过式(13)计算重力视位置理论值 $\boldsymbol{p}_{g,t/2}^{i_0}$ 和 $\boldsymbol{p}_{g,t}^{i_0}$，采用如下双矢量定姿算法计算常值矩阵 $\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$：

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}=\begin{bmatrix}(\Delta\overline{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}})^{\mathrm{T}}\\(\Delta\overline{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}\times\Delta\overline{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t/2}^{i_{b0}})^{\mathrm{T}}\\(\Delta\overline{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}\times\Delta\overline{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t/2}^{i_{b0}}\times\Delta\overline{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}(\overline{\boldsymbol{p}}_{g,t}^{i_0})^{\mathrm{T}}\\(\overline{\boldsymbol{p}}_{g,t}^{i_0}\times\overline{\boldsymbol{p}}_{g,t/2}^{i_0})^{\mathrm{T}}\\(\overline{\boldsymbol{p}}_{g,t}^{i_0}\times\overline{\boldsymbol{p}}_{g,t/2}^{i_0}\times\overline{\boldsymbol{p}}_{g,t}^{i_0})^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\tag{25}$$

其中，$\Delta\overline{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf}}^{i_{b0}}=\Delta\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf}}^{i_{b0}}/\left|\Delta\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf}}^{i_{b0}}\right|$、$\overline{\boldsymbol{p}}_{g}^{i_0}=\boldsymbol{p}_{g}^{i_0}/\left|\boldsymbol{p}_{g}^{i_0}\right|$表示矢量归一化处理。

由于曲线拟合方法已经对带干扰的比力视位置$\boldsymbol{p}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}$进行了拟合处理，再通过拟合参数$\hat{\boldsymbol{\beta}}_t$计算的拟合值$\Delta\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}$具有很好的全时间段平滑性，能够滤除短时晃动干扰以及加速度计高频噪声的影响。因此，这里使用基于拟合值的双矢量定姿式(25)就可以，没必要采用多矢量定姿甚至 QUEST 等姿态求解算法[15-17]。此外，通常也不会按照式(16)，由$\hat{\beta}_{j2t}$、$\hat{\beta}_{j3t}$直接计算c_{jx}、c_{jy}、c_{jz}，该解法不便于实现矩阵$\boldsymbol{C}_{i_0}^{i_{b0}}$的最优单位正交化且求解精度不高，而式(25)的计算结果自然满足单位正交化要求。

顺便指出，根据式(16)(22)有$\left|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{4t}\right|=\left|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{3t}\right|=G$和$\left|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2t}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_{4t}\right|=G\tan\left|L\right|$成立，且$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{4t}$、$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{3t}$和$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2t}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_{4t}$三者之间相互正交并组成右手阵。因而，可以构造出纬度L的估计方法：

$$\begin{aligned}\hat{L}=&\operatorname{sign}\left((\hat{\boldsymbol{\beta}}_{4t}\times\hat{\boldsymbol{\beta}}_{3t})^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2t}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_{4t})\right)\cdot\operatorname{atan}\left(\left|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2t}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_{4t}\right|/\left|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{3t}\right|\right)=\\&\operatorname{sign}\left((\hat{\boldsymbol{\beta}}_{4t}\times\hat{\boldsymbol{\beta}}_{3t})^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2t}\right)\cdot\operatorname{atan}\left(\left|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{2t}-\hat{\boldsymbol{\beta}}_{4t}\right|/\left|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{3t}\right|\right)\end{aligned}\tag{26}$$

其中，sign(·)为符号函数。由此可见，本文算法具备在纬度未知的情况下进行初始对准的能力。若纬度未知，则先由式(26)估计纬度，再利用估计纬度代替真值纬度计算$\boldsymbol{p}_g^{i_0}$和$\boldsymbol{C}_n^{i_0}$，而其它计算公式不变。

1.4 位置变化与速度估计

测量值$\boldsymbol{p}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}$代表了载体惯性系（$i_{b0}$系）的比力双重积分实时计算视位置，它包含了载体线晃动干扰的影响，而回归估计值$\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}$是计算视位置$\boldsymbol{p}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}$在对应时刻的拟合“平均”值，两者求差并投影至$n$系，即为导航系实时位置变化的估计值：

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{en,t}^{n}=\boldsymbol{C}_{i_0}^{n}\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{i_0}(\boldsymbol{p}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}-\hat{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}})\tag{27}$$

将视位置估计式(21)对时间t微分，可得比力视速度估计值：

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_t\dot{\boldsymbol{H}}_t^{\mathrm{T}}\tag{28}$$

依据式(15)，得到量测矩阵的微分：

$$\dot{\boldsymbol{H}}_t=\omega_{ie}\begin{bmatrix}\sin\omega_t-\omega_t & 1-\cos\omega_t & \omega_t & 1 & 0\end{bmatrix}\tag{29}$$

类似于式(27)的计算方法，可得导航系实时速度的估计值：

$$\hat{\boldsymbol{v}}_{en,t}^{n}=\boldsymbol{C}_{i_0}^{n}\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{i_0}(\boldsymbol{v}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}}-\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{sf},t}^{i_{b0}})\tag{30}$$

有了实时速度的估计值，就可为初始对准之后的惯性导航提供可靠的速度初值，特别是在对准与导航衔接的时间点处载体受到较大线运动干扰时，可提高导航精度。

在式(30)中，若取$t=0$，则可得速度初值估计：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{v}}_{en,0}^{n}=&\boldsymbol{C}_{i_0}^{n_0}\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{i_0}(\boldsymbol{0}-\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{sf},0}^{i_{b0}})=\\&-\boldsymbol{C}_{i_0}^{n_0}\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{i_0}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_t\dot{\boldsymbol{H}}_0^{\mathrm{T}})=-\boldsymbol{C}_{i_0}^{n_0}\boldsymbol{C}_{i_{b0}}^{i_0}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1t}\omega_{ie}\end{aligned}\tag{31}$$

其中，$\boldsymbol{C}_{n_0}^{i_0}=(\boldsymbol{C}_{i_0}^{n_0})^{\mathrm{T}}$为式(5)在$t=0$时刻的计算值，注意此处的$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{1t}$应为$t$时刻的参数估值。

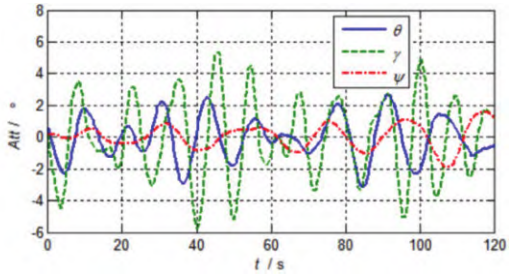
2 仿真实验验证

模拟海浪晃动干扰运动，仿真惯导姿态和速度数据。晃动干扰为六自由度运动，包含三维角运动和三维线运动，晃动参数设置如表 1 所示。一组姿态（*Att*：俯仰角θ、横滚角γ、方位角ψ）、速度（$\boldsymbol{v}^n$：东向速度v_{E}^n、北向速度v_{N}^n、天向速度v_{U}^n）的仿真曲线如图1所示，图中仅给出了前 2 min 的结果，之后的姿态和速度曲线与之类似。特别注意图 1(b)中的速度初值较大，高达[1.163；-0.401；0.478]（单位：m/s）。

表 1 晃动参数设置

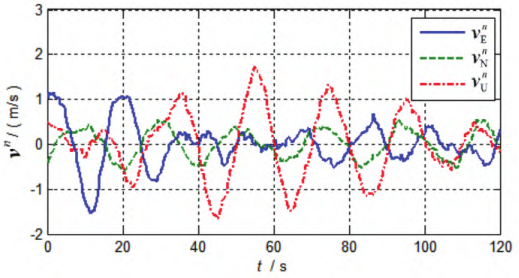
Tab.1 Swaying parameter setting

角晃动	幅值/°	周期/s	线晃动	幅值/m	周期/s
俯仰角	3	5~9	横荡	1.0	8~14
横滚角	7	4~8	纵荡	0.8	7~13
方位角	2	6~14	垂荡	1.2	8~15



(a) 晃动姿态角

(a) Swaying attitude



(b) 晃动速度

(b) Swaying velocity

图 1 姿态角和速度晃动真值曲线（前 2 min）

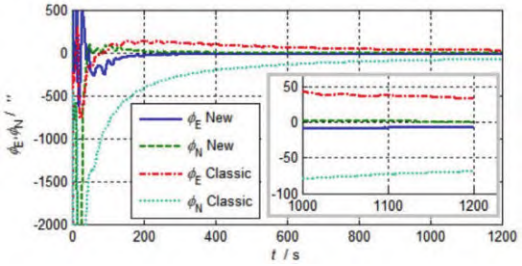
Fig.1 True values of swaying attitude and velocity (the first 2 minutes)

根据姿态角和速度数据，采用捷联惯导反演算法[18]生成 IMU（陀螺和加速度计）采样值，再注入惯性级的传感器误差（陀螺随机常值漂移为 0.01°/h，陀

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

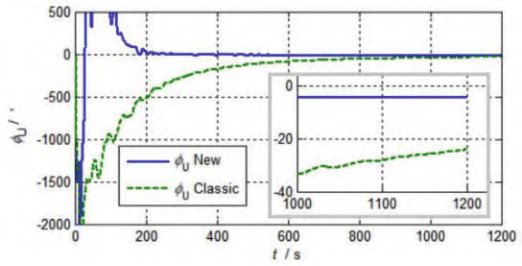
螺角度随机游走为 $0.001°/\sqrt{\text{h}}$，加速度计随机常值偏值为 $50\mu g$，加速度计速度随机游走为 $1\mu g/\sqrt{\text{Hz}}$）。

分别使用本文方法（图中用 New 表示）和传统方法[12]（图中用 Classic 表示，不对速度初值建模）进行惯性系初始对准仿真，初始对准结果与姿态角真值进行对比，得到东向失准角 ϕ_{E}、北向失准角 ϕ_{N} 和天向失准角 ϕ_{U} 如图 2 所示。从图中可以看出，传统对准方法的失准角误差较大并且收敛较慢；本文方法的失准角虽然在对准的初始阶段（200 s 之前）波动也较大，但之后快速收敛。分别对 270~300 s、570~600 s、870~900 s 和 1170~1200 s 四个时间段的失准角进行均值和均方差统计，结果参见表 2，表中东向、北向和天向的数据用分号隔开表示。结合图 2 和表 2 可知，传统方法的对准误差始终大于本文方法，传统方法在 1200 s 时还未明显收敛，特别是方位失准角误差高达 $1397/60\approx 23.3'$；而本文方法的方位失准角在 600 s 及其之后就已经基本收敛且比较平稳了，小于 3′，最终在 1200 s 处约为 $134/60\approx 2.2'$，这与陀螺标称精度的初始对准方位极限精度匹配。因惯性系对准方法的特点，水平失准角极限精度不只取决于加速度计零偏，此处不详细分析。本文方法的均方差很小，说明了其受线晃动干扰的影响很小。在 900 s 之后，传统对准方法的失准角均方差虽然不大，但是其均值偏差较大，这主要是由于它未对惯导初始速度误差建模造成的，导致对准结果始终存在偏值，对准时间越短越明显，随着对准时间延长偏值会慢慢减小，因而采用传统对准方法收敛时间相对较长。



(a)　水平失准角

(a)　Level misalignment angle



(b)　方位失准角

(b)　Azimuth misalignment angle

图 2　初始对准失准角对比

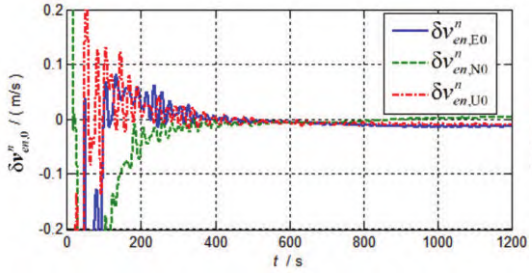
Fig.2　Comparison of initial alignment misalignment angle

表 2　初始对准失准角对比统计（单位：″）

Tab.2　Statistics for initial alignment misalignment angle comparison (Unit: ″)

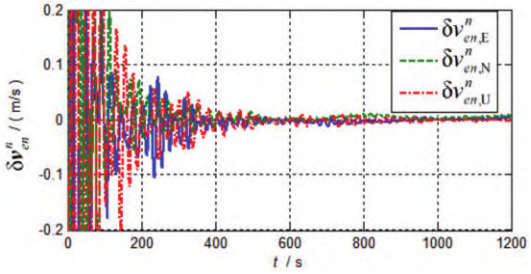
统计时段		270~300 s	570~600 s	870~900 s	1170~1200 s
本文方法	均值	-13; 14; 249	-9; 7; -163	-11; 3; -134	-10; 0.7; -134
	均方差	2; 3; 299	0.1; 0.1; 2.2	0.1; 0.1; 1.5	0.1; 0.1; 0.7
传统方法	均值	124; -283; -17518	71; -133; -4995	47; -90; -2363	33; -68; -1397
	均方差	2; 9; 866	1 ;2; 84	0.6; 1; 15	0.3; 0.6; 19

图 3 给出了本文方法的导航系速度初值和实时速度的估计误差，表 3 是在 270~300 s、570~600 s、870~900 s 和 1170~1200 s 四个时间段内的均值和均方差统计结果，表中均方差为 0 表示其值很小，可忽略不计。由图 3 和表 3 可知，大约在 600 s 之后，可实现小于 5 mm/s 的速度误差估计，相比于前述 1 m/s 量级的振荡线运动来说，大部分速度获得了有效的估计。精确的初始速度估计是提高本文方法对准精度和收敛速度的有力保障。当然，由于较大的初始速度以及实时速度波动的影响，本文方法在短时间内（300 s）也难以取得较好的初始对准效果。



(a)　速度初值估计误差

(a)　Initial velocity estimation error



(b)　实时速度估计误差

(b)　Real-time velocity estimation error

图 3　导航系速度初值和实时速度估计误差

Fig.3　Errors of initial & real-time velocity estimation

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

表 3 导航系速度初值和实时速度估计误差统计（单位：mm/s）

Tab.3 Statistics for initial & real-time velocity estimation error (Unit: mm/s)

统计时段		270~300 s	570~600 s	870~900 s	1170~1200 s
$\hat{\boldsymbol{v}}_{en,0}^{n}$	均值	14; -17; 11	-5; -4; -6	-10; 7; -9	-15; 10; -9
	均方差	9; 8; 10	1; 0; 1	0; 0; 1	0; 0; 0
$\hat{\boldsymbol{v}}_{en}^{n}$	均值	-12; 7; 14	-2; 0; -1	-4; -4; -1	0; 1; -1
	均方差	23; 16; 25	3; 1; 3	1; 1; 3	1; 1; 1

当载体初始速度的水平分量很小时（与天向分量关系不大），比如从图 1(b)所示的 80 s 处开始进行初始对准，可以验证本文对准方法与文献[12]基于双重积分的惯性系初始对准效果是比较接近的。

3 结 论

本文提出了基于比力视位置拟合的抗线晃动干扰惯性系初始对准改进参数辨识方法，对惯导初始速度和位置变化参数进行了建模和辨识，模型更加完备，仿真结果表明：与传统的未对初始速度干扰建模的惯性系对准方法相比，特别在大速度晃动情况下，本文方法有效提高了初始对准精度和收敛性。此外，与 Kalman 滤波等基于最优估计的初始对准相比，在没有明显的大角度转动且惯性器件误差可观测性不好时，本文方法具有无需设置滤波器参数、方法简单和适应性强等突出优点。

参考文献（References）：

[1] 罗莉，黄玉龙，常路宾，等. 捷联惯导系统初始对准研究现状及展望[J]. 中国舰船研究，2022, 17(5): 301-313.
Luo L, Huang Y, Chang L, et al. Development and prospects of initial alignment method for strap-down inertial navigation system[J]. Chinese Journal of Ship Research, 2022, 17(5): 301-313.

[2] 刘瑞鑫，刘付成，陈绍红，等. 一种船舶漂浮状态下捷联惯导快速自对准方法[J]. 中国惯性技术学报，2021, 29(1): 35-39+132.
Liu R, Liu F, Chen S, et al. A fast self alignment method for strapdown INS on drifting watercraft[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2021, 29(1): 35-39+132.

[3] Xu X, Sun Y, Yao Y, et al. A robust in-motion optimization-based alignment for SINS/GPS integration[J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2022, 23(5): 4362-4372.

[4] Tan C, Wei G, Gao C, et al. In-motion alignment for Doppler velocity log-aided SINS based on initial velocity error estimation[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2020, 69(10): 7877-7886.

[5] Xu X, Gui J, Sun Y, et al. A robust in-motion alignment method with inertial sensors and Doppler velocity log[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2020, 70: 8500413.

[6] 林宇森，缪玲娟，周志强. 一种基于回溯过程的里程计辅助 SINS 初始对准方法[J]. 中国惯性技术学报，2022, 30(6): 701-708.
Lin Y, Miao L, Zhou Z. An odometer aided SINS initial alignment method based on backtracking process[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2022, 30(6): 701-708.

[7] Xu B, Wang L, Duan T, et al. A fast in-motion alignment based on inertial frame and reverse navigation[C]// 2020 IEEE/ION Position, Location and Navigation Symposium (PLANS), Portland, OR, USA, 2020: 704-713.

[8] Pei F, Yang S,Yin S. In-motion initial alignment using state-dependent extended Kalman filter for strapdown inertial navigation system[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2021, 70: 8500812.

[9] Chang L, Luo Y. Log-linear error state model derivation without approximation for INS[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2022, doi: 10.1109/TAES.2022.3197726.

[10] 杨鹏翔，梅春波，刘琴，等. 基于多项式拟合的抗扰动纬度估计和粗对准方法[J]. 中国惯性技术学报，2020, 28(4): 429-432.
Yang P, Mei C, Liu Q, et al. Anti-perturbation latitude estimation and coarse-alignment method based on polynomial fitting[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2020, 28(4): 429-432.

[11] 练军想，汤勇刚，吴美平，等. 捷联惯导惯性系动基座对准算法研究[J]. 国防科技大学学报，2007, 29(5): 95-99.
Lian J, Tang Y, Wu M, et al. Study on SINS alignment algorithm with inertial frame for swaying bases[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2007, 29(5): 95-99.

[12] 严恭敏，白亮，翁浚，等. 基于频域分离算子的 SINS 抗晃动干扰初始对准算法[J]. 宇航学报，2011，32(7): 1486-1490.
Yan G, Bai L, Weng J, et al. SINS anti-rocking disturbance initial alignment based frequency domain isolation operator[J]. Journal of Astronautics, 2011, 32(7): 1486-1490.

[13] Xu X, Guo Z, Yao Y, et al. Robust initial alignment for SINS/DVL based on reconstructed observation vectors[J]. IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, 2020, 25(3): 1659-1667.

[14] 严恭敏，翁浚，白亮，等. 基于惯性参考系的动基座初始对准与定位导航[J]. 系统工程与电子技术，2011, 33(3): 618-621.
Yan G, Weng J, Bai L, et al. Initial in-movement alignment and position determination based on inertial reference frame[J]. Systems Engineering and Electronics, 2011, 33(3): 618-621

[15] Xu X, Xu X, Zhang T, et al. In-motion filter-QUEST alignment for strapdown inertial navigation systems[J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2018, 67(8): 1979-1993.

[16] Gao K, Ren S, Chen X, et al. An optimization-based initial alignment and calibration algorithm of land-vehicle SINS in-motion[J]. Sensors, 2018, 18(7): 2081.

[17] 严恭敏，陈若彤，郭鹃. 多矢量定姿的 SVD 和 QUEST 算法等价性分析[J]. 中国惯性技术学报，2019, 27(5): 568-572.
Yan G, Chen R, Guo K. Equivalence analysis between SVD and QUEST for multi-vector attitude determination[J]. Journal of Chinese Inertial Technology, 2019, 27(5): 568-572.

[18] Yan G, Wang J, Zhou X. High-precision simulator for strap-down inertial navigation systems based on real dynamics from GNSS and IMU integration[C]// China Satellite Navigation Conference (CSNC) 2015 Proceedings: Volume III: 789-799.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

doi:10.19306/j.cnki.2095-8110.2023.04.007

一种基于软卡方检测的自适应 Kalman 滤波方法

严恭敏[1]，刘 璠[1,2]，李梓阳[1]，周 琪[2]

（1. 西北工业大学自动化学院，西安 710072；
2. 中国航空工业集团公司西安飞行自动控制研究所，西安 710076）

摘 要：在传统 Kalman 滤波中，卡方检测方法简单地将量测划分为正常和异常两种，针对其不足之处，改进并提出了一种新的软卡方检测方法。新方法根据卡方检测结果构造连续变化的量测，利用权重系数，充分挖掘处于正常值与异常值之间的可疑量测新息，同时还将该方法推广成多维量测的多分量卡方检测形式，建立了全面完整的软卡方检测 Kalman 滤波量测更新方程。最后，通过惯导/卫导组合导航仿真，验证了软卡方检测 Kalman 滤波的优势：无需任何参数调整且具有比 Sage-Husa 自适应滤波更小的统计误差波动。

关键词：自适应 Kalman 滤波；软卡方检测；组合导航；数值仿真

中图分类号：V249.3 **文献标志码**：A **文章编号**：2095-8110(2023)04-0081-06

An adaptive Kalman filter based on soft Chi-square test

YAN Gongmin[1], LIU Fan[1,2], LI Ziyang[1], ZHOU Qi[2]

(1. College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;
2. AVIC Xi'an Flight Automatic Control Research Institude, Xi'an 710076, China)

Abstract: In the traditional Kalman filter, the Chi-square test method simply divides the measurement into two categories, the normal ones and the abnormal ones. In view of its shortcomings, a new soft Chi-square test method is improved and proposed. According to the Chi-square test results, the new method constructs continuously changing measurements and uses the weight coefficient to fully explore the new suspicious measurement between the normal value and the abnormal value. At the same time, the method is extended to the multi-component Chi-square test form of multi-dimensional measurement, and a comprehensive and complete update equation of soft Chi-square test Kalman filter measurement is established. Finally, the simulation of INS/GNSS integrated navigation verifies the advantages of soft Chi-square test Kalman filter, the proposed method does not need any parameter adjustment and has smaller statistical error fluctuation than classical Sage-Husa adaptive filter.

Key words: Adaptive Kalman filter; Soft Chi-square test; Integrated navigation; Numerical simulation

0 引言

卡尔曼滤波(Kalman filter, KF)是一种利用随机线性系统状态空间模型，通过系统输出的观测数据，对系统状态进行最优估计的方法，在导航制导与控制、通信以及图像处理等众多领域有着广泛的

收稿日期：2023-03-07；**修订日期**：2023-05-31
基金项目：贵州省科技支撑计划项目(黔科合支撑[2023]一般 352)
作者简介：严恭敏(1977-)，男，博士，副教授，主要从事惯性导航与信息融合理论方面的研究。

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

应用。

理论上，只有在随机线性系统的结构参数和噪声统计特性参数都准确已知的条件下，KF 才能获得状态的最优估计。如果实际量测的统计特性与系统建模参数不匹配，会导致 KF 状态估计精度下降，严重时还可能会引起滤波发散。卡方检测(Chi-square test，C2T)方法是一种传统的量测故障检测方法[1]，在状态空间建模准确的前提下，通过 KF 的新息及其均方差阵构造卡方统计量，可检测出量测是否存在异常，如果量测正常则进行量测更新，反之，如果量测异常则放弃量测更新。然而，实际应用中的系统噪声参数往往难以准确确定，从而使得卡方检测统计量的阈值设置成为一大难题。如果卡方检测阈值设置太大，则可能将异常量测引入滤波器，降低滤波估计精度；如果阈值设置太小，则可能排除了一些正常的量测，使得量测利用率下降，同样也会降低状态估计精度。造成这一问题的根源在于传统卡方检测的二值化量测异常判断原则，量测要么被判断为正常、要么被判断为异常，再没有其他任何中间情形。

借鉴 Sage-Husa 自适应滤波方法[2-5](Sage-Husa adaptive KF，SHAKF)或抗差自适应滤波方法[6-7]，至少可以更精细地将量测状况划分为“正常/信任”“可疑/部分信任”和“异常/丢弃”这三种类别，针对不同的量测类别修改量测噪声方差阵的大小或赋予不同的量测利用权重，或者直接根据 KF 新息大小计算权重，实现权重大小的无缝连续过渡。但与上述两种自适应滤波的思路不完全相同，本文通过分析传统卡方检测的新息权重二值化利用特点，给出了新息权重的连续化利用方法，将权重的二值化取值改进为连续化取值，并将其推广，从而获得了多维量测的多分量卡方检测方法。文中将所提新方法称为软卡方检测 KF 方法(soft Chi-square test KF，SC2TKF)，传统方法可被称为硬卡方检测 KF 方法。显然，新方法更具普遍性，传统硬卡方检测可以看作是新软卡方检测方法的一个特例。最后，利用惯导/卫导组合进行了软卡方检测方法的 KF 仿真验证，结果显示新方法具有比 Sage-Husa 自适应滤波更好的滤波精度和稳定性。

1 传统的量测故障卡方检测原理

随机线性系统的状态空间模型记为

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{X}_{k-1}+\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{W}_{k-1}\\ \boldsymbol{Z}_k=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{V}_k\end{cases}\tag{1}$$

式中，$\boldsymbol{X}_k$ 是 $n\times1$ 维的状态矢量，$\boldsymbol{Z}_k$ 是 $m\times1$ 维的量测矢量；$\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}$，$\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}$，$\boldsymbol{H}_k$ 是已知的系统结构参数，分别称为 $n\times n$ 维的状态一步转移矩阵、$n\times l$ 维的系统噪声分配矩阵、$m\times n$ 维的量测矩阵；$\boldsymbol{W}_{k-1}$ 是 $l\times1$ 维的系统噪声矢量，$\boldsymbol{V}_k$ 是 $m\times1$ 维的量测噪声矢量，两者都是零均值的高斯白噪声矢量序列，且它们之间互不相关，即满足如下 Kalman 滤波关于噪声的基本假设条件

$$\begin{cases}\mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k]=\boldsymbol{0},\quad \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{W}_j^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{Q}_k\delta_{kj}\\ \mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k]=\boldsymbol{0},\quad \mathrm{E}[\boldsymbol{V}_k\boldsymbol{V}_j^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{R}_k\delta_{kj}\\ \mathrm{E}[\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{V}_j^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{0}\end{cases}\tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{Q}_k$ 是半正定的，$\boldsymbol{R}_k$ 是正定的，δ_{kj} 为克罗内克函数。

针对系统式(1)的 Kalman 滤波公式为

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}\\ \boldsymbol{P}_{k/k-1}=\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{\Phi}_{k/k-1}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{\Gamma}_{k-1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{r}_k=\boldsymbol{Z}_k-\boldsymbol{H}_k\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}\\ \boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{H}_k\boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{R}_k\\ \boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k^{-1}\\ \hat{\boldsymbol{X}}_k=\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{r}_k\\ \boldsymbol{P}_k=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{P}_{k/k-1}\end{cases}\tag{3}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}$ 和 $\boldsymbol{P}_{k/k-1}$ 分别表示状态一步预测及其均方误差阵；$\boldsymbol{r}_k$ 和 $\boldsymbol{A}_k$ 分别表示量测预测误差(即新息)及其均方差阵，理论上新息序列 $\boldsymbol{r}_k$ 为零均值白噪声；$\boldsymbol{K}_k$ 为滤波增益；$\hat{\boldsymbol{X}}_k$ 和 $\boldsymbol{P}_k$ 分别表示状态估计及其均方误差阵。

由量测新息及其均方差阵可构造统计量[1]

$$\lambda_k=\boldsymbol{r}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_k^{-1}\boldsymbol{r}_k\tag{4}$$

其中，λ_k 服从自由度为 m 的卡方分布，即 $\lambda_k\sim\chi^2(m)$。在量测正常情况下，统计量 λ_k 的数值应当比较小；而如果量测出现异常，λ_k 将变得较大，量测正常与否一般以某选定的阈值 T_{Dm} 作为判断门限，即

$$\begin{cases}\lambda_k\leqslant T_{Dm} & \text{量测正常(记为 } \chi_k=1)\\ \lambda_k>T_{Dm} & \text{量测异常(记为 } \chi_k=0)\end{cases}\tag{5}$$

这便是 Kalman 滤波的量测故障卡方检测原理。在滤波过程中可以计算统计量 λ_k，根据其大小实时监测量测是否异常，进而决定是否进行量测更新，式(3)中的量测及其均方差阵更新方程可改写为

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{X}}_k=\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}+\sqrt{\chi_k}\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{r}_k\\ \boldsymbol{P}_k=(\boldsymbol{I}-\chi_k\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{P}_{k/k-1}\end{cases}\tag{6}$$

显然，当 $\chi_k=1$ 即 $\lambda_k\leqslant T_{Dm}$ 时，进行正常的 Kalman

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

滤波量测更新；而当 $\chi_k=0$ 即 $\lambda_k>T_{Dm}$ 时，则放弃量测更新，达到隔离异常量测的效果。

2　新的软卡方检测方法

传统卡方检测方法有效的前提条件是滤波系统模型准确无误。在惯导/卫导组合导航等实际应用中，一般 Kalman 滤波的系统结构参数建模会相对比较准确且稳定，而噪声参数会由于运动状态、建模不完善、系统老化或运行环境等原因而变化，难以完全精确建模，这样就会使得卡方检测阈值 T_{Dm} 难以严格地按理论方法准确确定。阈值设置过大会造成故障检测概率降低，存在将较多的异常值引入滤波量测的风险，从而造成滤波误差增大；阈值设置过小又会造成故障虚警概率增大，经常性的虚警降低了量测利用率，量测修正作用减小也会降低滤波估计精度。当然，对于高精度惯导系统而言，随机性弃用卫导定位量测 50% 以上，比如卫导量测即使从 1 Hz 降为 0.1 Hz，对组合导航性能影响也不大；但对于低精度惯导系统，卫导利用从 1 Hz 变为 0.5 Hz 对组合精度的影响可能就比较显著了。

传统卡方检测方法的结果是二值化的，非 0 即 1，再无任何中间状态。该方法在雷达目标探测等领域中主要以有/无为指标，其应用是非常合理的，但是，针对组合导航等场合，在量测信息正常（信任）与异常（丢弃）之间还可能存在大量的中间状态（可疑），仅简单地使用卡方检测二值化结果就不太合适了，这也有悖于目前常用的量测自适应滤波和抗差滤波等方法的理念。比如，在 Sage-Husa 量测自适应 Kalman 滤波中，通过量测新息的大小自动调整量测噪声方差阵的大小，相当于是将所有量测信息都进行了综合利用，与正常量测相比，量测新息中等大小（可疑）时降低量测权重，新息明显异常时量测权重很小，若权重趋于 0 则等效于弃用。论文根据自适应滤波的新息利用特点，将式(6)改进为

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{X}}_k=\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}+\sqrt{\rho_k}\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{r}_k\\ \boldsymbol{P}_k=(\boldsymbol{I}-\rho_k\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{P}_{k/k-1}\end{cases}\tag{7}$$

$$\rho_k=\begin{cases}1 & \lambda_k\leqslant T_{Dm}\\ T_{Dm}/\lambda_k & \lambda_k>T_{Dm}\end{cases}\tag{8}$$

显然，当量测新息出现异常时，式(7)中的等效滤波增益 $\sqrt{\rho_k}\boldsymbol{K}_k$ 对新息的利用会随着新息增大而逐渐下降，是一种软下降方式，因此文中称之为软卡方检测方法。相较于式(7)，可将传统卡方检测式(6)中新息利用率的二值化硬下降（从 1 直接跳变到 0）的方法称为硬卡方检测方法。

值得特别指出的是，如果式(1)中量测是多维的，传统卡方检测将多维量测视为整体，只要有任何一个分量出现异常，卡方检测方法也会同时降低其他正常量测分量的新息利用率，这种处理方式不是很合理，为了避免该缺陷，需对各量测分量逐一做卡方检测。如果在 Kalman 滤波模型中，各量测分量之间是不相关的，即量测噪声均方差阵 $\boldsymbol{R}_k$ 为对角线矩阵，则采用序贯滤波处理后，各序贯量测更新的卡方检测就是相当于对单个量测分量的逐一处理。如果 $\boldsymbol{R}_k$ 为非对角线矩阵，不妨记 $r_{k(i)}$ 为新息 $\boldsymbol{r}_k$ 的第 $i(i=1,2,\cdots,m)$ 个分量，$A_{k(ii)}$ 为新息均方差阵 $\boldsymbol{A}_k$ 的第 i 行 i 列对角线元素，且记统计量

$$\lambda_{k(i)}=r_{k(i)}^{\mathrm{T}}A_{k(ii)}^{-1}r_{k(i)}=r_{k(i)}^2/A_{k(ii)}\tag{9}$$

不难理解，各统计量 $\lambda_{k(i)}$ 均服从自由度为 1 的卡方分布，即有 $\lambda_{k(i)}\sim\chi^2(1)$。

参考式(7)，推广和建立由 $\lambda_{k(i)}$ 构造的 Kalman 滤波量测更新方法，如下

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}_{k/k-1}\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\sqrt{\boldsymbol{\rho}_k}\boldsymbol{A}_k^{-1}\\ \hat{\boldsymbol{X}}_k=\hat{\boldsymbol{X}}_{k/k-1}+\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{r}_k\\ \boldsymbol{P}_k=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{K}_k\sqrt{\boldsymbol{\rho}_k^{\mathrm{T}}}\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{P}_{k/k-1}\end{cases}\tag{10}$$

$$\sqrt{\boldsymbol{\rho}_k}=\mathrm{diag}(\sqrt{\rho_{k(1)}}\quad\sqrt{\rho_{k(2)}}\quad\cdots\quad\sqrt{\rho_{k(m)}})\tag{11}$$

$$\rho_{k(i)}=\begin{cases}1 & \lambda_{k(i)}\leqslant T_{D1}\\ T_{D1}/\lambda_{k(i)} & \lambda_{k(i)}>T_{D1}\end{cases}\tag{12}$$

在式(10)中，修改了滤波增益 $\boldsymbol{K}_k$ 的计算方式，其目的是保证之后均方差阵 $\boldsymbol{P}_k$ 计算的对称性，显然，式(7)是式(10)中 $\boldsymbol{\rho}_k$ 各分量都相等时的特殊情形。理论上，$\boldsymbol{\rho}_k$ 可取对称正定阵，但为了简便，一般取为如式(11)所示的对角阵。在式(12)中，参数 T_{D1} 是自由度为 1 的卡方统计量 $\lambda_{k(i)}$ 的故障检测设置阈值，当取显著性水平为 0.05 时有 $T_{D1}\approx3.8$。

3　仿真验证

3.1　惯导/卫导组合导航模型

以惯导/卫导松组合导航为例进行仿真实验验证，系统状态 15 维、量测 3 维，具体建模如下

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{G}\boldsymbol{W}^b\\ \boldsymbol{Z}=\tilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{INS}}-\tilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GNSS}}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{V}\end{cases}\tag{13}$$

其中

$$\boldsymbol{X}=\left[\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\quad(\delta\boldsymbol{v}^n)^{\mathrm{T}}\quad(\delta\boldsymbol{p})^{\mathrm{T}}\quad(\boldsymbol{\varepsilon}^b)^{\mathrm{T}}\quad(\boldsymbol{\nabla}^b)^{\mathrm{T}}\right]^{\mathrm{T}}$$

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{aa} & \boldsymbol{M}_{av} & \boldsymbol{M}_{ap} & -\boldsymbol{C}_b^n & \boldsymbol{0}_{3\times3}\\ \boldsymbol{M}_{va} & \boldsymbol{M}_{vv} & \boldsymbol{M}_{vp} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{C}_b^n\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{M}_{pv} & \boldsymbol{M}_{pp} & \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{0}_{3\times3}\\ & & \boldsymbol{0}_{6\times15} & & \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{C}_b^n & \boldsymbol{0}_{3\times3}\\ \boldsymbol{0}_{3\times3} & \boldsymbol{C}_b^n\\ \boldsymbol{0}_{9\times6} & \end{bmatrix},\boldsymbol{W}^b=\begin{bmatrix}\boldsymbol{w}_{\mathrm{g}}^b\\ \boldsymbol{w}_{\mathrm{a}}^b\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{H}=[\boldsymbol{0}_{3\times3}\quad\boldsymbol{0}_{3\times3}\quad\boldsymbol{I}_{3\times3}\quad\boldsymbol{0}_{3\times3}\quad\boldsymbol{0}_{3\times3}]$$

$\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}$,$\delta\boldsymbol{v}^n$,$\delta\boldsymbol{p}$,$\boldsymbol{\varepsilon}^b$,$\boldsymbol{\nabla}^b$ 分别表示惯导失准角、速度误差、位置误差、陀螺随机常值漂移、加速度计随机常值偏值；$\boldsymbol{w}_{\mathrm{g}}^b$ 和 $\boldsymbol{w}_{\mathrm{a}}^b$ 分别为陀螺仪白噪声和加速度计白噪声；$\boldsymbol{V}$ 为卫导接收机的位置测量白噪声；$\boldsymbol{C}_b^n$ 为惯导姿态矩阵，n 表示“东－北－天”导航坐标系，b 表示“右－前－上”载体坐标系；$\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{INS}}$，$\widetilde{\boldsymbol{p}}_{\mathrm{GNSS}}$ 分别为惯导和卫导的位置输出，均包含纬度、经度和高度 3 个分量；$\boldsymbol{M}_{**}$ 等符号具体表达式参见文献[5]。

3.2 仿真条件

采用 PSINS 工具箱软件模拟一段车载行驶轨迹，轨迹包含静止、加减速、匀速、转弯、爬坡等阶段，总仿真时间约 1 000 s，行驶里程约 7.5 km。行车速度如图 1 所示，轨迹相对位置变化的二维平面图如图 2 所示，图中标识“★”为载车行驶起始点。

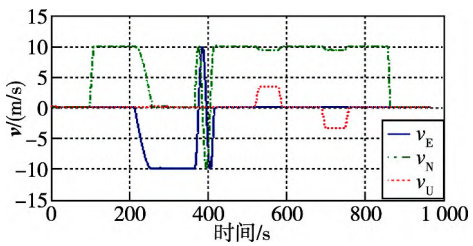


图 1 载车行驶速度

Fig. 1 The vehicular velocities

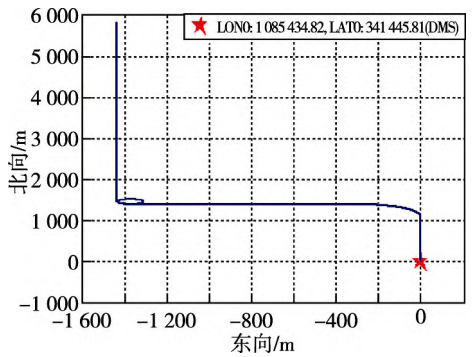


图 2 载车行驶平面轨迹

Fig. 2 The vehicular trajectory

根据轨迹仿真生成惯性传感器数据和卫导定位数据，其中惯性数据采样 100 Hz、卫导测量 1 Hz。再进行惯性导航解算和惯导/卫导组合导航 Kalman 滤波解算，仿真过程中注入的各种误差如表 1 所列。

表 1 仿真误差设置

Tab. 1 Simulation error setting

误差名称/单位	数值
陀螺随机常值漂移/[(°)/h]	0.03
陀螺随机游走/[(°)/h$^{\frac{1}{2}}$]	0.001
加速度计随机常值偏值	$10^{-4}g$
加速度计随机游走/(Hz$^{-\frac{1}{2}}$)	$5\times10^{-6}g$
初始水平失准角/(′)	0.5
初始方位失准角/(′)	20
初始速度误差/(m/s)	0.1
初始位置误差/m	1

卫导的位置量测误差(纬、经、高，3 个分量)均设置为零均值的高斯白噪声，正常时间段内方差为 $(1\ \mathrm{m})^2$，以下两个时间段除外：(1)200～400 s 之间的噪声方差设置为 $(10\ \mathrm{m})^2$；(2)600～800 s 之间设置为污染噪声，以卫导高度测量误差为例，其表示为

$$\delta H\sim\begin{cases}N(0,(1\ \mathrm{m})^2) & \text{w. p.}\quad 0.9\\ N(0,(100\ \mathrm{m})^2) & \text{w. p.}\quad 0.1\end{cases}\tag{14}$$

其中，“w. p.”表示“以…概率”(with probability)之意。式(14)表示噪声 δH 在正常情况下以 90% 的大概率服从方差为 $(1\ \mathrm{m})^2$ 的高斯分布，视为正常噪声；而在异常情况下以 10% 的小概率服从方差为 $(100\ \mathrm{m})^2$ 的高斯分布，视为野值噪声。

一组高度量测误差仿真的示例如图 3 所示，由图可见，在 200～400 s 之间高度误差总体波动变大，模拟噪声方差变化；而在 600～800 s 之间个别误差幅值跳变很大，模拟小概率的野值跳变。

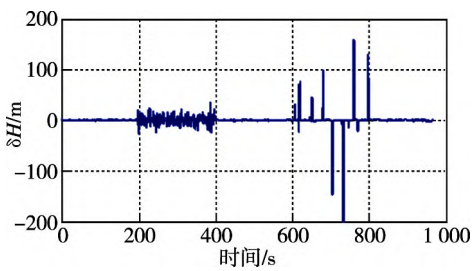


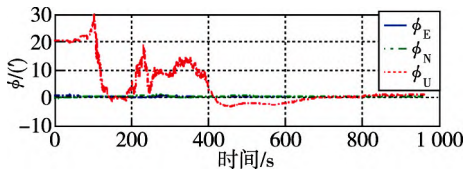
图 3 卫导高度测量误差

Fig. 3 GNSS altitude measurement error

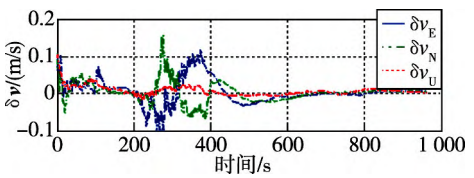
(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

3.3　仿真结果

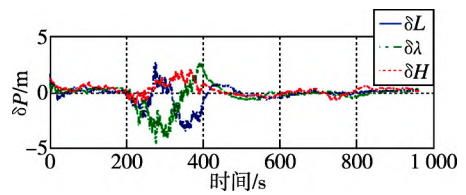
惯导/卫导组合导航的姿态失准角、速度误差和位置误差的结果如图 4 所示，从图中可以看出：在 200～400 s 之间随着卫导的量测噪声增大，组合导航的误差也相应变大，该段误差的量级与全程卫导误差方差都设置为(10 m)^2 的结果是基本一致的；在 600～800 s 之间状态估计基本不受卫导量测噪声野值的影响，滤波器具有良好的野值隔离效果，与只存在小方差(1 m)^2 时的量测噪声一样，始终保持较高的滤波精度。



(a) 姿态误差



(b) 速度误差



(c) 位置误差

图 4　基于软卡方检测的估计误差

Fig. 4　State estimation error based on SC2TKF

此外，还对本文新方法(SC2TKF)和传统 Sage-Husa 量测噪声自适应滤波(SHAKF)作了对比仿真，进行了 50 次的蒙特卡洛仿真并统计各导航参数误差，结果表明 SC2TKF 更加稳定，其中纬度误差的均方根(root mean square，RMS)误差统计如图 5 所示，其他误差情况类似，不再一一列出。值得注意的是，在 SHAKF 中还有一个渐消因子需要精心设置(文中取 $b=0.5$)，若渐消因子设置不合适，对滤波结果有较大的负面影响。综上，新方法无需设置任何参数，具有使用方便和适应性强等优点。

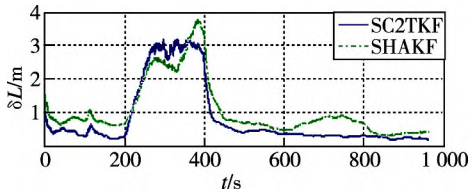


图 5　不同滤波方法的纬度误差比较

Fig. 5　Comparison of latitude error by using SC2TKF vs SHAKF

4　结论

自适应 Kalman 滤波的方法很多，广义上说，能根据实时量测自动调整滤波器参数并获得良好状态估计效果的方法均可称为自适应滤波，比如 Sage-Husa 自适应滤波[2-3]、抗差自适应滤波[4,6-7]、强跟踪滤波[8]以及近年来一系列文献中根据变分贝叶斯估计原理给出的 RSTKF、MCKF、SSMKF 和 CERKF 等众多方法[9-13]。在组合导航实际系统中，除基于量测噪声自适应的经典 Sage-Husa 自适应滤波比较实用外，其他自适应方法理论推导结果和仿真效果虽然较好，但往往前提假设过于理想或者参数设置繁琐，难以适用于复杂高维系统，因而少有实际应用的报道。继 Sage-Husa 自适应滤波之后，论文提出的软卡方检测 Kalman 滤波方法有望在组合导航领域成为一种更加实用的自适应滤波方法。

参考文献

[1] 秦永元，张洪钺，汪叔华．卡尔曼滤波与组合导航原理[M]．第 3 版．西安：西北工业大学出版社，2015.
QIN Yongyuan, ZHANG Hongyue, WANG Shuhua. Theory of Kalman filter and integrated navigation[M]. 3rd edition. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2015(in Chinese).

[2] SAGE A P, HUSA G W. Adaptive filtering with unknown prior statistics[C]//Proceedings of Joint Automatic Control Conference, Boulder Colorado, 1969: 760-769.

[3] 严恭敏，邓瑀．传统组合导航中的实用 Kalman 滤波技术评述[J]．导航定位与授时，2020，7(2)：50-64.
YAN Gongmin, DENG Yu. Review on practical Kalman filtering techniques in traditional integrated navigation system[J]. Navigation Position and Timing, 2020, 7(2): 50-64(in Chinese).

[4] 杨元喜．自适应动态导航定位[M]．第 2 版．北京：测绘出版社，2017.

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

YANG Yuanxi. Adaptive navigation and kinematic positioning[J]. 2nd edition. Beijing: Surveying and Mapping Press, 2017(in Chinese).

[5] 严恭敏，翁浚．捷联惯导算法与组合导航原理[M]. 西安:西北工业大学出版社，2019.
YAN Gongmin, WENG Jun. Strapdown inertial navigation algorithm and integrated navigation principle [M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 2019(in Chinese).

[6] 张且且，赵龙，周建华．抗差自适应分步滤波算法在PPP/INS组合导航中的应用[J]. 导航定位与授时，2020,7(5): 73-81.
ZHANG Qieqie, ZHAO Long, ZHOU Jianhua. Two-step robust adaptive filtering with application to PPP/INS integrated navigation[J]. Navigation Positioning and Timing, 2020,7(5):73-81(in Chinese).

[7] 杨旭，杨旭，李佳，等．一种基于灰色预测理论和抗差自适应Kalman滤波的滑坡监测算法[J]. 导航定位与授时,2023,10(1):40-53.
YANG Xu, YANG Xu, LI Jia, et al. A landslide monitoring algorithm based on grey prediction theory and robust adaptive Kalman filter[J]. Navigation Positioning and Timing, 2023, 10 (1): 40-53 (in Chinese).

[8] 周东华，席裕庚，张钟俊．一种带多重次优渐消因子的扩展卡尔曼滤波器[J]. 自动化学报，1991,17(6): 689-695.
ZHOU Donghua, XI Yugeng, ZHANG Zhongjun. A suboptimal multiple fading extended Kalman filter[J]. Acta Automatica Sinica,1991,17(6): 689-695(in Chinese).

[9] HUANG Y, ZHANG Y, LI N, et al. A novel robust student's t-based Kalman filter[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2017, 53 (3): 1545-1554.

[10] HUANG Y, BAI M, ZHANG Y. A novel multiple-outlier-robust Kalman filter[J]. Frontiers of Information Technology & Electronic Engineering, 2022, 23 (3): 422-438.

[11] CHEN B, LIU X, ZHAO H, et al. Maximum correntropy Kalman filter[J]. Automatica, 2017, 76: 70-77.

[12] DENG Z, SHI L, YIN L, et al. UKF based on maximum correntropy criterion in the presence of both intermittent observations and non-Gaussian noise[J]. IEEE Sensors Journal, 2020,20(14): 7766-7773.

[13] 龙子旋,周琪,彭侠夫,等．非高斯环境下船变测量最大熵卡尔曼滤波方法[J]. 系统工程与电子技术，2021,43(11): 3278-3287.
LONG Zixuan, ZHOU Qi, PENG Xiafu, et al. Maximun correntropy Kalman filter used for hull deformation measurement in non-Gaussian environment[J]. Systems Engineering and Electronics,2021,43(11): 3278-3287(in Chinese).

（编辑:黄利华）

(C)1994-2023 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net